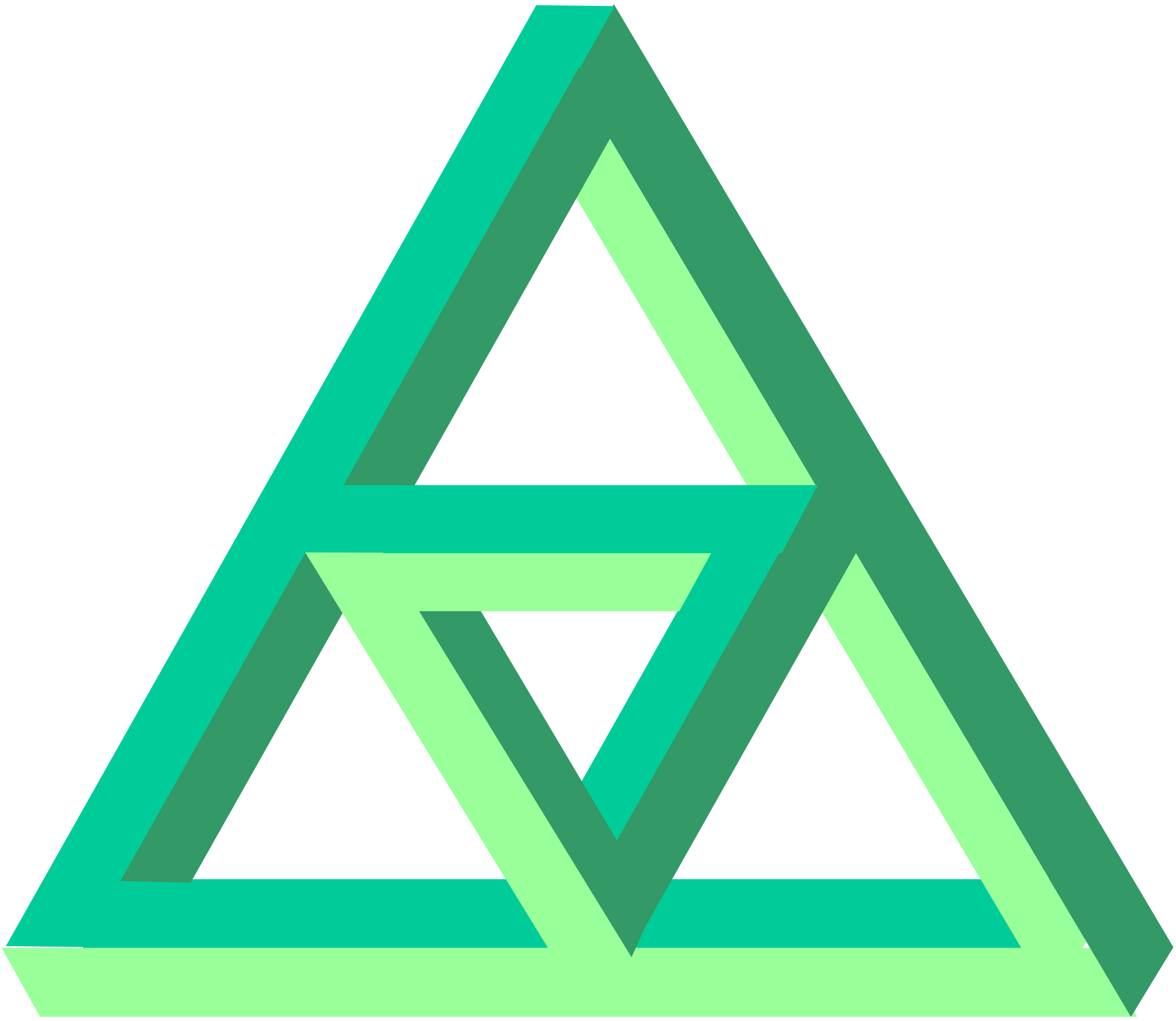
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2024 (Dezember 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen den Rückblick auf die Aufgaben der Schulrunde der 64. MO fort und diskutieren mit Bezug zur Aufgabe **MO641011** das Thema diophantische Gleichungen. Aufgrund der geforderten Ganzzahligkeit der Lösungen sind für diese Gleichungen diese durch systematisches Probieren leicht zu finden. Im Kern der Aufgabe geht es dann um die Ermittlung aller Lösungen, die durch Vertauschen der Variablenbelegung möglich sind. Komplexere Vorgänger begegnen uns in den Aufgaben **MO601012** und **MO621046.** Auch hierbei hilft systematische Probieren für Lösungsideen. Für einen allgemeinen Zugang ist jedoch ein geeigneter Ausdruck zu finden, dessen Herleitung aber nicht in der Lösungsdarstellung angegeben werden muss. In den offiziellen Musterlösungen der Aufgabenkommission wird ein Verfahren gezeigt, wie solche passenden Lösungen generiert werden können, das wir in diesem Heft widergeben.

