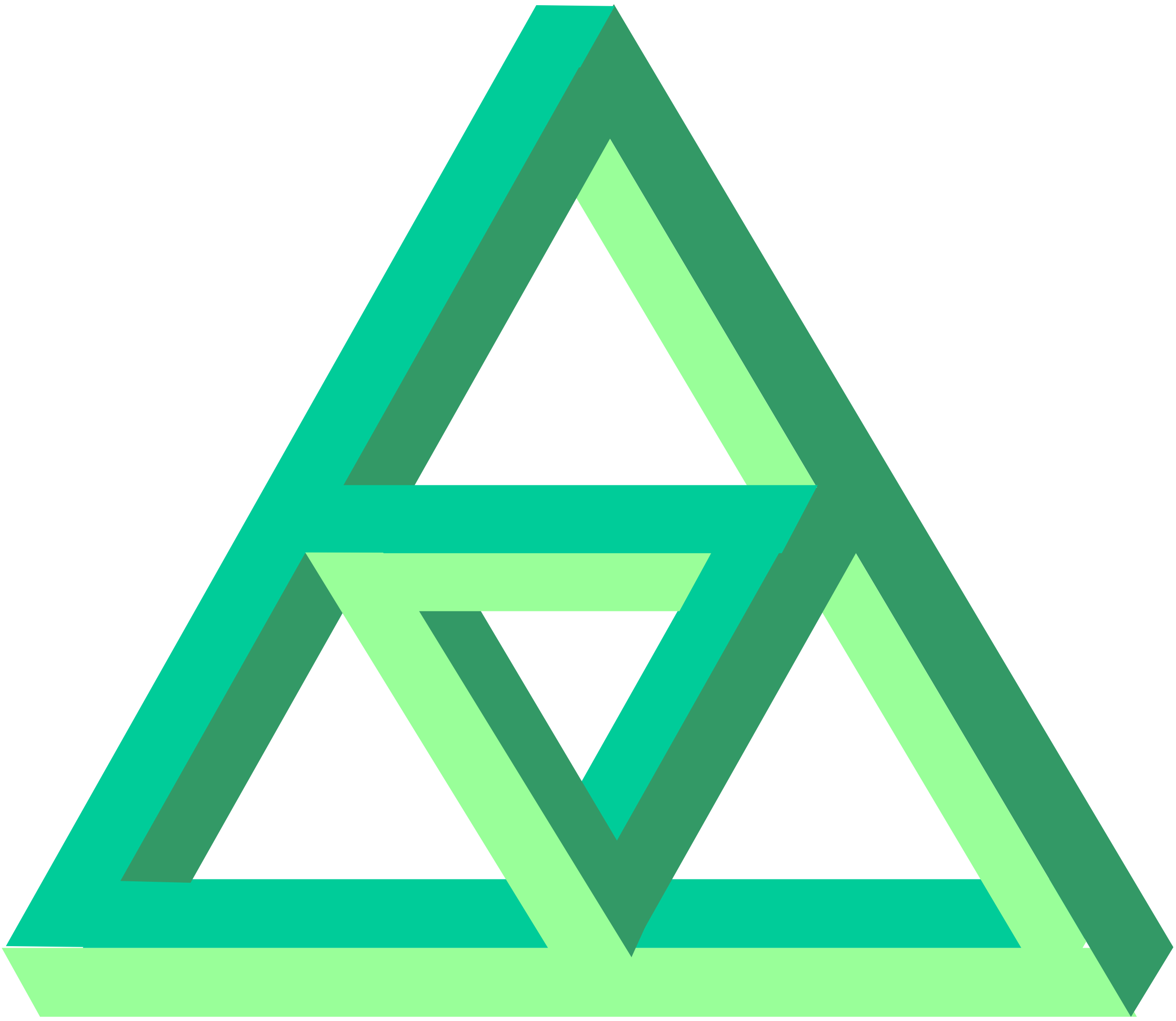
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 04/2025 (April 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben" sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir folgen einem roten Faden der diesjährigen Mathematik-Olympiaden und setzen die Diskussion zu Lösungsstrategien im Koordinatensystem fort. Nach den Aufgaben **MO641013** und **MO640922** basiert auch die Aufgabe **MO641032** auf dieser Thematik. Wir betrachten diesmal solche Aufgaben, die eng mit Geradengleichungen verbunden sind. Dies begegnete uns auch in der **Aufgabe 1** der **5. Serie** des Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM).

Im historischen Rückblick zeigen wir dazu Aufgaben aus Abiturprüfungen aus dem 19. Jahrhundert.

Mit Bezug zur **Aufgabe 5A** der **4. Serie** des diesjährigen KZM wiederholen wir die Diskussion um Verteilungen von Punkten in einer Quadratfläche. Diese Aufgabenstellung vereint viele Möglichkeiten, zu experimentieren, abzuschätzen und zu beweisen.

Mit einer Zusammenfassung zum online-Seminar über die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik wollen wir bereits jetzt auf die nächsten Seminarangebote im September hinweisen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 31.2 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem

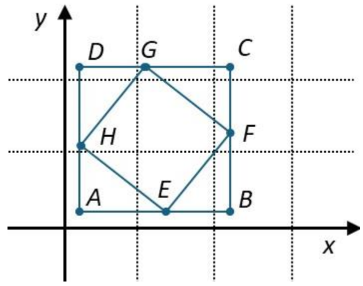
Während im Teil 1 dieser Thematik die Beschreibung geometrischer Objekte im Koordinatensystem im Vordergrund stand, bei denen es aber auch immer Lösungsansätze der Elementargeometrie gibt, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf die analytische Lösung mit Hilfe von Geradengleichungen. Dabei darf in der Lösungsdarstellung ohne Beweis als bekannt vorausgesetzt werden:

- Der (EUKLIDische) Abstand zweier Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ berechnet sich als $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
- Der Anstieg m_{AB} einer Geraden durch die Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ ist durch $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ gegeben (für $x_A = x_B$ ist die Gerade parallel zur y-Achse).
- Zwei Geraden mit den Anstiegen m_1 und m_2 stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$ erfüllt ist.
- Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ kann durch $y = m_{AB} \cdot (x - x_A) + y_A$ angegeben werden.
- Der Schnittpunkt von Geraden mit den Geradengleichungen $y = m_1 \cdot x + n_1$ bzw. $y = m_2 \cdot x + n_2$ ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems für den gemeinsamen Punkt (x_S, y_S) mit $x_S = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$ und $y_S = m_2 \cdot \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} + n_2$ (im Fall $m_1 = m_2$ sind die Geraden parallel und haben keinen Schnittpunkt).

Aufgabe 31.11 – MO641013. Wir betrachten Figuren, die durch die Koordinaten einiger ihrer Punkte und die zur jeweiligen Figur gehörenden Verbindungsstrecken gegeben sind.

a) $A(2,2), E(14,2), B(23,2), F(23,14), C(23,23), G(11,23), D(2,23), H(2,11)$ mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ und $\overline{HE}$. Zeigen Sie, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist und bestimmen Sie seine Seitenlänge.

b) $A(1,2), B(13,2), C(25,2), D(25,11)$ und $E(1,18)$ mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{BE}$ und $\overline{BD}$. Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BD}$ den Winkel $\sphericalangle EDC$ halbiert.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Wir ermitteln zunächst die Längen der Strecken $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{EH}$ über die Koordinaten der Eckpunkte:

$$|\overline{EF}|^2 = (14-23)^2 + (2-14)^2 = 9^2 + 12^2 = 225;\ \ |\overline{EF}| = 15.$$
$$|\overline{FG}|^2 = (23-11)^2 + (14-23)^2 = 12^2 + 9^2 = 225;\ \ |\overline{FG}| = 15.$$
$$|\overline{GH}|^2 = (11-2)^2 + (23-11)^2 = 9^2 + 12^2 = 225;\ \ |\overline{GH}| = 15.$$
$$|\overline{EH}|^2 = (14-2)^2 + (2-11)^2 = 12^2 + 9^2 = 225;\ \ |\overline{EH}| = 15.$$

