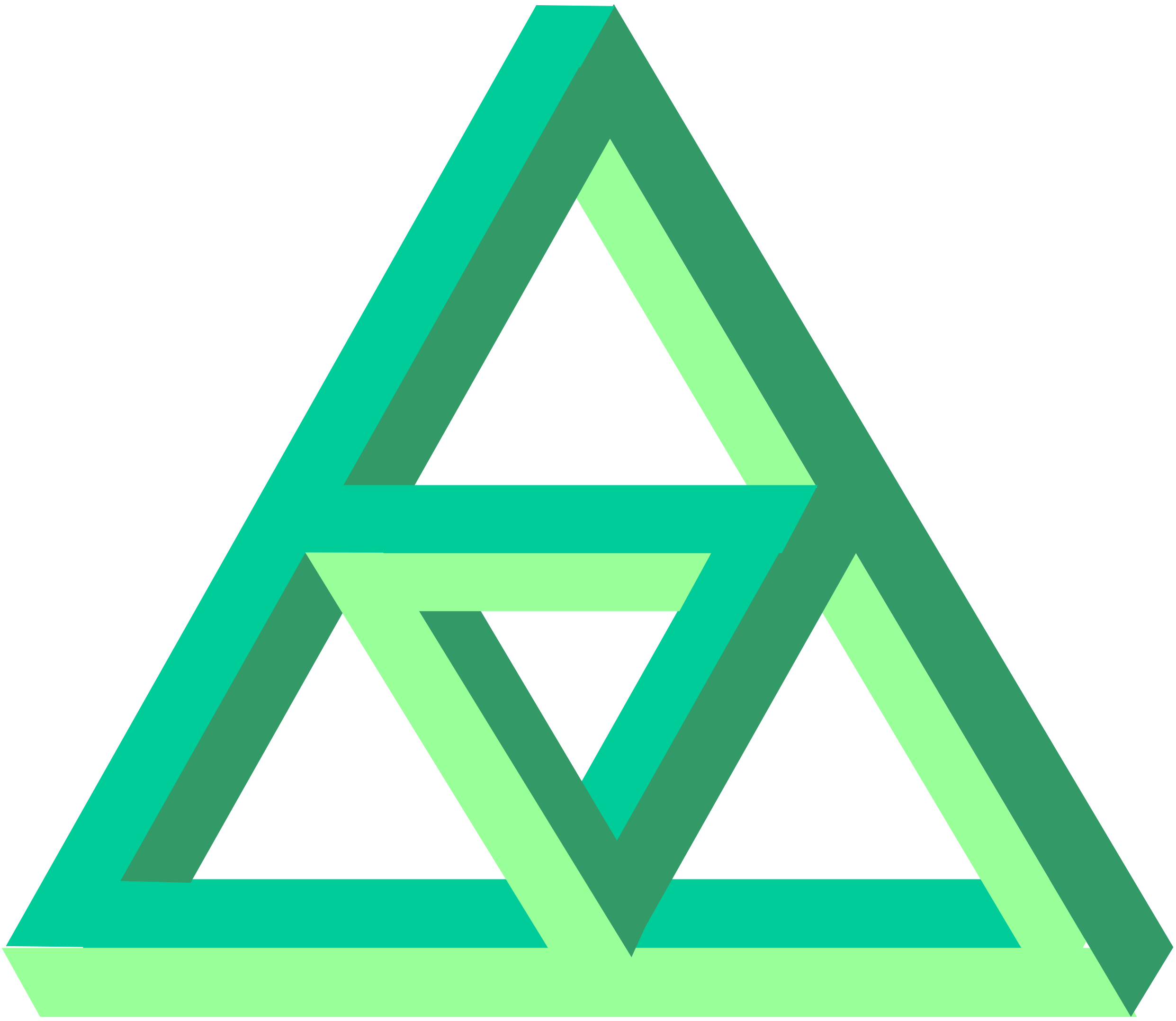
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 01/2025 (Januar 2025) 24. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugnehmend zur 2. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade greifen wir das Thema „Kombinatorik“ auf, dass wir bereits in der Nachbereitung der Bundesrunde der 62. MO diskutierten. Mit den aktuellen Aufgaben **MO640923/MO641023** werden typische Fragestellungen zu allen Möglichkeiten gestellt. Dabei ist aber für eine vollständige Lösungsdarstellung nicht erforderlich (aber zulässig), bekannte Formeln anzuwenden.

Mit den Aufgaben **MO640921/MO641021** wird die Thematik 3 unmittelbar fortgesetzt, so dass ein zielorientierter Lösungsansatz leicht zu finden war.

Im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM 3-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels diskutieren wir die Verwendung von Summen- und Produktzeichen. Hiermit lassen sich Aussagen kompakt und unmissverständlich formulieren. Insbesondere ausgehend von Spezialfällen mit wenigen Variablen können oft gefundene Aussagen formal verallgemeinert werden. Allerdings wird nicht erwartet, in Lösungsdarstellungen die Summen- und Produktzeichen selbst aktiv anzuwenden, jedoch sollte stets kritisch geprüft werden, ob Formulierungen mittels „+ … +“ im Kontext eindeutig sind.

Im historischen Rückblick schauen wir erneut (wie im Heft 8+9/2023) in ein Mathematik-Buch von 1895, um an die Einführung zur Kombinatorik zu erinnern, wobei zwar in den Abschnitten zu Kombinationen einige Begriffe ungewöhnlich erscheinen, die Inhalte und Formeln aber wie heute präsentiert werden.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Aufgabe zum Jahreswechsel

Aufgabe – MO251046[3]. Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 5$; sie bilden also die Teilfolge (2, 0, 2, 5).

(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und (2, 0, 2, 5) lautet.

Wir verbinden diese Aufgabe mit den besten Wüschen für eine gesundes und friedvolles Jahr 2025! Möge auch im neuen Jahr die Begeisterung für Mathematik erhalten bleiben und die Beschäftigung mit Wettbewerbsaufgaben durch Erfolg in der Mathematik-Olympiade belohnt werden!