Wir greifen die Aufgabe **KZM 2-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels auf und untersuchen den FERMAT-Punkt. Dabei können wir erneut Konstruktionsmethoden verwenden, die dessen Lage als Optimierungsaufgabe verstehen.

Wir informieren über den Bundeswettbewerb Mathematik, der mit der Veröffentlichung der Aufgaben zur 1. Runde in den Jahrgang 2025 startet.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 30 – Diophantische Gleichungen

Eine **diophantische Gleichung** ist eine Gleichung mit mehreren Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden. Diese Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA (um 250) benannt. Mit Bezug zur 1. Stufe der diesjährigen MO betrachten wir Gleichungen zweiten Grades. Typische Fragestellungen umfassen die Suche nach einer, mehrerer oder aller ganzzahligen Lösungen. Oft ist auch die Frage interessant, ob es unendlich oder endlich viele verschiedene Lösungen gibt, wobei im letzten Fall die Anzahl gesucht wird:

Aufgabe MO641011.

a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein geordnetes Tripel (x, y, z), welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: (0, 0, 1), (0, 0,−1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (−2, 0, 0), (0,−2, 0).

Lösungshinweise: Als Stammlösung bezeichnen wir eine Lösung mit nichtnegativen, aufsteigend angeordneten Komponenten, also eine solche mit $0 \leq x \leq y \leq z$. Zu jeder Lösung gibt es genau eine Stammlösung, die wir erhalten, wenn wir zu Beträgen übergehen und dann das Tripel aufsteigend anordnen. Umgekehrt können aus den Stammlösungen alle anderen Lösungen durch Permutation und Vorzeichenwechsel gewonnen werden, was in jedem Fall genauer zu untersuchen ist.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Es gibt offensichtlich keine Stammlösungen mit $z \leq 1$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen 3 nicht übersteigt) oder $z \geq 3$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen mindestens 9 beträgt). Also muss für eine Stammlösung $z = 2$ gelten und weiter $x^2 + y^2 = 1$ Die einzige Stammlösung ist also $(x, y, z) = (0,1,2)$, woraus durch Vorzeichenwechsel vier Lösungen $(x, y, z) = (0, \pm 1, \pm 2)$ und daraus durch Permutation insgesamt $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Lösungen erzeugt werden können. Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ hat also genau 24 ganzzahlige Lösungen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es gibt offensichtlich keine Stammlösungen mit $z \leq 1$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen 3 nicht übersteigt) oder $z \geq 4$ (weil die Summe der drei Quadratzahlen mindestens 16 beträgt). Also muss für eine Stammlösung $z = 2$ oder $z = 3$ gelten.