Somit ist das Viereck $EFGH$ ein Rhombus mit vier gleichlangen Seiten. Nun ermitteln wir auch die Längen der Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$:

$$|\overline{EG}|^2 = (14-11)^2 + (2-23)^2 = 3^2 + 21^2 = 450;\ \ |\overline{EG}| = 15 \cdot \sqrt{2}.$$
$$|\overline{FH}|^2 = (23-2)^2 + (14-11)^2 = 21^2 + 3^2 = 450;\ \ |\overline{FH}| = 15 \cdot \sqrt{2}.$$

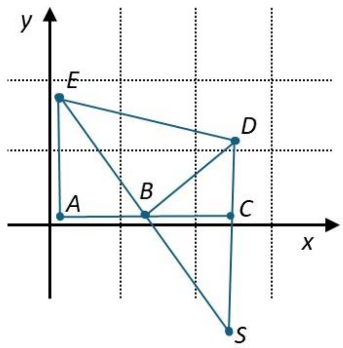
Somit sind beide Diagonalen gleich lang und der Rhombus ist ein Quadrat. Die Rechtwinkligkeit erkennen wir auch aus der Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS, denn es gilt mit obigen Ergebnissen:

$$|\overline{EF}|^2 + |\overline{FG}|^2 = 225 + 225 = 450 = |\overline{EG}|^2,$$
$$|\overline{FG}|^2 + |\overline{HG}|^2 = 225 + 225 = 450 = |\overline{FH}|^2,$$

also sind die Dreiecke ΔEFG und ΔFGH rechtwinklig mit den rechten Winkeln in F bzw. in G.

Alternativ können wir auch die Anstiege der Geraden durch E und F bzw. durch F und G ermitteln: $m_{EF} = \frac{2-14}{14-23} = \frac{12}{9}$ und $m_{FG} = \frac{14-23}{23-11} = -\frac{9}{12}$.

Wegen $m_{EF} \cdot m_{FG} = \frac{12}{9} \cdot \left(-\frac{9}{12}\right) = -1$ stehen die Geraden EF und GF im Punkt F senkrecht aufeinander. Ebenso finden wir $m_{GH} = \frac{23-11}{11-2} = \frac{12}{9}$. Deshalb ist auch $m_{FG} \cdot m_{GH} = -\frac{9}{12} \cdot \frac{12}{9} = -1$ und die Geraden FG und GH stehen im Punkt G senkrecht aufeinander.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die Geraden EB und CD können wir durch die Geradengleichung $y = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{58}{3}$ bzw. die Parallele zur y-Achse mit $x = 25$ beschreiben. Damit finden wir für die y-Koordinate ihres Schnittpunktes $y = -\frac{4}{3} \cdot 25 + \frac{58}{3} = 14$, die Geraden schneiden sich folglich im Punkt S$(25; -14)$, wobei B wegen $\frac{1+25}{2} = 13$ und $\frac{18-14}{2} = 2$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{ES}$ ist. Aus den Punktkoordinaten lassen sich die Längen der Strecken $|\overline{ED}|$ und $|\overline{DS}|$ berechnen:

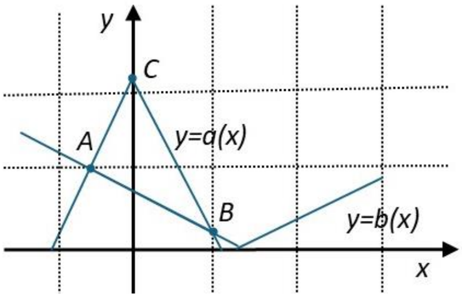
$$|\overline{ED}|^2 = (1-25)^2 + (18-11)^2 = 24^2 + 7^2 = 625;\ \ |\overline{ED}| = 25.$$
$$|\overline{DS}|^2 = (25-25)^2 + (11+14)^2 = 0^2 + 25^2 = 625;\ \ |\overline{DS}| = 25.$$

Das Dreieck ΔSDE ist also gleichschenklig. Die Seitenhalbierende $\overline{DB}$ ist damit gleichzeitig die Symmetrieachse dieses Dreiecks und damit auch Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Schenkeln ED und CD. ❑

Aufgabe 31.12 – KZM-5-1 (MO571014). Gegeben sind die beiden Funktonen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -2|x| + 11$ und $b(x) = \frac{1}{2}|x-7|$.

(a) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

(b) Der Punkt C sei der Schnittpunkt des Graphen der Funktion a mit der y–Achse. Beweisen Sie, dass der Punkt C und zwei der Schnittpunkte der Graphen von a und b ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.



Vorbemerkung: Die Formulierung der Aufgabenstellung mit Hinweis auf die Graphen der Funktionen inspiriert, die Funktionen in einem Koordinatensystem zu skizzieren und die Lösungsstrategie anschaulich zu erschließen.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Aus der grafischen Darstellung leiten wir ab, dass die Untersuchungen zur Teilaufgabe a) in drei Abschnitten erfolgen sollte:

(I) $x \leq 0$ und damit $x - 7 \leq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot (-x) + 11 = 2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(-(x-7)\big) = -\frac{1}{2} \cdot (x-7)$.

Aus $2x + 11 = -\frac{1}{2}(x-7)$ folgt $5 \cdot x = -15$, also $x = -3$ und somit $y = 5$.

(II) $x \geq 0$ und $x - 7 \leq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot x + 11 = -2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(-(x-7)\big) = -\frac{1}{2} \cdot (x-7)$.
Aus $-2x + 11 = -\frac{1}{2}(x-7)$ folgt $-3 \cdot x = -15$, also $x = 5$ und somit $y = 1$.

(III) $x \geq 7$ und damit $x - 7 \geq 0$ und auch $x \geq 0$ führt zu

$f(x) = -2 \cdot x + 11 = -2x + 11$; $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-7)$.
Aus $-2x + 11 = \frac{1}{2}(x-7)$ folgt $-5 \cdot x = 29$, also $x = \frac{29}{5}$, jedoch liegt $x < 6$ nicht im betrachteten Abschnitt, d.h. in diesem Abschnitt gibt es keine Schnittpunkte.

Die Schnittpunkte lauten also $A(-3; 5)$ und $B(5; 1)$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Punkt C hat die Koordinaten $(0; 11)$. Wir berechnen die drei Abstände zwischen den Punkten A, B und C:

$$|\overline{AB}|^2 = (-3-5)^2 + (5-1)^2 = 8^2 + 4^2 = 80$$
$$|\overline{BC}|^2 = (5-0)^2 + (1-11)^2 = 5^2 + 10^2 = 125$$
$$|\overline{AC}|^2 = (-3-0)^2 + (5-11)^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

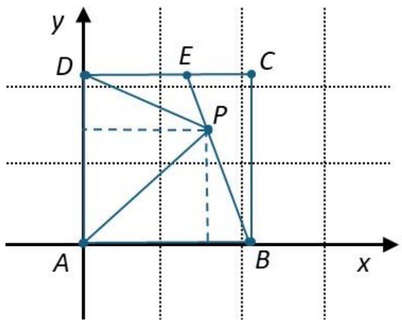
Offenbar gilt $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 80 + 45 = 125 = |\overline{BC}|^2$. Somit ist nach Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt A.

Alternativ können wir die Rechtwinkligkeit über die Anstiege der Punktverbindungen nachweisen. Laut Konstruktion liegen die Punkte A und C auf dem Teil der Funktion

a mit Anstieg $m_{AC} = 2$, die Punkte B und C auf dem Teil der Funktion a mit dem Anstieg $m_{BC} = -2$, und die Punkte A und B auf der Geraden mit dem Anstieg $m_{AB} = \frac{5-1}{-3-5} = -\frac{1}{2}$. Wegen $m_{AC} \cdot m_{AB} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ steht die Gerade durch A und C senkrecht auf der Geraden durch A und B. Somit ist das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt A. ❑

Aufgabe 31.13 – MO611023. In einem Koordinatensystem befindet sich ein Quadrat mit den Eckpunkten $A(0,0), B(12,0), C(12,12)$ und $D(0,12)$. Eine Gerade durch B schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in dem Punkt $E(7,12)$. Auf der Strecke $\overline{BE}$ befindet sich ein Punkt P.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade BE durch die Gleichung $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ beschreiben lässt.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE den Flächeninhalt 28 besitzt.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE gleichschenklig ist.



Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt der Nachweis, dass die Koordinaten von $B(12,0)$ und $E(7,12)$ die vorgegebene Geradengleichung erfüllen:

Es gilt sowohl $0 = -\frac{12}{5} \cdot 12 + \frac{144}{5}$

als auch $12 = -\frac{12}{5} \cdot 7 + \frac{144}{5}$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Der Inhalt des Dreiecks ΔAPD lässt sich direkt berechnen, wenn wir die Strecke $\overline{AD}$ als Grundseite mit der Länge 12 betrachten und die x-Koordinate von P als Maßzahl für die Höhe verwenden. Durch Einsetzen von $y = 4$ in $y = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$ erhalten wir $x = \frac{31}{3}$ und somit $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{31}{3} = 62$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Wegen des stumpfen Winkels bei E kann die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔDPE nur durch $|\overline{DE}| = |\overline{EP}| = 7$ erreicht werden. Nach dem Satz des PYTHAGORAS hat die Strecke $\overline{BE}$ die Länge $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ und somit die Strecke $\overline{BP}$ die Länge 13 − 7 = 6. Die y-Koordinate von P ergibt sich durch senkrechte Parallelprojektion von $\overline{BE}$ auf BC und ist deshalb nach Strahlensatz $\frac{6}{13}$ von 12, also $\frac{72}{13}$. Für die x-Koordinate von P gilt dann $\frac{72}{13} = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$, also $x = \frac{126}{13}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD beträgt nun $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{126}{13} = \frac{756}{13}$. ❑

Aufgabe 31.14 – MO591011. Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl. In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m \cdot (x - 5) + 2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B. Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.
b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB.
c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck ΔOAB in die Teildreiecke ΔOPB und ΔOAP. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.
d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl? (Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (so dass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Ein Punkt $P(x, y)$ liegt genau dann auf einer Geraden mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = m \cdot x + n$, wenn die Gleichung $y = m \cdot x + n$ erfüllt ist. Wegen $2 = m \cdot (5 - 5) + 2$ liegt also P auf jeder der Geraden.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Für $y = f(x) = -0.8 \cdot x + 2$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse durch Einsetzen $x = 0$ ermittelbar, nämlich $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = -0.8 \cdot x + 2$ ermittelt, also $B(10; 0)$. Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB gemäß der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke $A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10$.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Nun gelte $m = -0{,}3$. Wie in Teil a) ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der Punkt $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = -0.3 \cdot x + 2$ ermittelt, also $B\left(\frac{20}{3}; 0\right)$.

Für die Höhe im Teildreieck ΔOPB ermitteln wir den Schnittpunkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x) = \frac{2}{5} \cdot x$. Aus $-0.3 \cdot x + 2 = 0.4 \cdot x$ erhalten wir $x = \frac{20}{7}$ und folglich für die Höhe $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{8}{7}$. Schließlich finden wir $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{80}{21}$ und über die Differenz $A_{QAP} = A_{OAB} - A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 2 - \frac{80}{21} = \frac{140-80}{21} = \frac{20}{7}$. Somit gilt:

$$A_{OPB} : A_{OAP} = \frac{80}{21} : \frac{20}{7} = \frac{4}{3}\,.$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Es sei nun m beliebig. Wie in Teil a) ist der Schnittpunkt mit der y −Achse der Punkt $A(0; 2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = m \cdot x + 2$ ermittelt, also $B\left(-\frac{2}{m}; 0\right)$. Dieser Punkt existiert nur für $m \neq 0$. Damit das Dreieck ΔAOB durch die Gerade durch O und P geteilt wird, muss zudem $m < 0$ gelten.

Für die Höhe im Teildreieck ΔOPB ermitteln wir den Schnittpunkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x) = \frac{2}{5} \cdot x$. Aus $m \cdot x + 2 = 0.4 \cdot x$ erhalten wir $x = \frac{2}{0.4-m}$ und folglich für die Höhe $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{0.4-m} = \frac{4}{2-5\cdot m}$. Schließlich finden wir $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-m} \cdot \frac{4}{2-5\cdot m} = \frac{4}{m\cdot(5\cdot m-2)}$ und über die Differenz $A_{QAP} = A_{OAB} - A_{OPB}$

$$A_{QAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-m} \cdot 2 - \frac{4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} = \frac{2 \cdot (2 - 5m) - 4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} = \frac{10}{2 - 5 \cdot m}$$

Damit gilt:

$$A_{OPB} : A_{OAP} = \frac{4}{m \cdot (5 \cdot m - 2)} : \frac{10}{2 - 5m} = -\frac{2}{5 \cdot m}\,.$$

Dieses Verhältnis ist für jede rationale Zahl $m < 0$ wieder eine rationale Zahl. ❑

Hinweis: Setzen wir im Verhältnis in Teil d) den Wert $m = -0.3$ ein, erhalten wir $-\frac{2}{5\cdot(-0.3)} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$. Wir können also damit das Ergebnis aus Teil c) bestätigen.

Aufgabe 31.15 – MO570922. Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -4 \cdot |x - 4| + 8$ und $b(x) = -|x - 8| + 6$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen a und b in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
b) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle haben.
c) Ermitteln Sie für die Funktion b alle weiteren Nullstellen.
d) Ermitteln Sie reelle Zahlen p, q, r, für die die Funktion c mit der Gleichung $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ eine Nullstelle $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.
e) Ergänzen Sie im Koordinatensystem aus a) den Graphen der Funktion c.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Aufgrund der Aufgabenstellung genügt es, eine gemeinsame Nullstelle ohne Herleitung zu „erraten“ und die Übereinstimmung zu zeigen. Aus der Zeichnung zu Teil a) können wir $x = 2$ ablesen und bestätigen

$$a(2) = -4 \cdot |2-4| + 8 = 0 \text{ und } b(2) = -|2-8| + 6 = 0$$

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Es gilt $b(x) = 0$ genau dann, wenn $|x-8| = 6$ ist, also für $x - 8 = 6$ oder für $x - 8 = -6$. Der zweite Fall führt zu der bereits bekannten Nullstelle $x = 2$, der erste Fall führt zu $x = 14$.

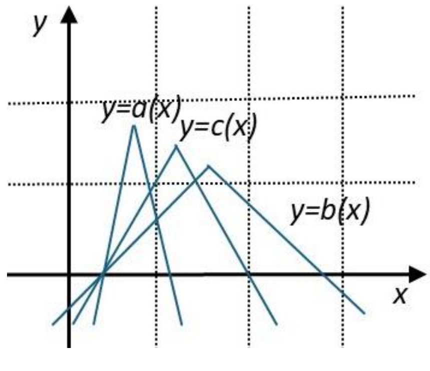
Lösungshinweise zur Teilaufgabe d): Solche reellen Zahlen sind $p = -\frac{7}{4}$, $q = 6$ und $r = 7$, denn für $c(x)$ ergibt sich:

$$c(2) = -\frac{7}{4} \cdot |2-6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 4 + 7 = 0$$
$$c(6) = -\frac{7}{4} \cdot |6-6| + 7 = -\frac{7}{4} \cdot 0 + 7 = 7$$
$$c(x) = -\frac{7}{4} \cdot |x-6| + 7 \le 7$$

Anmerkung: Aufgrund der Aufgabenformulierung ist keine Herleitung des Ergebnisses gefordert. Wir können die Parameter – z.B. anhand einer Skizze im Koordinatensystem – erraten bzw. anhand einer Skizze schätzen. Eine rechnerische Probe ist jedoch erforderlich! Eine Herleitung könnte so geführt werden:

Wäre $p = 0$, so wäre $c(x)$ konstant, was nicht sein kann, da c unter anderem die Werte 0 und 7 annimmt. Damit c einen größten Wert annehmen kann, muss $p < 0$ gelten (da sonst c beliebig große Werte annimmt); den größten Wert nimmt c dann für $x = q$ an, und zwar ist der Wert dort gleich r. Wir erhalten also direkt $q = 6$ und $r = 7$. Wegen $c(2) = 0$ folgt $p \cdot |2-6| + 7 = 0$ und somit $p = -\frac{7}{4}$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Betragsfunktion muss die zweite Nullstelle bei $x = 10$ liegen. Die Lösung ergibt sich daher wegen $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ aus folgendem Gleichungssystem:

$$c(2) = 0 = p \cdot |2-q| + r\,, \quad (1)$$
$$c(6) = 7 = p \cdot |6-q| + r\,, \quad (2)$$
$$c(10) = 0 = p \cdot |10-q| + r, \quad (3)$$



Gleichsetzen von (1) und (3) ergibt $p \cdot |2-q| + r = p \cdot |10-q| + r$. Nach Subtraktion von r auf beiden Seiten erhalten wir $p \cdot |2-q| = p \cdot |10-q|$ und nach Division durch p (p muss ungleich null sein, da $c(x)$ sonst eine konstante Funktion wäre) folgt $|2-q| = |10-q|$. q hat also von 10 und 2 den gleichen Abstand, liegt also in der Mitte und es folgt $q = 6$. Einsetzen in (2) ergibt $7 = p \cdot |6-6| + r$ und damit $r = 7$. Anschließendes Einsetzen in (3) führt zu $0 = p \cdot |4| + 7$ und damit zu $p = -\frac{7}{4}$.

Aufgabe 31.16 – MO570946. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(a+2)\cdot x + (a+3)\cdot y = a+3\,,$$
$$(a+7)\cdot x + (11-a)\cdot y = a + 13$$

in den reellen Variablen a, x und y.

(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung (x, y) hat.

(b) Bestimmen Sie die Menge M aller Paare (x, y) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat.
Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Lösungshinweise: Wir beginnen mit einer Vorüberlegung zum Gleichungssystem. Angenommen, das Tripel (a, x, y) ist eine Lösung des Gleichungssystems.

Multiplikation der ersten Gleichung mit $(11-a)$, der zweiten Gleichung mit $(a+3)$ und anschließende Subtraktion führt zu

$$((11-a)(a+2)-(a+3)(a+7))\cdot x \;=\; (11-a)(a+3)-(a+3)(a+13)$$

was vereinfacht werden kann zu $(-2\cdot a^2 - a + 1)\cdot x = (a+3)\cdot(a+13)$. Weitere Faktorisierung führt schließlich auf die Gleichung

$$(2a-1)\cdot(a+1)\cdot x = (a+3)\cdot(a+13)$$

Analog führt Multiplikation der ersten Gleichung mit $(a+7)$, der zweiten Gleichung mit $(a+2)$ und anschließende Subtraktion zu

$$((a+7)(a+3)-(a+2)(11-a))\cdot y = (a+7)(a+3)-(a+2)(a+13)$$

nach Vereinfachung zu $(2a^2 + a - 1)\cdot y = -5a - 5$, was weiter in Faktoren

$$(2a-1)\cdot(a+1)\cdot y = -5\cdot(a+1)$$

zerlegt werden kann.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Angenommen, a ist weder gleich -1 noch gleich $\frac{1}{2}$. Dann erhalten wir direkt

$$x = \frac{2\cdot(a+3)}{2a-1} \quad , y = \frac{-5}{2a-1}\ .$$

Diese Ergebnisse sind zunächst eine notwendige Bedingung für eine Lösung. Es bleibt zu prüfen, dass es auch eine hinreichende Bedingung ist. Die folgende Probe bestätigt, dass dieses Tripel (a, x, y) tatsächlich das Gleichungssystem löst:

$$(a+2)\cdot x+(a+3)\cdot y=\frac{2\cdot(a+3)\cdot(a+2)-5\cdot(a+3)}{2a-1}=a+3$$
$$(a+7)\cdot x+(11-a)\cdot y=\frac{2\cdot(a+7)\cdot(a+3)-5\cdot(11-a)}{2a-1}=a+13$$

Für jedes a mit $a \neq -1$ und $a \neq \frac{1}{2}$ hat das Gleichungssystem also genau eine Lösung (x, y). Das oben angegebene Paar (x, y) ist auch für $a = -1$ definiert und eine Lösung des Gleichungssystems. Für $a = \frac{1}{2}$ steht auf der linken Seite der Gleichung null, auf der rechten Seite jedoch nicht. In diesem Fall hat das Gleichungssystem also keine Lösung (x, y).

Das Gleichungssystem hat also für jedes $a \neq \frac{1}{2}$ mindestens eine Lösung (x, y), für $a = \frac{1}{2}$ gibt es hingegen keine Lösung.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Die gesuchte Menge M ist die Vereinigung der beiden Mengen

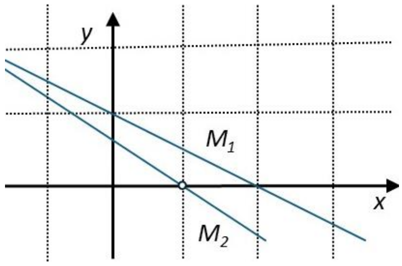
$$M_1=\{(x,y)\mid \mathrm{x}+2\mathrm{y}=2\}$$
$$M_2=\left\{(x,y)\mid (x,y)=\left(\frac{2(a+3)}{2a-1},\frac{-5}{2a-1}\right)\ \text{ für ein reelles } a\neq\frac{1}{2}\right\}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Überlegungen in Teil a), mit denen wir bewiesen haben, dass M_1 die Lösungen für $a = -1$ und M_2 die Lösungen für $a \neq \frac{1}{2}$ sind.

Die Menge M_1 beschreibt die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Um die Gestalt der Menge M_2 zu bestimmen, führen wir nacheinander die Ersetzungen $a = \frac{t+1}{2}$ und $t = \frac{1}{r}, r = \frac{x-1}{7}$ durch, um die Beschreibung der Menge M_2 zu vereinfachen:

$$M_2=\left\{(x,y)\mid (x,y)=\left(\frac{t+7}{t},\frac{-5}{t}\right)\ \text{ für ein reelles } t\neq 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\mid (x,y)=\left(1+\frac{7}{t},\frac{-5}{t}\right)\ \text{ für ein reelles } t\neq 0\right\}$$
$$=\{(x,y)\mid (x,y)=(1+7r,-5r)\ \text{ für ein reelles } r\neq 0\}$$
$$=\left\{(x,y)\mid (x,y)=\left(x,\frac{-5}{7}\cdot(x-1)\right)\ \text{ für ein reelles } x\neq 0\right\}$$



Die Menge M_2 beschreibt also die Gerade mit der Steigung $-\frac{5}{7}$, welche durch den Punkt (1, 0) verläuft, abzüglich dieses Punktes selbst. ❑

Aufgabe 31.16 – MO240932. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Lösungshinweise: Die zu g parallelen Geraden haben den gleichen Anstieg wie g, also -1. Darüber hinaus stehen die Berührungsradien senkrecht auf den Tangenten, haben also den Anstieg 1 und verlaufen durch den Mittelpunkt des Kreises, besitzen also die Gleichung $y_r = x$, sodass sich die Berührungspunkte an den Koordinaten $(1,1)$ bzw. $(-1,-1)$ befinden. (Wir rechnen leicht nach, dass diese den Abstand $\sqrt{2}$ vom Kreismittelpunkt, also dem Koordinatenursprung, besitzen und damit auf k liegen.)

Damit haben die beiden Tangenten die Gleichungen

$$y_{t1} = -(x-1) + 1 = -x + 2 \text{ und } y_{t2} = -(x+1) - 1 = -x - 2.$$ ❑

Aufgabe 31.17 – MO081034. Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0;\ 8)$.