Die folgende Zahlenspielerei zum Jahreswechsel ist den Grüßen vom Vorsitzenden des Vereins MO e.V., Professor Uwe Leck, mit Verweis an Kerstin Hansen, Jürgen Prestin, Frank Rehm, Heinz Klaus Strick und Åsa Vogl, entnommen.

$$2025$$

$$MMXXV$$

$$45^{4-5+4-5+4}$$

$$(44 + 4 : 4)^{\sqrt{4}}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$(76 + 5)(4 \cdot 3 \cdot 2 + 1)$$

$$-1 + 2 \cdot (34 \cdot 5 \cdot 6 - 7)$$

$$333 \cdot 3! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 3$$

$$5^5 - 555 - 555 + 5 + 5$$

$$88 \cdot \sqrt{8 + 8}! - 88 + 8 : 8$$

$$44 \cdot 44 + 44 + 44 + 44 : 44$$

$$13 \cdot 13 \cdot 13 - 13 \cdot 13 - 1 \cdot 3$$

$$12 \cdot 3 + (4 + 5) \cdot (6 + 7) \cdot (8 + 9)$$

$$55^2 - 10^3 = 51^2 - 4!^2 = 53^2 - 28^2$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - \frac{7!}{7 + 7} - \frac{7 + 7}{7} - 7 - 7$$

$$6^4 + 3^6 = 205^2 - 200^2 = 117^2 - 108^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

$$37^2 + 20^2 + 16^2 = 20^2 + 25^2 + 26^2 + 18^2 = 30^2 + 23^2 + 20^2 + 14^2$$

$$1 \cdot 1025 = 3 \cdot 675 = 5 \cdot 405 = 9 \cdot 225 = 15 \cdot 135 = 25 \cdot 81 = 27 \cdot 75$$

$$11111101001_2 = 2210000_3 = 31100_5 = 2700_9 = 2025_{10} = 441_{22} = 360_{25}$$

$$1013^2 - 1012^2 = 339^2 - 336^2 = 205^2 - 200^2 = 117^1 - 108^2 = 51^2 - 24^2 = 45^2$$

$$\sum_{k=11}^{64} k = \sum_{k=11}^{64} (-1)^k k^2$$

$$999 + \sqrt{9}^{\sqrt{9}} + 999$$

---

[3] Lösungshinweise im Heft 02/2025

MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Thema 3 – Gleichungssysteme

Nach der Aufgabe **MO641015** finden wir die Thematik 3 auch in der 2. Runde der diesjährigen MO wieder:

Aufgabe 03.12 – MO640921/MO641021. Zum Abmähen eines Fußballplatzes stehen 3 Rasenmäher mit unterschiedlicher Leistung zur Verfügung. Rasenmäher A und Rasenmäher B würden 110 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen. Rasenmäher B und Rasenmäher C würden 120 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen. Rasenmäher A und Rasenmäher C würden 132 Minuten brauchen, um gemeinsam das Spielfeld abzumähen.

Ermitteln Sie, in welcher Zeit das Feld bei gleichzeitiger Arbeit aller drei Geräte abgemäht werden kann.

Lösungshinweise (mit ganzen Zahlen): Wenn A und B in 110 min das Spielfeld abmähen, können sie in (110 · 12 =) 1320 min 12 Spielflächen abmähen. Wenn B und C in 120 min das Spielfeld abmähen, können sie in (120 · 11 =) 1320 min 11 Spielflächen abmähen. Wenn A und C in 132 min das Spielfeld abmähen, können sie in (132 · 10 =) 1320 min 10 Spielflächen abmähen. Also können 2·A, 2·B und 2·C zusammen in 1320 min (11 + 12 + 10 =) 33 Spielflächen abmähen. Somit können A, B und C in 1320 min (33 : 2 =) 16,5 Spielflächen abmähen.

Somit können A, B und C zusammen 1 Spielfläche in (1320 : 16,5 =) 80 min abmähen.

Lösungshinweise (mit Normierung): Seien a, b, c die Anteile des Platzes, die von A bzw. B bzw. C pro Minute gemäht werden können. Dann ist $a + b = \frac{1}{110}$, $b + c = \frac{1}{120}$ und $a + c = \frac{1}{132}$. Addieren wir diese Gleichungen auf und teilen durch 2, so erhalten wir $a + b + c = \frac{1}{80}$.

Bei gleichzeitiger Arbeit aller drei Geräte kann das Spielfeld also in 80 Minuten abgemäht werden.

Lösungshinweise (mit Berechnung der Einzelleistungen): Wir bezeichnen mit a den Flächenanteil, den der Rasenmäher A innerhalb von 120 min vom Spielfeld abmähen kann. Entsprechend führen wir b und c ein. Dann können wir die Aussagen als folgendes Gleichungssystem schreiben:

$$a + b = \frac{120}{110} \quad ; \quad b + c = 1 \quad ; \quad a + c = \frac{120}{132}$$

Wir lösen das Gleichungssystem auf und erhalten schrittweise mit $c = 1 - b$:

$$a = \frac{120}{110} - b = \frac{120}{132} + b - 1$$

$$\frac{120}{110}+1-\frac{120}{132}=\frac{12\cdot 120+1320-10\cdot 120}{1320}=\frac{1560}{1320}=\frac{13}{11}=2\cdot b$$

$$c=1-b=1-\frac{13}{22}=\frac{9}{22}$$

$$a=\frac{120}{132}-c=\frac{120}{132}-\frac{9}{22}=\frac{120-54}{132}=\frac{66}{132}=\frac{11}{22}$$

Damit finden wir den Flächenanteil, den die drei Rasenmäher gemeinsam in 120 min abmähen können:

$$a+b+c=\frac{11}{22}+\frac{13}{22}+\frac{9}{22}=\frac{33}{22}=\frac{3}{2}$$

Somit können die drei Rasenmäher in 120 min das $\frac{3}{2}$-Fache der Fläche abmähen. Folglich schaffen die drei Rasenmäher gemeinsam die Fläche in $\frac{3}{2}\cdot 120$ min = 80 min. ❑

Thema 24.2 – Kombinatorik[4]

Aufgabe 24.09 – MO640923. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus zwanzig aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zwei verschiedene Zahlen auszuwählen, deren Summe gerade ist.