Ist in einer Stammlösung $z = 3$, so muss $x^2 + y^2 = 0$ sein, was zur Stammlösung $(x, y, z) = (0,0,3)$ führt, aus der durch Vorzeichenwechsel und Permutation insgesamt 6 Lösungen erzeugt werden können: (0, 0, 3), (0, 0,−3), (0, 3, 0), (0,−3, 0), (3, 0, 0) und (−3, 0, 0).

Ist in einer Stammlösung $z = 2$, so gilt $x^2 + y^2 = 5$. Damit muss $y = 2$ sein und $x = 1$, woraus sich die einzige Stammlösung $(x, y, z) = (1,2,2)$ ergibt. Um alle Lösungen aus dieser Stammlösung zu ermitteln, wird eine Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl a der positiven Zahlen im Tripel durchgeführt.
Fall 1: $a = 3$: Durch Vertauschungen (Permutationen) erhalten wir aus (1, 2, 2) noch zwei weitere Lösungen: (2, 1, 2) und (2, 2, 1).

Fall 2: $a = 2$: Ausgangspunkt der Überlegungen sind die drei Lösungen (−1, 2, 2), (1,−2, 2) und (1, 2,−2). Aus der ersten erhalten wir durch Vertauschen zwei weitere Lösungen: (2,−1, 2) und (2, 2,−1). Vertauschungen von (1,−2, 2) ergeben fünf weitere Lösungen: (1, 2,−2), (−2, 1, 2), (−2, 2, 1), (2, 1,−2) und (2,−2, 1), also insgesamt sechs Lösungen. Die Permutationen von (1, 2,−2) führen auf dieselben sechs Lösungen.

Fall 3: $a = 1$: Hier gehen wir von den drei Lösungen (−1,−2, 2), (−1, 2,−2) und (1,−2,−2) aus. Permutiert man (−1,−2, 2), so erhält man fünf weitere Lösungen: (−1, 2,−2), (−2,−1, 2), (−2, 2,−1), (2,−1,−2) und (2,−2,−1). Die Permutationen von (−1, 2,−2) führen auf dieselben sechs Lösungen. Aus (1,−2,−2) ergeben sich weiterhin (−2, 1,−2) und (−2,−2, 1). Insgesamt sind es in diesem Fall neun Lösungen.

Fall 4: $a = 0$: Die zugehörigen Lösungen sind hier die Tripel (−1,−2,−2), (−2,−1,−2) und (−2,−2,−1).

An der Aufzählung der Lösungen in den Fällen wird deutlich, dass keine Lösung doppelt auftritt. Weiterhin kann keine Lösung fehlen, denn bei der Untersuchung der einzelnen Fälle wurden durch die Systematik alle Möglichkeiten erfasst.

Die Gesamtzahl der ganzzahligen Lösungen beträgt in diesem Aufgabenteil also 6 + 3 + 3 + 6 + 9 + 3 = 30. ❑

Aufgabe MO601012. Wir betrachten in dieser Aufgabe Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen und untersuchen, welche von ihnen Lösungen der Gleichung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = c^2$ (1) sind. So ist das Tripel (2, 16, 10) eine Lösung von (1), weil $2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 10^2$ wahr ist.

a) Geben Sie zwei weitere Lösungen von (1) an.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat.
c) Wie viele Lösungen gibt es, wenn zusätzlich $c = 2 \cdot a + 3$ gilt?

$Lösungshinweise$: Wir erkennen, dass a Teiler von c^2 ist, da

$$a^2 + 3 \cdot a \cdot b = a \cdot (a + 3 \cdot b) = c^2$$

gilt. Allerdings folgt daraus nicht, dass a ein Teiler von c ist, wie das zweite Beispiel in Teil a) zeigt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):

(1, 1, 2) ist Lösung, da $1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4 = 2^2$ gilt.

(4, 7, 10) ist ebenfalls Lösung, da $4^2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 = 100 = 10^2$ gilt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Zunächst formen wir die Gleichung (1) um zu $3 \cdot a \cdot b = c^2 - a^2 = (c - a) \cdot (c + a)$.