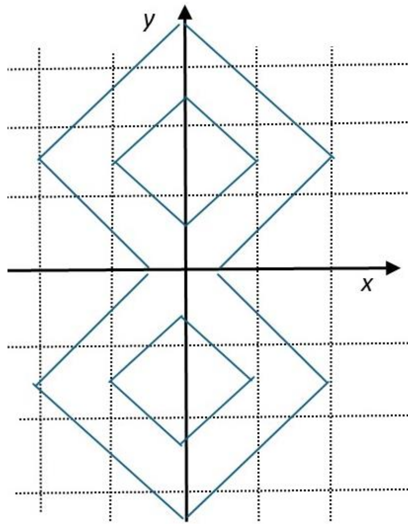
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Lösungshinweise: Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2 \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - 4q}$. Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2 - 4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt. Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p,q) = (-9,8)$ oder $(p,q) = (9,8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse. ❑

Aufgabe 31.18 – MO131045. Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$\Big||x| + \big||y| - 3\big| - 3\Big| = 1.$$

Lösungshinweise: Zunächst stellen wir fest, dass $f(x,y) = f(-x,y)$ und $f(x,y) = f(x,-y)$, es liegt also eine Symmetrie zur x-Achse und zur y-Achse vor. Wir können uns also auf den ersten Quadranten beschränken. Es gilt dann $x, y > 0$ und die Gleichung geht über in $|x + |y - 3| - 3| = 1$.



Sei nun $0 < y < 3$. Wir erhalten $|x - y + 3 - 3| = |x - y| = 1$. Für $x > y$ erhalten wir dann $y = x - 1$ und für $y > x$ folgt $y = x + 1$.

Sei nun $y \geq 3$. Dann geht unsere Gleichung über in $|x + y - 6| = 1$. Für $x + y < 6$ erhalten wir $y = -x + 5$ und für $x + y \geq 6$ folgt $y = 7 - x$.

Zeichnen wir die 4 Geraden und spiegeln diese, so erhalten wir also nebenstehendes Bild.

Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat

In der **KZM-Aufgabe A-4-5A** sind n Punkte $(n > 1)$ so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Eine Verteilung, die den maximal möglichen Mindestabstand realisiert, nennen wir im Weiteren „beste Verteilung".

Für $\boldsymbol{n = 2}$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und wir finden eine beste Verteilung, indem wir die zwei Punkte in gegenüberliegende Eckpunkte platzieren. Der Abstand $d_2 = \sqrt{2}$ kann von keiner Konfiguration übertroffen werden, da die Diagonale eines Quadrates die längste Strecke innerhalb des Quadrates ist. Diese intuitiv anschauliche Lösung basiert auch auf dem

Hilfssatz. Bei einer Verteilung von zwei und mehr Punkten mit maximalem Mindestabstand in einem Quadrat befindet sich auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt[3].

Lösungshinweise: Wir nehmen an, wir haben im Quadrat $ABCD$ eine Verteilung gefunden, bei der auf der Seite $\overline{AB}$ kein Punkt platziert ist. Dann gibt es (mindestens) einen Punkt X dieser Verteilung mit minimalem Abstand zur Seite $\overline{AB}$. Wir fällen das Lot von diesem Punkt X auf $\overline{AB}$ und verschieben den Punkt entlang dieses Lotes, bis

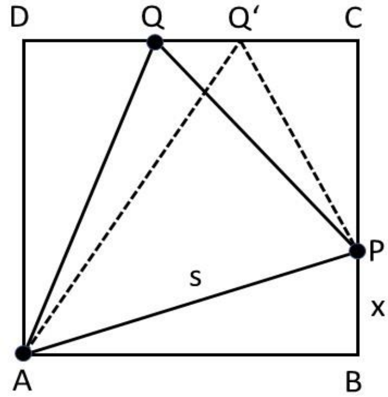
[3] Ein Punkt auf einem Eckpunkt des Quadrates gilt als zugehörig zu den beiden anliegenden Quadratseiten.

er $\overline{AB}$ erreicht. Bei dieser neuen Verteilung ist der Mindestabstand nicht kleiner als vor der Verschiebung:

- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X nicht enthält, bleibt bei dieser Verschiebung unverändert.
- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X enthält, vergrößert sich bei dieser Verschiebung.

Dieses Verfahren wiederholen wir mit den anderen Quadratseiten. ❑

Mit dem Hilfssatz kann die beste Verteilung von zwei Punkten formal begründet werden.



$\boldsymbol{n = 3}$. Wir erhalten aus dem Hilfssatz für eine beste Verteilung von drei Punkten die Aussage, dass ein Punkt in einer Quadratecke platziert werden muss und sich die beiden anderen Punkte auf den gegenüberliegenden benachbarten Quadratseiten befinden. Die drei Punkte der gesuchten Verteilung bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks ΔAPQ mit $|\overline{AQ}| = |\overline{PQ}|$. Betrachten wir nämlich ein Dreieck $\Delta APQ‘$ mit $\left|\overline{AQ‘}\right| > \left|\overline{PQ‘}\right|$ und verschieben wir den Punkt $Q‘$ in Richtung des Eckpunktes D, so vergrößert sich die Streckenlänge $\overline{PQ'}$, während sich gleichzeitig die Streckenlänge $\overline{AQ'}$ verringert. Solange bei dieser Verschiebung $\left|\overline{AQ‘}\right| > \left|\overline{PQ‘}\right|$ gilt, hat sich der Mindestabstand nicht verkleinert (denn entweder realisierte die Verbindungsstrecke $\overline{PQ'}$ den Mindestabstand, dann wird dieser bei der Verschiebung größer, oder $\overline{AP}$ realisierte den Mindestabstand, dann bleibt dieser bei der Verschiebung unverändert). Da wir aber in gleicher Weise argumentieren können, dass im Dreieck ΔAPQ auch $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$ gelten wird, ist das gesuchte Dreieck sogar gleichseitig.

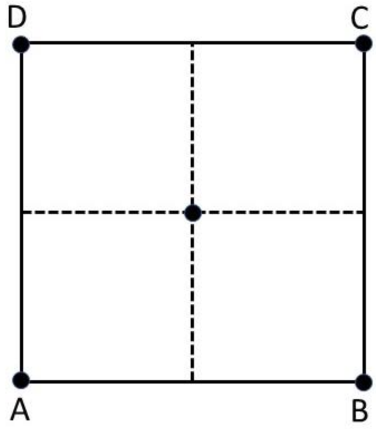
Wir können für die Seitenlänge d_3 des gleichseitigen Dreiecks ΔAPQ durch zweimalige Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS (im Dreieck ΔABP mit Hypotenuse $\overline{AP}$ bzw. im Dreieck ΔPCQ mit Hypotenuse $\overline{PQ}$) den Betrag der Strecke $x = |\overline{BP}|$ aus der Gleichung $x^2 + 1 = {d_3}^2 = 2 \cdot (1-x)^2$ berechnen. Wir erhalten daraus die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ und finden mit der Lösungsformel $x = 2 - \sqrt{3}$ (die zweite Lösung entfällt wegen $x > 1$). Setzen wir diesen Wert für x in $x^2 + 1 = s^2$ ein, erhalten wir

$$d_3 = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035.$$

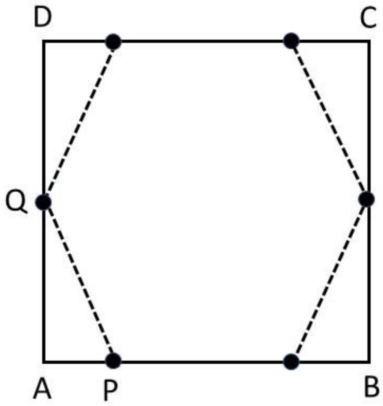
$\boldsymbol{n = 4}$. Bei einer besten Verteilung von vier Punkten befinden sich aufgrund der Aussage des Hilfssatzes mindestens zwei Punkte in den Eckpunkten des Quadrates.

Damit finden wir unmittelbar, dass alle Punkte dieser Verteilung Eckpunkte des Quadrates sind und somit $d_4 = 1$ gilt.