Hinweis: Zwei Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der beiden Summanden unterscheiden, sollen hierbei als eine Möglichkeit gezählt werden.

Lösungshinweise: Eine Summe aus zwei natürlichen Zahlen ist genau dann gerade, wenn entweder beide Summanden gerade oder beide Summanden ungerade sind. Nun befinden sich unter 20 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau zehn gerade und genau zehn ungerade Zahlen. Es müssen also entweder aus zehn geraden Zahlen genau zwei verschiedene gewählt werden – dafür gibt es $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ verschiedene Möglichkeiten – oder aus den zehn ungeraden Zahlen zwei gewählt werden – auch dafür gibt es 45 Möglichkeiten.

Insgesamt erhalten wir also 45 + 45 = 90 Möglichkeiten für die Auswahl. ❑

Aufgabe 24.10 – MO641023. Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten, aus den dreißig natürlichen Zahlen von 1 bis 30 drei paarweise verschiedene Zahlen so auszuwählen, dass deren Summe durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Auswahlen, die sich nur in der Reihenfolge der drei Summanden unterscheiden, sollen hierbei als eine Möglichkeit gezählt werden.

[4] s. Teil 1, Heft 8+9/2023

Lösungshinweise: Die drei ausgewählten Zahlen bezeichnen wir mit x, y und z. Zur Untersuchung der Teilbarkeit der Summe $x + y + z$ durch 3 führen wir eine vollständige Fallunterscheidung durch.

Fall 1: x, y, z lassen denselben Rest bei der Division durch 3.
Fall 2: x, y, z lassen paarweise verschiedene Reste bei der Division durch 3.
Fall 3: Genau zwei der Zahlen x, y, z lassen denselben Rest bei der Division durch 3.

Fall 3: Es ergeben sich drei Möglichkeiten, den Rest zu wählen, der doppelt auftritt. Wenn zwei der drei Zahlen den Rest 0 lassen und die dritte den Rest 1 oder 2, dann ist die Summe nicht durch 3 teilbar. In analoger Weise zeigt sich bei den verbleibenden zwei Möglichkeiten, wenn also zwei Zahlen den Rest 1 bzw. zwei den Rest 2 lassen, dass die Summe nicht durch 3 teilbar ist. Also sind nur die ersten beiden Fälle zu untersuchen.

Fall 1: In diesem Fall gibt es drei Möglichkeiten, den Rest zu wählen. Wenn alle drei Zahlen den Rest 0 lassen, dann lässt auch die Summe den Rest 0 (weil 0 + 0 + 0 = 0) und ist somit durch 3 teilbar. Lassen alle drei Zahlen den Rest 1, dann lässt die Summe wegen 1 + 1 + 1 = 3 ebenfalls den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar. Und lassen schließlich alle drei Zahlen den Rest 2, so lässt die Summe erneut den Rest 0 (wegen 2 + 2 + 2 = 6) und ist ebenfalls durch 3 teilbar.

Fall 2: Wenn alle drei Summanden paarweise verschiedene Reste bei Division durch 3 lassen, dann ist die Summe wegen 0 + 1 + 2 = 3 durch 3 teilbar.

Um abzählen zu können, zerlegen wir die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 30 in drei Mengen:

A = {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28},
B = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29} und
C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}.

In A sind die Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, in B sind diejenigen, die den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen und C enthält die durch 3 teilbaren Zahlen. Jede dieser drei Mengen enthält 10 Zahlen.

Im ersten Fall sind aus A, B, C jeweils drei verschiedenen Zahlen auszuwählen. Wenn wir aus A auswählen, so gibt es $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ Möglichkeiten, wenn die Anordnung der ausgewählten Zahlen keine Berücksichtigung finden soll. Für B und C ergeben sich ebenfalls jeweils 120 Möglichkeiten und daher insgesamt 360.

Im zweiten Fall gibt es $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Möglichkeiten, denn es wird aus jeder der drei Mengen A, B, C genau ein Element gewählt.

Insgesamt erhalten wir also 360 + 1000 = 1360 Möglichkeiten. ❑

Ergänzung: In den offiziellen Lösungshinweisen wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass für die Beantwortung sowohl für die Aufgabe MO640923 als auch für den ersten Fall der Aufgabe MO641023 die Anwendung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für die Anzahl der Kombinationen[5] (ohne Wiederholung) von k Elementen aus n Elementen nicht erforderlich ist. Es genügt folgende Herleitung: Für die erste auszuwählende Zahl gibt es n Möglichkeiten. Für die zweite auszuwählende Zahl gibt es noch $n-1$ Möglichkeiten, usw. Schließlich gibt es für die k-te auszuwählende Zahl noch $n-k+1$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten, k Zahlen aus n Zahlen auszuwählen (in der Aufgabe 10 · 9 · 8 = 720).

Da aber die Reihenfolge keine Rolle spielt, müssen wir berücksichtigen, wie viele verschiedene Permutationen[6] (ohne Wiederholung, d.h. verschiedene Möglichkeiten einer Anordnung von k verschiedenen Elementen) es für die ausgewählten k Zahlen gibt. Mit ähnlicher Argumentation erhalten wir: Für die Zahl an erster Stelle in einer Reihenfolge gibt es k Möglichkeiten. Für die Zahl an zweiter Stelle in einer Reihenfolge gibt es $k-1$ Möglichkeiten, usw. Schließlich gibt es für die letzte auszuwählende Zahl noch 1 Möglichkeit. Also gibt es $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$ Möglichkeiten, k Zahlen in einer Reihenfolge anzuordnen (in der Aufgabe 3 · 2 · 1 = 6).

Um die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten zu berechnen, müssen wir also die Anzahl der möglichen Kombinationen von k Zahlen aus n Zahlen durch die Anzahl der Permutationen dieser k Zahlen dividieren. Wir erhalten also

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(in den Aufgaben also 90 : 2 = 45 bzw. 720 : 6 = 120).