Wählen wir z.B. $c = 4 \cdot a$, dann folgt für b die Beziehung $b = 5 \cdot a$. Tatsächlich ist $(a, 5a, 4a)$ Lösung, denn es gilt $a^2 + 3 \cdot a \cdot 5 \cdot a = 16 \cdot a^2 = (4 \cdot a)^2$. Da a aus der Menge der positiven ganzen Zahlen frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen.

Lösungsvariante: Wie oben festgestellt, ist (4, 7, 10) Lösung. Wählen wir nun eine beliebige positive ganze Zahl g, dann ist auch $(4 \cdot g, 7 \cdot g, 10 \cdot g)$ Lösung, da $(4 \cdot g)^2 + 3 \cdot (4 \cdot g) \cdot (7 \cdot g) = (10 \cdot g)^2$ ebenfalls wahr ist.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Wenn $c = 2a + 3$ ist, dann erhalten wir aus (1) die Bedingung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 9$ und daraus

$$b = \frac{a^2 + 4a + 3}{a} = a + 4 + \frac{3}{a}.$$

Da a und b (positive) ganze Zahlen sind, muss auch $\frac{3}{a}$ eine ganze Zahl sein. Das ist nur für $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ der Fall. Die zugehörigen Tripel lauten (1, 8, 5) und (3, 8, 9). Sie sind tatsächlich Lösungen, da $1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 8 = 25 = 5^2$ und $3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 8 = 81 = 9^2$ ist. Es gibt also genau zwei Lösungen.

Lösungsvariante: Aus der Gleichung $a^2 + 3 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a + 9$ erhalten wir $a \cdot b = a^2 + 4 \cdot a + 3$ und daraus $a \cdot b = (a + 1) \cdot (a + 3)$.

Fall 1: Wenn $a = 1$ ist, dann erhalten wir $b = 8$ und $c = 5$. Die Probe (siehe oben) bestätigt, dass (1, 8, 5) tatsächlich Lösung ist.

Fall 2: Wenn $a > 1$ und somit $a \geq 2$ ist, dann muss a ein Teiler von $a + 3$ sein, da in diesem Fall $a + 1$ als Nachfolger von a keine gemeinsamen Teiler größer als 1 mit a haben kann. Wenn a ein Teiler von $a + 3$ ist, dann muss a ein Teiler von 3 sein. Die (positiven) Teiler von 3 sind 1 und 3 und es geht weiter wie oben. ❑

Aufgabe MO621036. Wir betrachten im Folgenden ganzzahlige Lösungen (x, y) der Gleichung $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = n$, wobei n eine ganze Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass für jedes n die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung endlich ist.
b) Zeigen Sie: Wenn $n > 0$ keine Quadratzahl und nicht das 7-Fache einer Quadratzahl ist, dann ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung durch 4 teilbar.
c) Beweisen Sie: Für jede ganze Zahl $k \geq 0$ ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = 2023^k$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): $y^2 - x \cdot y + 2x^2 = n$ gilt genau dann, wenn

$$\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \cdot x^2 = n$$

ist. Daraus folgt, dass für ein Lösungspaar (x, y) stets $\frac{7}{4} \cdot x^2 \leq n$ und somit $|x| \leq \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n}$, also

$$-\sqrt{\frac{4}{7} \cdot n} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n}$$

erfüllt sein muss. Für die Anzahl $M(n)$ der Möglichkeiten für die x-Werte der Lösungen zu gegebenem n gilt also $M(n) \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{7} \cdot n} + 1$. Für gegebenes n und x handelt es sich dabei um eine quadratische Gleichung in y mit maximal zwei Lösungswerten. Insgesamt gibt es also höchstens $2 \cdot M(n)$ Lösungspaare zu gegebenem n, also endlich viele.

Bemerkung: Für $n < 0$, aber auch für manche positive n wie z.B. $n = 3$, gibt es gar keine Lösungen (x, y).