$\boldsymbol{n = 5}$. Die vier Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine beste Verteilung für 5 Punkte. Zum Beweis unterteilen wir das Quadrat in vier kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 Punkten befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Die beschriebene Verteilung von 5 Punkten realisiert damit den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

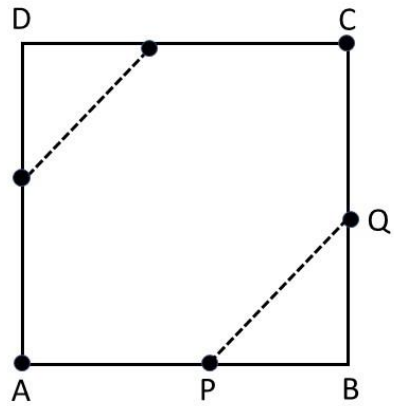


$\boldsymbol{n = 6}$. Es gibt verschiedene Verteilungen von 6 Punkten, die einen großen Mindestabstand haben. Wir können beispielsweise die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat so wie in nebenstehender Abbildung legen, dass alle Seitenlängen gleich lang sind. (*Hinweis:* Dieses Sechseck ist nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kleiner als die beiden anderen Diagonalen.) Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck ΔAPQ mit der Hypotenuse $d_6 = |\overline{PQ}|$ und wenden den Satz des PYTHAGORAS an, so erhalten wir $|\overline{AP}| = \sqrt{d_6^2 - |\overline{AQ}|^2} = \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}}$. So können wir aus $2 \cdot \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}} + d_6 = 1$ die quadratische Gleichung $d_6^2 + \frac{2}{3} \cdot d_6 - 2 = 0$ herleiten und finden mit der Lösungsformel $d_6 = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{7} - 1\right) \approx 0.549$.

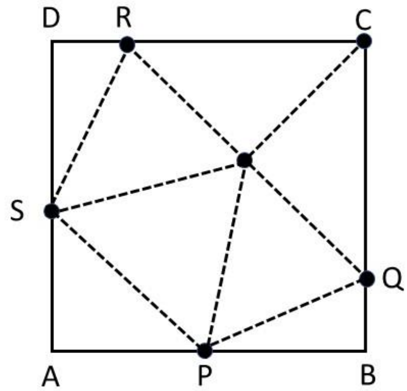


Platzieren wir die 6 Punkte so wie in nebenstehender Abbildung, wobei alle Seiten des Sechsecks gleichlang sind (*Hinweis:* Auch dieses Sechseck ist nicht regelmäßig), so finden wir, dass in diesem Fall wegen $|\overline{PB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6$ (als Kathete im gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck ΔBQP mit der Hypotenuse $\overline{PQ}$) gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585.$$

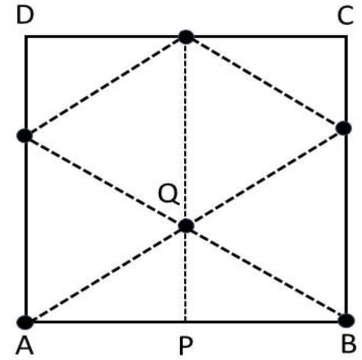


Für die nebenstehende Verteilung seien alle eingezeichneten Punktverbindungen gleichlang. Das Dreieck ΔCRQ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{RQ}$ mit $|\overline{RQ}| = 2 \cdot d_6$ und daraus folgend $|\overline{QC}| = \sqrt{2} \cdot d_6$. Auch das Dreieck ΔAPS ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{PS}$ mit $|\overline{PS}| = d_6$, woraus $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6$ folgt. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck ΔPBQ an, so finden wir für diese Verteilung den Mindestabstand von $d_6 = \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0.597$ aus



$$\sqrt{2} \cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6\right)^2} = 1$$

Der maximale Mindestabstand wird für die nebenstehende Verteilung erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ΔAPQ mit den Kathetenlängen $\left|\overline{AP}\right| = \frac{1}{2}$ und $|\overline{PQ}| = \frac{1}{3}$, also



$$\left(\overline{AQ}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{13} \approx 0.601.$$

Diese Verteilung hat eine alltägliche Realisierung: Wenn 5 einander fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa in der Verteilung für $n = 5$ aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten (in der Abbildung nach unten) und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte (in der Abbildung in der Mitte von von $\overline{CD}$) stehen.

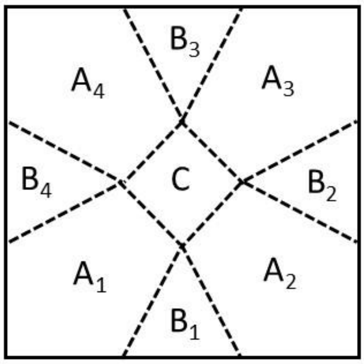
Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation *„ausgehend von einer (scheinbar) besten Verteilung verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn wir Punkte verschieben“* nicht ausreicht. Vermuten wir nämlich, dass die beste Verteilung eingenommen wird, wenn die Punkte ein konvexes Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn wir die Lage der Punkte nur wenig „stören“. Verändern wir aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

Beweise zum Fall mit sechs Punkten wurden erst in den 1960-er Jahren veröffentlicht. Ein erster Beweis wird RONALD LEWIS GRAHAM (1935 – 2020, US-amerikanischer Mathematiker) zugeschrieben. Wir skizzieren hier einen Beweis von HANS MELISSEN[4] (geb. 1949).

[4] Melissen, Hans. Densest Packing of Six Equal Circles in a Square. In: Elemente der Mathematik, Jahrgang 49 (1994), S. 27-31.

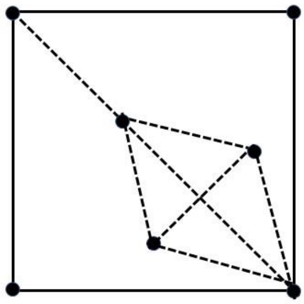
Er konstruierte eine Hilfsfigur, indem er die Quadratseiten jeweils in drei Strecken teilte und die langen Diagonalen der Gebiete $A_1, \dots, A_4$ der Länge d_6 aus der obigen, vermutlich besten Verteilung entsprechen. An dieser Figur führt er die Annahme, dass es eine Verteilung mit größerem Mindestabstand gäbe, zum Widerspruch.

Zunächst stellte er fest: Liegen drei Punkte in den benachbarten Gebieten der Form ABA, so ist deren Mindestabstand nicht größer als d_6.



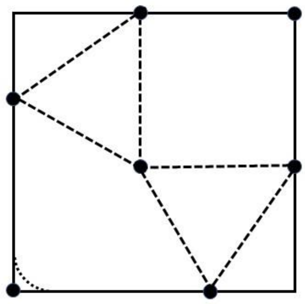
Nun untersuchte er den Fall, dass kein Punkt der Verteilung im Gebiet C liegt. Liegen in drei oder vier Gebieten der Form A jeweils ein Punkt, kann alles mit Situationen der Form ABA erklärt werden und der Mindestabstand ist nicht größer als d_6. Liegen jedoch nur in zwei Gebieten der Form A Punkte, müssen in jedem Gebiet der Form B jeweils ein Punkt enthalten sein. Nun lässt sich zeigen, dass dann der Abstand zweier Punkte in benachbarten Gebieten der Form B nicht größer als d_6 sein kann.

Abschließend untersuchte er den Fall, dass genau ein Punkt im Gebiet C liegt. Entweder gibt es für die anderen fünf Punkte wieder die Situationen ABA, oder die Punkte liegen beispielsweise[5] in A_2, A_3, A_4, B_1, B_4. Doch bei einer solchen Aufteilung zeigte er rechnerisch durch Abschätzungen, dass der Mindestabstand den Wert d_6 nicht übertreffen kann.



Für $\boldsymbol{n = 7, 8, 9}$ fand Jonathan Schaer beste Verteilungen mit maximalem Mindestabstand.

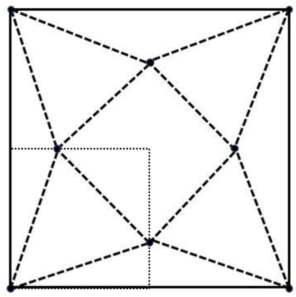
Wählen wir eine Verteilung von $\boldsymbol{n = 7}$ Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden, erreichen wir nicht den maximal möglichen Mindestabstand!



Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Verteilung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:

$$d_7 = 2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 0.536.$$

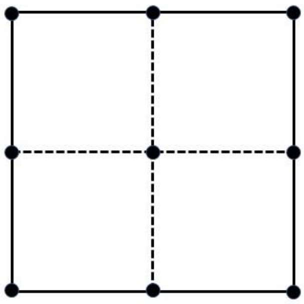
[5] Andere Indizes können durch Umbenennung aus dieser Situation gewonnen werden.



Eine vermutlich beste Anordnung für $\boldsymbol{n} = \mathbf{8}$ Punkte finden wir durch Probieren, wenn wir 4 Punkte in die Quadratecken legen und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren anordnen. Wir erkennen die Verteilungsstruktur des Falls $n = 3$ wieder. Es ergibt sich deshalb ein Mindestabstand von

$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot d_3 \approx 0.518\,,$$

der auch tatsächlich als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Jedoch erweist sich der Beweis[6] als vergleichbar aufwändig wie im Fall $n = 6$. Es ist jedoch nicht verallgemeinerungsfähig, dass durch Zusammensetzung verkleinerter bester Verteilungen mit weniger Punkten wieder eine beste Verteilung mit maximalem Mindestabstand erreicht werden kann.



Schließlich[7] betrachten wir $\boldsymbol{n} = \mathbf{9}$. Teilen wir das Quadrat in vier gleichgroße Teilquadrate, wissen wir mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass in (mindestens) einem dieser Teilquadrat drei Punkte liegen. Mit dem Ergebnis für $n = 3$ folgt daraus, dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{1}{2}d_3$ sein kann. Dies kann aber nicht der größte Mindestabstand sein, weil in der Anordnung für acht Punkte kein weiterer Punkt eingefügt werden kann. J. SCHAER wies nach, dass $d_9 = 0.5$ der größte Mindestabstand ist und bei der Anordnung im 3×3-Gitter realisiert wird.

Unter http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html hat ECKARD SPECHT (Universität Magdeburg) die besten Verteilungen für $n = 1, \ldots, 10000$ beschrieben, illustriert und mit Literaturhinweisen untersetzt.

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Das Online-Seminar „Spotlight Mathe - Einblicke in den Bundeswettbewerb Mathematik“ am 26. März 2025 vermittelte mathematische Grundlagen und Problemlösestrategien, die sowohl im Unterricht als auch vor allem bei der Wettbewerbsteilnahme unterstützen und motivieren können. PATRICK BAUERMANN (Projektleiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe, Bildung & Begabung gGmbH Bonn) hatte dazu StD Dr. ROBERT STRICH (Vorsitzender des Aufgabenausschusses), BEN ROHLFS (Mitglied Korrekturkommission) sowie drei Teilnehmerinnen der 1. Runde ins Studio eingeladen. Anhand der Aufgaben der ersten Runde 2025 teilten sie ihre

[6] Schaer J. and Meir A. On a geometric extremum problem. In: Can. Math. Bull. 8 (1965), 21-27.

[7] Schaer, J. The Densest Packing of 9 Circles in a Square. In: Can. Math. Bull. vol. 8 (1965), p. 273-277.

Perspektiven auf die Genese einer Lösung, die mathematischen Hintergründe sowie die Korrektur. Dabei gaben sie Einblicke, wie Jugendliche mit Begeisterung und Erfolg am Wettbewerb teilnehmen können und wie Lehrkräfte ihre Schülerinnen und Schüler auf die Teilnahme vorbereiten können. So berichteten die Schülerinnen, wie sie sich in ihrer Gruppenarbeit die Lösung der Aufgabe 4 erarbeiteten: Von Spezialfällen mit geringer Dimension fanden sie zur Methode der gespiegelten Zug-Antwort. Dr. ROBERT STRICH gab Einblicke in die Aufgabenfindung bei Aufgabe 1 und ging auf die Lösungsfindung ein. Ausführlich diskutierte BEN ROHLFS einen Lösungsansatz zur Aufgabe 2: Der Zusammenhang der letzten von null verschiedenen Ziffer eines Produktes zu den letzten von null verschiedenen Ziffern ihrer Faktoren lieferte einen Schlüssel zur Lösung.

Wie schon im vergangenem online-Seminar wurde erneut die Rolle der Künstlichen Intelligenz im Hausaufgabenwettbewerb diskutiert. Bezüglich der bisherigen Selbstständigkeitsverpflichtung hat sich eigentlich nichts geändert: „Die Verpflichtung zur Selbstständigkeit gilt schon für die Phase der Lösungsfindung und nicht erst für die endgültige Formulierung. Diskussionen von Lösungswegen, insbesondere im Internet, sind nicht zulässig. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen die Selbstständigkeitsverpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.“ Die Aufgabenkommission wird die KI-Lösungen deshalb intensiv erproben.

Mit zwischenzeitlich 170 Zuschauer fand das Seminar große Resonanz. Die nächsten Spotlight-Seminare werden im September zur Mathematik-Olympiade und zur 2. Runde des Bundeswettbewerbs angeboten.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Mathematische Aufgaben[8]
zum Gebrauch in den
obersten Classen höherer Lehranstalten.

Aus den bei Abiturienten-Prüfungen
an preußischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben, aufgewählt von und
mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint von

H.C.E. Martus
Oberlehrer an der Königlichen Realschule in Berlin

Greifswald, 1865[9]

[8] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[9] Digitalisiert zugänglich in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen unter https://www.sub.uni-goettingen.de/sub-aktuell/ , Suchbegriff „Martus Aufgaben“, zitiert am 05.04.2025.

Vorrede.

Bei der schriftlichen Prüfung der Abiturienten an preußischen Gymnasien und Realschulen werden vier Aufgaben aus den verschiedenen, in den Kreis des Schulunterrichts fallenden Theilen der Mathematik gestellt. Zur Anfertigung dieser Arbeit sind den Examinanden mit Einschluß der Reinschrift fünf Vormittagsstunden zugestanden.

Bei der Auswahl der Aufgaben achtet der Lehrer mit größter Sorgfalt darauf, ob die Aufgabe bei ihrer Behandlung dem Abiturienten Gelegenheit giebt, von den in den verschiedenen Gebieten erworbenen Kenntnissen Gebrauch zu machen; ferner, ob der Wortlaut der Aufgabe so klar gefasst ist, daß die Schüler das Geforderte ohne tiefe Ueberlegung erkennen; besonders aber, ob die Aufgabe zu ihrer Lösung nicht eines ungewöhnlichen Kunstgriffe bedarf; ob sie vielmehr sich dennoch elegant und, wenn irgend möglich, auf mehreren Wegen auflösen lasse; und endlich, ob die vollständige Entwicklung aller vier Aufgaben bei dem von den Abiturienten zu fordernden Maße von Geläufigkeit im Rechnen und Darstellen in der vorgeschriebenen Arbeitszeit wirklich geliefert werden könne. Kommt hinzu, daß das Resultat der Auflösung ein einfaches ist, so daß sich etwa ganze, ja abgerundete Zahlen ergeben[10], oder daß die Wurzeln aufgehen: so ist die Aufgabe besonders geeignet, weil es dem unter dem Drucke des Examens Arbeitenden bei solchen Eintreffen sehr wahrscheinlich wird, daß seine Auflösung richtig sei, und er dadurch die Sicherheit gewinnt, getrost weiterarbeiten zu können.

...

S. 85

D.

Coordinaten-Geometrie

(„Analytische Geometrie“)

1. Gerade Linie

676. Wenn man von einem Dreieck die Grundlinie und die Lage seines Schwerpunktes über derselben kennt, wie construirt man geometrisch das ganze Dreieck? Und wie ist dasselbe vollständig zu berechnen, wenn die Grundline $AB = g$ die Abscissenaxe, A der Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und die Coordinatenbestimmung des Schwerpunktes $x = \alpha$ und $y = \beta$ ist?
Ausführung für den Fall $g = 9$; $a = 5{,}3$ ß $= 2.1$

677. Für rechtwinkelige Coordinatenaxen ist die Gleichung einer Geraden, welche die Axen in A und B schneidet, durch den Abstand p derselben vom Anfangspunkte der Coordinaten und durch den Winkel α gegeben, den dieser Abstand mit der X-Axe bildet; ebenso sind die Coordinaten (a, b) eines Punktes C außerhalb AB bekannt. Es werden die drei Seiten, die Fläche und die Höhe auf C in dem Dreiecke ABC gesucht.
Beispiel: $\alpha = 60°, p = 3“, a = 7“, b = 10“$.