Aufgabe 24.11 – MO500922

a) Geben Sie die Anzahl aller zweistelligen Zahlen an, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.
b) Ermitteln Sie die Anzahl aller dreistelligen Zahlen, die keine Ziffer 5 enthalten.
c) Untersuchen Sie, ob es mehr 50-stellige Zahlen gibt, in denen die Ziffer 5 nicht vorkommt, als solche, in denen sie mindestens einmal vorkommt.

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste Ziffer nicht Null sein darf. Beispielsweise ist die Zahl 3462 vierstellig, die Ziffernfolge 0743 stellt hingegen keine vierstellige Zahl dar.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil a): Es gibt 18 zweistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5. Dies kann durch Aufschreiben aller Fälle bewiesen werden: 15, 25, 35,

[5] lateinisch *combinatio*
[6] lateinisch *permutare* (vertauschen)

45, 50, 51, …, 55, …, 59, 65, 75, 85, 95. Der Anteil zweistelliger Zahlen ohne 5 beträgt also $\frac{72}{90} = 0.8$.

Lösungsvariante: Um die (als vollständige Lösung zulässige) Auflistung zu vermeiden, wollen wir die gesuchte Anzahl berechnen (und dabei auf Verallgemeinerungsmöglichkeiten achten):

- Offenbar gibt es genau eine zweistellige Zahl mit zwei Fünfen (55).
- Für die Anzahl der zweistelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5 unterscheiden wir zwei Fälle:
    - Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9 Möglichkeiten, nämlich (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
    - Die Ziffer 5 steht an zweiter Stelle: Es gibt 8 Möglichkeiten, nämlich (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).

  Wir finden also (8 + 9 =) 17 zweistellige Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

Insgesamt erhalten wir (17 + 1 =) 18 zweistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5.

Lösungsvariante: Wir können auch zunächst die Anzahl der zweistelligen Zahlen ohne Ziffer 5 berechnen. An der Zehnerstelle können 8 verschiedene Ziffern stehen, an der Einerstelle 9 verschiedene Ziffern, insgesamt also 8 · 9 = 72 Möglichkeiten. Da es von 10 bis 99 insgesamt 90 Zahlen sind, besitzen (90 – 72 =) 18 Zahlen mindestens einmal die Ziffer 5.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil b): Dreistellige Zahlen können 9 verschiedene Ziffern an der ersten und je 10 verschiedene Ziffern an den anderen beiden Stellen haben, insgesamt also 9 · 10 · 10 = 900. Ohne die Ziffer 5 gibt es noch 8 · 9 · 9 = 648 Möglichkeiten (Kombination mit Berücksichtigung der Reihenfolge). Ihr Anteil beträgt also $\frac{648}{900} = 0.72$.

Lösungsvariante: Auch wenn es im Vergleich zu der kurzen Lösung unnötig erscheint, wollen wir zunächst die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5 berechnen.

- Offenbar gibt es genau eine dreistellige Zahl mit drei Fünfen (555).
- Für die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit genau zwei Ziffern 5 stelle wir fest:
    - Es gibt 8 dreistellig Zahlen, die auf 55 enden.
    - Es gibt je 9 dreistellige Zahlen der Darstellung 5_5 bzw. 55_

  Insgesamt finden wir (8 + 9 + 9 =) 26 dreistellige Zahlen mit genau zwei Ziffern 5.
- Für die Anzahl der dreistelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5 unterscheiden wir zwei Fälle:

- Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9 · 9 = 81 Möglichkeiten, nämlich an jeder der beiden anderen Stellen eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
- Die Ziffer 5 steht nicht an erster Stelle: Es gibt 2 · 8 · 9 = 144 Möglichkeiten, nämlich an erster Stelle eine der Ziffern (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) und an zweiter oder an dritter Stelle eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).

Wir finden also (81 + 144 =) 225 dreistellige Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

Insgesamt erhalten wir (225 + 26 + 1 =) 252 dreistellige Zahlen mit mindestens einer Ziffer 5. Da es von 100 bis 999 insgesamt 900 Zahlen sind, besitzen (900 – 252 =) 648 dreistellige Zahlen mindestens einmal die Ziffer 5.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil c): Wir zeigen, dass es weniger 50-stellige Zahlen ohne 5 als mit 5 gibt.

Die Anzahl der 50-stelligen Zahlen ist $9 \cdot 10^{49}$, davon haben $8 \cdot 9^{49}$ Zahlen keine Ziffer 5. Für deren Anteil an der Gesamtzahl erhalten wir $A = \frac{8 \cdot 9^{49}}{9 \cdot 10^{49}}$. Ausgehend von Teilaufgaben a) und b) vermuten wir, dass der Anteil geringer wird und unter 50% liegen wird. Wir beweisen also die Ungleichung: $A < \frac{1}{2}$, gleichbedeutend mit $\left(\frac{9}{10}\right)^{49} < \frac{9}{16} = 0.5625$. Mit Verwendung von Rechentechnik würden wir natürlich ohne Probleme $0.9^{49} \approx 0.0057$ finden. Für die gesuchte Abschätzung genügen aber die Ergebnisse für kleine n. So erhalten wir (mit Kopfrechnen) $0.9^3 = 0.729$ und können daraus abschätzen: $0.9^6 = (0.9^3)^2 = 0.729^2 < 0.75^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0.5625$. Da die Werte von 0.9^n mit wachsendem n ständig abnehmen, ist diese Ungleichung in der Tat erfüllt.

Lösungsvariante: Wir verwenden ebenfalls die Anzahl der 50-stelligen Zahlen $9 \cdot 10^{49}$, davon haben $8 \cdot 9^{49}$ Zahlen keine Ziffer 5. Anstatt den Quotienten abzuschätzen berechnen wir (nach Anregung aus Teilaufgabe b) die Anzahl der 50-stelligen Zahlen mit genau einer Ziffer 5.