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es bezeichne (a, b) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl $n > 0$. Ist (a, y) eine weitere Lösung der Gleichung, so gilt

$$y^2 - a \cdot y + 2 \cdot a^2 = n = b^2 - a \cdot b + 2 \cdot a^2$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &(y^2 - ay + 2 \cdot a^2) - (b^2 - a \cdot b + 2 \cdot a^2) \\ &= (y^2 - b^2) - (ay - ab) = (y - b) \cdot (y + b - a) = 0 \end{aligned}$$

also $y = b$ oder $y = a - b$, womit $(a, a - b)$ als einzige weitere Lösung in Frage kommt. Eine Probe bestätigt, dass $(a, a - b)$ der Gleichung

$$(a - b)^2 - a \cdot (a - b) + 2 \cdot a^2 = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = n$$

genügt. Damit sind (a, b) und $(a, a - b)$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $x = a$. Diese beiden Lösungen fallen genau dann zusammen, wenn $b = a - b$, also $a = 2b$ gilt. In diesem Fall ist $n = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = 7 \cdot b^2$ das 7-Fache einer Quadratzahl, was jedoch ausgeschlossen ist.

Mit $(-y)^2 - (-x) \cdot (-y) + 2(-x)^2 = y^2 - x \cdot y + 2x^2$ ist (x, y) genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn $(-x, -y)$ eine Lösung ist. Insbesondere sind damit $(-a, -b)$ und $(-a, -(a - b))$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $x = -a$. Diese zwei Lösungen sind von den Lösungen (a, b) und $(a, a - b)$ verschieden, es sei denn, wir haben $a = -a$, also $a = 0$. In diesem Fall ist $n = b^2 - ab + 2 \cdot a^2 = b^2$ eine Quadratzahl, was jedoch ausgeschlossen ist.

Zusammenfassung: Falls zu gegebenem n eine ganzzahlige Lösung (a, b) der Gleichung existiert, so sind $(a, b), (a, a - b), (-a, -b)$ und $(-a, -(a - b))$ die einzigen Lösungen der Gleichung mit $|x| = |a|$. Falls n weder eine Quadratzahl noch das 7-Fache einer Quadratzahl ist, so sind diese vier Lösungen jeweils paarweise verschieden und die Lösungsmenge lässt sich in Teilmengen zu je vier Elementen aufteilen. Die Anzahl der Lösungen ist damit aber durch 4 teilbar.

Falls zu dem gegebenen n keine ganzzahlige Lösung (a, b) der Gleichung existiert, so ist die Anzahl der Lösungen gleich null, also ebenfalls durch 4 teilbar.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Wie bereits in Teilaufgabe b) gesehen, lässt sich die Lösungsmenge, falls sie nicht leer ist, in Teilmengen aufteilen, die jeweils aus Lösungspaaren $(a, b), (a, a - b), (-a, -b)$ und $(-a, -(a - b))$ bestehen. Diese Teilmengen enthalten dabei im Regelfall jeweils vier Elemente. Ausnahmen sind nur möglich, wenn n eine positive Quadratzahl oder das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist.

Falls $n = m^2$ mit $m > 0$ eine positive Quadratzahl ist, so existiert eine Lösung, nämlich $(a, b) = (0, m)$. Genau für $a = 0$ fallen Lösungen zusammen. In diesem Fall besteht die zugehörige Teilmenge aus genau den zwei Elementen $(0, m)$ und $(0, -m)$. Falls es weitere Teilmengen gibt, haben sie alle genau vier Elemente.

Falls $n = 7 \cdot m^2$ mit $m > 0$ das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist, so existiert eine Lösung, nämlich $(a, b) = (2m, m)$. Genau für $a = 2b$ fallen Lösungen zusammen. In diesem Fall besteht die zugehörige Teilmenge aus genau den zwei Elementen $(2m, m)$ und $(-2m, -m)$. Falls es weitere Teilmengen gibt, haben sie alle genau vier Elemente.