678. Welchen Winkel bilden die beiden geraden Linien, deren Gleichungen $y = 5x + 6$ und $2y = 3x + 7$ sind, miteinander, und wie groß sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes?

679. Durch einen Punkt, der durch die rechtwinkeligen Coordinaten $x = 5, y = 7$ bestimmt ist, geht eine Linie, welche die Abscissenlinie unter einem Winkel von $40°$

[10] Im Resultate-Teil werden Längen mit sieben Stellen nach dem Komma und Winkel mit hundertstel Sekunden angegeben.

durchschneidet; man soll die Gleichung einer Linie finden, die auf dieser in dem gegebenen Punkte senkrecht steht.

680. Analytisch zu beweisen, daß der geometrische Ort aller Punkte, für welche der Unterschied der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten constant ist, eine auf der Verbindungslinie der Punkte stehende Senkrechte ist.

681. Innerhalb eines Winkels ist ein veränderlicher Punkt P gegeben. Auf welchem geometrischen Ort liegt derselbe, wenn die Summe der von P auf die Schenkel gefällten Perpendikel gleich einer constanten Größe s ist?

Monatsaufgabe 04/2025[11]

Wir betrachten die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c. Zeige:

a) Für $n = 2017$ gibt es keine Lösungen (a, b, c).
b) Für $n = 2016$ muss in jeder Lösung (a, b, c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.
c) Für $n = 2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a, b, c).

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 02/2025

Aufgabe T-3 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Es sitzen 2024 Mathematigerinnen in einer Reihe am Ufer des Flusses Tisza. Jede von ihnen arbeitet an genau einem Forschungsthema. Falls zwei Mathematigerinnen am selben Thema arbeiten, arbeiten auch alle Mathematigerinnen, die zwischen ihnen sitzen, an diesem Thema.

Marvin versucht, für jedes Paar von Mathematigerinnen herauszufinden, ob sie am selben Forschungsthema arbeiten. Er darf dafür jeder Mathematigerin die folgende Frage stellen: „Wie viele von diesen 2024 Mathematigerinnen arbeiten an deinem Forschungsthema?“ Er stellt diese Fragen nacheinander. Er kennt also alle bisherigen Antworten, bevor er die nächste Frage stellt.

Bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, sodass Marvin sein Ziel stets mit höchstens k Fragen erreichen kann.

Lösungshinweise: Wir betrachten allgemein n Mathematigerinnen[12]. Indem Marvin die links stehenden $n-1$ Mathematigerinnen befragt, kann er die Arbeitsgruppen von links nach rechts bestimmen. Insbesondere weiß er nach der Frage an die vorletzte Mathematigerin, ob die letzte Mathematigerin ein eigenes Thema oder das Thema ihrer linken Nachbarin bearbeitet. Folglich ist $k \leq n-1$.

---

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.05.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[12] Die Verallgemeinerung der Anzahl eröffnet die Möglichkeit, anhand kleiner n Lösungsstrategien zu erproben.

Jedoch können $n-2$ Fragen möglicherweise nicht ausreichen. Nehmen wir an, x_i sei die Antwort der i-ten Mathematigerin. Es ist leicht zu sehen, dass $x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1}$ die Anzahl der verschiedenen Themen und insbesondere eine ganze Zahl ist: Bearbeiten k Mathematigerinnen das gleiche Thema, so gibt es k Antworten mit dem Wert k und folglich ergibt die Summe von k reziproken Antworten $\frac{1}{k}$ den Wert 1.

Verfolgen wir die Strategie von oben, so kann es eine Verteilung geben, dass bereits die Summe $x_1^{-1}+\cdots+x_{n-2}^{-1}$ ganzzahlig ist (zum Beispiel für $x_i=1$ für alle $i=1,..,n-2$). Tritt dieser Fall ein, kann nicht entschieden werden, ob die verbleibenden zwei Mathematigerinnen das gleiche oder unterschiedliche Themen bearbeiten. Es ist also eine weitere Frage erforderlich. Diese Situation tritt auch ein, wenn von rechts beginnend noch die Antworten x_1 und x_2 ausstehen.

Wir untersuchen nun eine allgemeine Reihenfolge der Fragen. Wir bezeichnen mit a und b den kleinsten bzw. größten Index, so dass die a-te und b-te Mathematigerin noch nicht von Marvin gefragt wurde. Für jedes Zahlenpaar (a,b) konstruieren wir eine Verteilung, bei der $n-2$ Fragen nicht ausreichen: Wir nehmen an, dass die Verteilung so sei, dass nach jeder Frage die Summen $x_1^{-1}+\cdots+x_{a-1}^{-1}$ und $x_{b+1}^{-1}+\cdots+x_n^{-1}$ ganzzahlig sind (mit $a>1$ und $b<n$ ist dies möglich für $x_i=1$ für $i=1,\ldots,a-1,b+1,\ldots,n$, für $a=1$ bzw. $b=n$ ist die betreffende Summe leer), und dass für alle Werte x_i mit $a<i<b$, die bereits gefragt wurden, $x_i=2$ gelte.

Wir stellen fest, dass für einen Wert $x_i=2$ ohne weitere Fragen noch keine Entscheidung über das Thema der Nachbarinnen der i-ten Mathematigerin möglich ist, denn es könnte sowohl die linke als auch die rechte Nachbarin das gleiche Thema wie die i-te Mathematigerin bearbeiten. Aber auch für $x_i=x_{i+1}=2$ bleibt die Unkenntnis über die Themen der $(i-1)$ –ten und $(i+2)$-ten Mathematigerin.

Nach $n-2$ Fragen ergibt sich also Folgendes: Nur die a-ten und b-ten Mathematigerinnen wurden von Marvin nicht gefragt, alle dazwischen haben mit 2 geantwortet, und alle, die nicht dazwischen sitzen, haben ein anderes Forschungsthema als die a-te und b-te Mathematigerin.

- Wenn $b-a$ ungerade ist, dann kann $x_a=1$ und $x_b=1$ oder $x_a=2$ und $x_b=2$ auftreten, so dass Marvin nicht entscheiden kann, welche Mathematigerinnen das gleiche Thema haben.
- Wenn $b-a$ gerade ist, dann kann $x_a=1$ und $x_b=2$ oder $x_a=2$ und $x_b=1$ auftreten, so dass Marvin wieder nicht entscheiden, welche Mathematigerinnen dasselbe Thema teilen.

Es kann also für jede Reihenfolge der Fragestellungen eine Verteilung gefunden werden, so dass $n-2$ Fragen noch nicht ausreichen. Es gilt also $k=2023$. ❑

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht“, Landeswettbewerb Sachsen, 12. April 2025 in Leipzig, 14.00 – 18.30 Uhr, VDI-Garage (Karl-Heine-Str. 97).
https://www.jugend-forscht-sachsen.de/

64. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde, 23. – 26. Mai 2025, Universität Göttingen (www.mo2025.de).

Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, 29. Mai bis 1. Juni 2025, Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg.
https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2025.html

Gauß-Vorlesung der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 5. Juni 2025, in der Universitätsbibliothek der TU Chemnitz, Referent: Prof. Dr. KARL-THEODOR STURM (Universität Bonn) „Optimaler Transport, Brownsche Bewegung und Krümmung in nicht glatten Räumen“. https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/gauss2025/

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 2
Thema 31.2 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem 3
Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat 13
Bundeswettbewerb Mathematik 2025 18
Monatsaufgabe 04/2025 21
In alten Mathe-Büchern geblättert 19
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 02/2025 21
Termine 23

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[13]	Nr.	Thema	Aufgabe
04/2025 (Apr.)	Thema 31.2	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641013 MO611023
03/2025 (März)	Thema 31.1	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922 MO621033
03/2025 (März)	Thema 25.2	Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[13] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.