- Die Ziffer 5 steht an erster Stelle: Es gibt 9^{49} Möglichkeiten, nämlich an jeder der 49 anderen Stellen eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).
- Die Ziffer 5 steht nicht an erster Stelle: Es gibt $49 \cdot 8 \cdot 9^{48}$ Möglichkeiten, nämlich an erster Stelle eine der Ziffern (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) und an jeder Stelle eine der Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9), wenn jeweils eine der 49 Stellen durch 5 besetzt ist.

Folglich gibt es $(9 + 49 \cdot 8) \cdot 9^{48}$ Zahlen mit 50 Stellen mit genau einer Ziffer 5. Diese Anzahl ist bereits größer als $8 \cdot 9^{49} = 8 \cdot 9 \cdot 9^{48}$. ❑

Aufgabe 24.12 – MO410921/MO411021. Beim Sportunterricht wird zum Federballspiel eine Klasse mit 22 Schülern in 11 Gruppen zu je 2 Schülern aufgeteilt. Wie viele verschiedene solcher Aufteilungen sind möglich?

Hinweise:

1) Vertauscht man die beiden Schüler einer Gruppe G miteinander, so gilt die entstehende Gruppe nicht als verschieden von G.
2) Ändert man in einer Aufteilung A die Reihenfolge der 11 Gruppen, so gilt die entstehende Aufteilung nicht als verschieden von A.

Lösungshinweise: Zunächst nummerieren wir die Gruppen von 1 bis 11. Für den ersten Schüler der ersten Gruppe gibt es 22 Möglichkeiten, für den zweiten Schüler der ersten Gruppe noch 21 Möglichkeiten. Da es auf die Reihenfolge der beiden Schüler in dieser Gruppe nicht ankommt, gibt es für die erste Gruppe $\binom{22}{2} = \frac{22\cdot 21}{2\cdot 1} = 11 \cdot 21$ Möglichkeiten. Für die zweite Gruppe gibt es $\binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2\cdot 1} = 10 \cdot 19$ Möglichkeiten. Für die dritte Gruppe gibt es $\binom{18}{2} = \frac{18\cdot 17}{2\cdot 1} = 9 \cdot 17$ Möglichkeiten. Dies setzen wir fort bis zur elften Gruppe: $\binom{2}{2} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = 1$ Möglichkeiten. Insgesamt führt das auf

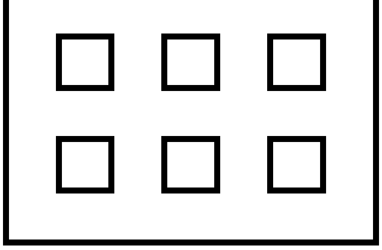
$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1$$

Möglichkeiten der Aufteilung auf 11 Gruppen. Nun kommt es aber auf die Reihenfolgen der Gruppen ebenfalls nicht an, so dass wir die Anzahl durch $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = 11!$ teilen müssen (für die erste Gruppe gibt es 11 Möglichkeiten, für die zweite Gruppe gibt es noch 10 Möglichkeiten, …, für die 11. Gruppe gibt es 1 Möglichkeit). Damit erhalten wir die gesuchte Anzahl

$$\frac{11! \cdot 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1}{11!} = 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 1 = 13\,749\,310\,575$$

❑

Aufgabe 24.13 – MO360921. Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern über seine Arbeit herstellen. Jedes Blatt soll genau 6 Bilder enthalten, wie in der Abbildung ersichtlich; die Motive der 6 Bilder auf je einem Blatt sollen voneinander verschieden sein. Insgesamt stehen 10 verschiedene Motive zur Verfügung.



Welches ist die größtmögliche Anzahl voneinander verschiedener Blätter, die sich in dieser Art herstellen lassen? Dabei gelten zwei Blätter bereits dann als voneinander verschieden, wenn eines dieser beiden Blätter mindestens ein Motiv enthält, das auf dem anderen Blatt nicht vorkommt. Enthalten zwei Blätter dagegen beide genau dieselben 6 Motive, nur möglicherweise in unterschiedlicher Reihenfolge, so gelten sie nicht als verschieden.

Aufgabe 24.14 – MO360941. Ein Fotoklub möchte eine Serie von Blättern zum Verteilen herstellen. Auf jedem Blatt sollen 6 Bilder sein, wie in der Abbildung gezeigt. Für solche Bilder stehen insgesamt 10 verschiedene Motive zur Verfügung. Jede mögliche Zusammenstellung von 6 verschiedenen dieser Motive soll in einer beliebigen Reihenfolge auf genau einem Blatt vorkommen. Wie viele Exemplare (kleinstmögliche Anzahl) von jedem der 10 Motive reichen aus?

Hinweis zu beiden Aufgabenstellungen: Bei diesen Aufgaben würde es nicht ausreichen, etwa eine (für Aufgaben dieses Typs) anwendbare fertige Formel (z.B. für Permutationen oder Variationen) als bekannten Sachverhalt anzuführen und dann nur formal anzuwenden. Vielmehr ist, wenn eine solche Formel benutzt werden soll, zusätzlich zu ihr eine Begründung zu nennen (die wenigstens für die hier gestellte spezielle Aufgabe ausreicht).

Lösungshinweise: Wir ermitteln die Anzahl der Möglichkeiten, 6 verschiedene Motive aus 10 gegebenen Motive auszuwählen. Für die Auswahl des ersten Motivs haben wir 10 Möglichkeiten, für die Auswahl des zweiten Motivs haben wir noch 9 Möglichkeiten, …, für die Auswahl des sechsten Motivs haben wir noch 5 Möglichkeiten, insgesamt also $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten. Da die Platzierung eines ausgewählten Motives unerheblich ist, stellen wir noch fest: für den Platz des ersten Motivs gibt es 6 Möglichkeiten, für den Platz des zweiten Motivs gibt es noch 5 Möglichkeiten, …, für den Platz des sechsten Motivs gibt es 1 Möglichkeit, insgesamt also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Wir finden also, dass es $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ verschieden Blätter gibt.

Fortsetzung der Lösung für die Aufgabe MO360941: Wenn es 210 verschiedene Blätter gibt, müssen insgesamt $6 \cdot 210 = 1260$ Motive vorhanden sein. Da alle Motive gleich oft vorkommen, muss jedes der 10 Motive mindestens $1260 : 10 = 126$ Mal verfügbar sein. ❑

Ergänzung: Mit dem Hinweis zur Aufgabenstellung sollte vermieden werden, für die Anzahl der verschiedenen Blätter als Auswahl von 6 Motiven aus 10 Motiven ohne Wiederholung ohne weitere Erläuterung den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{6}$ anzugeben.

Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Das Summenzeichen $\boldsymbol{\Sigma}$ (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *S*) wird für alle ganzen Zahlen m und n mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens wie bei Aufgabe **KZM 3-5A**[7] kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Es wird jedoch nicht erwartet, in einer Lösungsdarstellung selbst das Summenzeichen zu verwenden. Stattdessen können solche Summen ausgeschrieben werden. Allerdings ist darauf zu achten, dass bei abkürzenden Schreibweisen mit „+ … +“ keine Missverständnisse über den Inhalt der Summe möglich sind – so wie es in der Aufgabe KZM 3-5A thematisiert wird. So könnte 1 + 3 + … + 31 verschiedene Summationen bedeuten:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 + 31
1 + 3 + 7 + 13 + 21 + 31
1 + 3 + 7 + 15 + 31

Mit den folgenden Regeln können wir mit Summenzeichen rechnen. Zur anschaulichen Darstellung dieser Regeln sind Beispiele mit konkreten Zahlenwerten hilfreich:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^{8} j = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{k=3}^{8} k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^{n} (c \cdot a_j) = c \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^{5} (2 \cdot k) = 4 + 6 + 8 + 10 = 2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{5} k$

(3) Zerlegen in Teilsummen (*m* < *k* < *n*): $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \sum_{j=-3}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^{0} j^2 + \sum_{j=1}^{3} j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$

$$\begin{aligned}\sum_{j=-3}^{3} j^2 &= (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2\end{aligned}$$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j)$

Beispiel für die aufeinanderfolgende Ausführung dieser Regeln:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4} (10 + k) + \sum_{m=1}^{4} (10 - m) \\ &= \sum_{j=1}^{4} (10 + j) + \sum_{j=1}^{4} (10 - j) && \text{(Regel 1)} \\ &= \sum_{j=1}^{4} \big((10 + j) + (10 - j)\big) && \text{(Regel 4)} \\ &= \sum_{j=1}^{4} 20 \\ &= 20 \cdot \sum_{j=1}^{4} 1 = 20 \cdot 4 = 80 && \text{(Regel 2)}\end{aligned}$$

[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Dieses Beispiel überprüfen wir durch die ausführliche Summendarstellung:

$\sum_{k=1}^{4}(10+k)+\sum_{m=1}^{4}(10-j)=(11+12+13+14)+(9+8+7+6)=80$

(5) Umkehrungsregel: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$

Beispiel: $1234 = 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0 = \sum_{k=1}^{4} k \cdot 10^{4-k}$
$= \sum_{k=1}^{4}(5-k)\cdot 10^{4-(5-k)} = \sum_{k=1}^{4}(5-k)\cdot 10^{k-1}$
$= 4\cdot 10^0 + 3\cdot 10^1 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^3$

(6) Transformation des Summenindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$

Beispiel: $\sum_{j=4}^{8} j = 4+5+6+7+8 = \sum_{j=6}^{10}(j-2)$

Die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 bis 1559) zu finden ist, aber im Allgemeinen mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

finden wir unter Verwendung der obigen Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right) && \text{(Regel 5)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\big(k+(n+1-k)\big) && \text{(Regel 4)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+1) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 && \text{(Regel 2)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot n
\end{aligned}$$

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$\begin{aligned}
S(a,d,n) &= \sum_{k=0}^{n}(a+k\cdot d) \\
&= a\cdot\sum_{k=0}^{n} 1 + d\cdot\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{(Regel 3)} \\
&= a\cdot(n+1) + d\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Leicht können wir nachprüfen, dass wir – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regeln das Summenzeichen durch das Produktzeichen ersetzen können:
Das Produktzeichen Π (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *P*) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \le n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot\ldots\cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors (Regel 2) für das Produktzeichen lauten:

(2') $\prod_{j=m}^{n}(c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\prod_{j=1}^{4}(2 \cdot j) = 2^4 \cdot \prod_{j=1}^{4} j = 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 384$

Allerdings können Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} 1 = \sum_{i=1}^{2}(1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2\,, \quad \text{aber}$$
$$\prod_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} 1 = \prod_{j=1}^{2}(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Bezeichnen $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ die Ziffern einer $(m+1)$-stelligen Zahl im Dezimalsystem, so können wir die Aufgabe des diesjährigen Korrespondenzzirkels

Aufgabe KZM 1-3. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n, die gleich der Summe ihrer Quersumme $QS(n)$ und ihres Querproduktes $QP(n)$ sind, d.h. es gilt $n = QS(n) + QP(n)$.

mit Summen und Produktzeichen so formulieren:

Aufgabe. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n mit den Ziffern $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ (häufig als $n = \overline{a_m a_{m+1} \ldots a_1 a_0}$ dargestellt), die folgende Gleichung erfüllen:

$$n = \sum_{i=0}^{m}\left(10^{m-i} \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i.$$

Lösungshinweise: Wir betrachten zunächst Spezialfälle.

Fall 1: $m = 0$, d.h. wir suchen eine Lösung für $n = a_0 = a_0 + a_0$. Dies ist offenbar nur für $n = 0$ erfüllt.

Fall 2: $m = 1$, d.h. wir suchen eine Lösung für $n = 10 \cdot a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1 \cdot a_0$. Wir fassen in der Gleichung zusammen und erhalten: $a_1 \cdot (9 - a_0) = 0$. Da vereinbarungsgemäß die führende Ziffer einer Dezimaldarstellung von 0 verschieden sein soll, führt dies zu $a_0 = 9$ und somit zur Lösungsmenge $L = \{19, 29, \ldots, 99\}$.

Die Probe bestätigt das Ergebnis: Es gilt

$19 = 1 + 9 + 1 \cdot 9 = 19$, $29 = 2 + 9 + 2 \cdot 9 = 11 + 18 = 29$, …, bzw. allgemein $10 \cdot a_1 + 9 = a_1 + 9 + a_1 \cdot 9$.

Fall 3: $m > 1$. Hier finden wir folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i = n \geq 10^m \cdot a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i\,.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\sum_{i=0}^{m-1} a_i$ und teilen anschließend beide Seiten durch $a_m \neq 0$, so erhalten wir

$$1 + \prod_{i=0}^{m-1} a_i \geq 10^m$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber (wenn alle anderen Ziffern den Wert 9 haben) höchstens $1 + 9^m$, was aber offensichtlich für $m = 2$ bereits kleiner als 10^m ist $(1 + 81 < 100)$. Dies gilt erst recht für $m > 2$. Es kann also keine weiteren Lösungen der Aufgabenstellung geben. ❑

Hinweis: Die Argumentation für mindestens dreistellige Zahlen lässt sich auch auf zweistellige Zahlen übertragen, also für $m = 1$. Dann untersuchen wir die Abschätzung $1 + a_0 \geq 10$ und erkennen, dass diese nur für $a_0 = 9$ erfüllt werden kann.

Viele andere Aufgaben wirken mit Summen- und Produktzeichen recht kompakt.

Aufgabe – MO221041. Beweisen Sie folgende Aufgabe: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$ gilt.

Lösungshinweise[8]: Zur Erfüllung der Aufgabe genügt es, geeignete Zahlenbeispiele (ohne Herleitung) anzugeben und die Richtigkeit der Gleichung zu prüfen. So ist es möglich, die Zahlen für jedes $n \geq 2$ wie folgt zu wählen:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2}, a_{n-1} = 2, a_n = n.$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2} \cdot 2 \cdot n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$ ❑

Aufgabe Wurzel-2019-36. Für welche natürlichen Zahlen$n$ n ist $\sum_{i=1}^{n} i$ ein Teiler von $\prod_{i=1}^{n} i$?

Lösungshinweise: Wir schreiben $S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (nach der bekannten Gaußschen Summenformel) und $P = \prod_{i=1}^{n} i = n!$ (Fakultät).

a) Sei $n + 1 = p$ eine ungerade Primzahl. Dann ist zwar $\frac{n}{2}$ ein Teiler von $n!$, aber p kann kein Teiler von $n!$ sein. Folglich ist S kein Teiler von P.
b) Für $n + 1 = 2$ gilt $n = 1$ und somit $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1!$ und S ist ein Teiler von P.

[8] Eine ausführliche Diskussion zu allen n-Tupeln $mit\, n = 5$ mit dieser Eigenschaft wird im Heft 8+9/2023 geführt.

c) Sei $n+1$ eine gerade Zahl. Dann sind sowohl n als auch $\frac{n+1}{2} < n$ Teiler von $n!$ Also ist S ein Teiler von P.

d) Sei $n+1$ ungerade, aber keine Primzahl. Wir nehmen an, es gibt eine Zerlegung $n+1 = a \cdot b$ mit ungeraden Zahlen $1 < a < b < n$. Somit sind $\frac{n}{2}$, a und b paarweise verschiedene Teiler von $n!$ und somit teilt S das Produkt P. Gibt es aber eine solche Zerlegung nicht, muss $n+1 = p^2$ mit einer Primzahl p gelten. Wegen $2 \cdot p < p^2$ sind dann $\frac{n}{2}$, p und p^2 paarweise verschiedene Teiler von $n!$ und somit teilt S das Produkt P.

Fazit: Für alle natürlichen Zahlen n, für die $n+1$ keine Primzahl ist, ist die Aussage erfüllt. ❑

Aufgabe. Es gelte für $k = 1, 2, 3, \dots, 100$: $x_k \in \{-1\,; 1\}$ mit $\prod_{k=1}^{100} x_k > 0$. Man beweise, dass dann stets gilt:

$$\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} \neq 0.$$

Lösungshinweise: Wegen $\prod_{k=1}^{100} x_k > 0$ ist die Anzahl der negativen Faktoren geradzahlig.

Angenommen, es gelte $\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} = 0$. Da aber jeder Summand -1 oder +1 beträgt, ist die Anzahl der negativen Summanden gleich der Anzahl der positiven Summanden, also 25. Dann ist aber auch die Anzahl der negativen Werte x_i ungeradzahlig, denn in den 25 negativen Summanden ist genau ein Faktor negativ und in den anderen 25 positiven Summanden treten negative Faktoren paarweise auf. Eine Anzahl kann aber nicht gleichzeitig geradzahlig und ungeradzahlig sein. Also ist die Annahme falsch und es gilt wie behauptet $\prod_{i=0}^{50} x_{2i-1} \cdot x_{2i} \neq 0$. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch[9] der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895.

Zweiter Cursus

Abschnitt XVII – Die Combinationslehre

[9] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

§ 259. - § 262[10].

b. Combinationen und Variationen

§ 263.

Die Combinationen unterscheidet man als solche der 1sten, 2ten, 3ten … n ten Klasse, oder als Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), Quaternionen (Quaternen), je nachdem jede Complexion 1, 2, 3, … n Elementen des Zeigers enthält. Ebenso nennt man die Variationen nach der Zahl der in ihnen zusammengefassten Elemente der 1sten, 2ten, 3ten, … n ten Klasse.

Ferner unterscheidet man Combinationen und Variationen ohne Wiederholung und mit Wiederholung, je nachdem jedes Element des Zeigers in der Complexion nur einmal vorkommen, oder beliebig oft wiederholt werden darf.

Man bezeichnet die Inbegriffe der Combinationen und Variationen der r ten Klasse aus den n Elementen 1, 2, 3, …n

ohne Wiederholung mit $C^r(1\ 2\ 3 \dots n)$ und $V^r(1\ 2\ 3 \dots n)$.
Derselben mit W. mit $C^r(1\ 2\ 3 \dots n)^w$ und $V^r(1\ 2\ 3 \dots n)^w$.
Die Anzahl dieser Combinationen ohne W. mit $C^r(n)$ und $V^r(n)$.
" " " " mit W. " $C^r(n)^w$ " $V^r(n)^w$.

§ 264.

Ableitung sämtlicher Combinationen der r ten Klasse von n Elementen in lexicographischer Ordnung.

1. Für Combinationen ohne Wiederholung

Die r ersten Elemente des geordneten Zeigers bilden die erste Combination. Um die übrigen daraus abzuleiten, ersetze man die letzte Stelle nach und nach durch die nächst folgenden Elemente bis zum höchsten des Zeigers. Wo man daraus diese letzte Combination rückwärts durchlaufend, in der fallenden Anordnung der Elemente eine Lücke trifft, ersetze man dieses Element durch das nächst höhere, und schließe die folgenden des Zeigers an. Die letzte Complexion wird von den letzten r Elementen des Zeigers gebildet. – Nirgends darf ein niedrigeres Element auf ein höheres folgen.

Beispiel: $C^4(123456) =$

1234	1256	2345
1235	1345	2346
1236	1346	2356
1245	1356	2456
1246	1456	3456

§ 265.

Ableitung aller Klassen der Combinationen eines gegebenen Zeigers aus der je vorhergehenden.

1. Bei Combinationen ohne Wiederholung erhält man die folgende Klasse, indem man jedes Element des Zeigers allen den Combinationen der vorigen Klassen voranstellt, welche mit einem höheren Element anfangen.

[10] S. Heft 8+9/2023

2. Bei Combinationen mit Wiederholung erhält man die folgende Klasse, indem man jedes Element des Zeigers allen Combinationen der vorigen Klasse voranstellt, welche mit demselben oder einem höheren Element anfangen.

...

§ 266.

Lehrsatz. Wenn man in den Combinationen der r ten Klasse auf n Elementen mit W,
die Elemente der 1ten, 2ten, 3ten, ... r ten Stelle
um bezügl. 0, 1, 2, ... r – 1
erhöht, so entstehen daraus die Combinationen der r ten Klasse aus (n + r – 1) Elementen ohne W.

Folgerung. Die Anzahl der Combinationen der r ten Kl. aus n Elementen mit W. und der Combinationen derselben Klasse aus (n + r – 1) Elementen ohne W. ist gleich.

$$C^r(n)^w = C^r(n + r - 1)$$

c. Die Combinations- und Variations-Zahlen

§ 269.

Variationsformel.

1. Die Anzahl der Variationen der r ten Klasse aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$V^r(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

...

§ 270.

Combinationsformeln

1. Die Anzahl der Combinationen der r ten Klasse aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$C^r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Denn nach dem Bildungsgesetze der Variationen § 267 ist

$$V^r(n) = P(r) \cdot C^r(n);\ \text{daher}$$

$$\mathrm{C^r(n)} = \frac{\mathrm{V^r(n)}}{\mathrm{P(r)}} = \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{r}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{r!\,(n-r)!}}$$

Der Zähler dieser Combinationsformel enthält r absteigende Faktoren.

Beispiel. $C^4(10) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/2024

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Betrachte die zwei unendlichen Folgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reeller Zahlen mit $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ und

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$. Zeige, dass $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

Lösungshinweise: Wir stellen fest, dass die Folge $\{a_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ mit der um einen Index verschobenen Folge $\{b_i\}_{i=0,1,2,\dots}$ übereinstimmt. Wir können also die Bildungsvorschrift umformulieren:

$$b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_k + 1}{b_k + 1} = a_k + \frac{1}{b_k + 1} = b_{k-1} + \frac{1}{b_k + 1}$$

Nun definieren wir eine neue Folge $B_0, B_1, B_2, \dots$ mit $B_i = b_i + 1$ für alle $i = 0,1,2, \dots$ Damit erhalten wir

$$B_{k+1} = B_{k-1} + \frac{1}{B_k}$$

Nach Multiplikation mit B_k folgt daraus

$$B_k \cdot B_{k+1} = B_{k-1} \cdot B_k + 1$$

Wegen $B_0 = 1$ und $B_1 = 2$ erhalten wir $B_0 \cdot B_1 = 2, B_1 \cdot B_2 = 3$ und deshalb auch $B_{2023} \cdot B_{2024} = 2025$. Nun gilt weiter

$$2025 = B_{2023} \cdot B_{2024} = (b_{2023} + 1) \cdot (b_{2024} + 1) = (a_{2024} + 1) \cdot (b_{2024} + 1)$$

Verwenden wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel, so können wir abschließend folgern:

$$45 = \sqrt{2025} = \sqrt{(a_{2024} + 1) \cdot (b_{2024} + 1)} \leq \frac{a_{2024} + b_{2024} + 2}{2}$$

also

$$a_{2024} + b_{2024} \geq 88$$

❑

Monatsaufgabe 01/2025[11]

Aufgabe. Bestimme alle $k \in \mathbb{N}_0$, für die eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert, die $f(2024) = k$ und $f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Bemerkung: Hierbei bezeichnet $\mathbb{N}_0$ die Menge nichtnegativer ganzer Zahlen.

[11] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 28.02.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Termine

Tag der offenen Tür an der Technischen Universität Chemnitz, 09. Januar 2025. Hörsaalgebäude der TUC, Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz. Ausführliche Informationen einschließlich des Programms unter
https://www.tu-chemnitz.de/tu/veranstaltungen/tuctag/index.html

Känguru-Wettbewerb 2025: Anmeldung bis 31. Januar 2025 unter
https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html#anmeldung
Der Wettbewerb findet traditionell am 3. Donnerstag im März statt (25. März 2025).

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[12]	Nr.	Thema	Aufgabe
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
01/2025 (Jan.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641021 MO640921
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.