Ergänzend zur Teilaufgabe b) folgt damit: Die Anzahl der Lösungen ist gerade, aber nicht durch 4 teilbar, wenn n eine positive Quadratzahl oder das 7-Fache einer positiven Quadratzahl ist.

Für gerades $k = 2m$ ist $2023^k = (2023^m)^2$ eine positive Quadratzahl, für ungerades $k = 2m + 1$ ist $2023^k = 7 \cdot (17 \cdot 2023^m)^2$ das 7-Fache einer positiven Quadratzahl, womit der Beweis abgeschlossen ist. ❑

Aufgabe MO621046. Zu jeder positiven ganzen, nicht durch 3 teilbaren Zahl n bezeichne $r(n)$ die Anzahl der Lösungspaare (a, b) der Diophantischen Gleichung $a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n$ (1) mit positiven ganzen Zahlen a, b.

Beweisen Sie, dass $r(n)$ genau dann ungerade ist, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl m gibt, für die $n = m^2$ oder $n = 2 \cdot m^2$ gilt.

Vorbemerkungen: Um uns dem Lösungsansatz zu nähern, betrachten wir zunächst die genannten Sonderfälle. Offenbar ist für $n = m^2$ das Paar (m, m) wegen der Gleichung $m^2 + 2 \cdot m^2 = 3 \cdot m^2$ eine Lösung. Für kleine Werte von n finden wir außer dieser trivialen Lösung keine weiteren ganzzahligen Lösungen. Also ist dafür die Anzahl der Lösungen gleich 1 und somit ungerade. Zudem ist für $n = 2 \cdot m^2$ das Paar $(2 \cdot m, m)$ wegen der Gleichung $(2 \cdot m)^2 + 2 \cdot m^2 = 6 \cdot m^2 = 3 \cdot 2 \cdot m^2$ eine Lösung. Für kleine Werte von n finden wir auch unter dieser Voraussetzung keine weiteren ganzzahligen Lösungen. Also ist auch dafür die Anzahl der Lösungen gleich 1 und somit ungerade.

Durch systematisches Probieren finden wir zum Beispiel für $n = 11$:

$$3 \cdot 11 = 1^2 + 2 \cdot 4^2 = 5^2 + 2 \cdot 2^2$$

und erhalten so die beiden Lösungen $(1, 4)$ und $(5, 2)$. Für $n = 17$ finden wir wegen

$$3 \cdot 17 = 51 = 1^2 + 2 \cdot 5^2 = 7^2 + 2 \cdot 1^2$$

die beiden Lösungen (1, 5) und (7, 1). Durch vollständiges Probieren können wir nachweisen, dass es jeweils keine weiteren Lösungen gibt. Somit gibt es jeweils eine gerade Anzahl von Lösungspaaren.

Finden wir für einige Werte von n keine ganzzahligen Lösungen, so gilt $r(n) = 0$ und die Behauptung ist ebenfalls erfüllt.

Lösungshinweise: Die Anzahl der Lösungen von (1) in positiven ganzen Zahlen ist wegen $|a|, |b| < \sqrt{3 \cdot n}$ endlich. Für jedes Lösungspaar (a, b) ist keine der beiden Zahlen durch 3 teilbar. In der Tat, wäre etwa a durch 3 teilbar, so müsste es auch b sein. Dann wäre aber $a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n$ durch 9 teilbar, was im Widerspruch zur Voraussetzung an n steht.

Wenn wir ein Lösungspaar (a, b) gefunden haben, dann suchen wir ein dazu eindeutig passendes Lösungspaar (a', b'). Lassen a und b bei Division durch 3 unterschiedliche Reste (wie zum Beispiel bei (2, 5) für $n = 17$), so ist $a' = \frac{a+b}{3}$ wieder eine positive ganze Zahl. Nehmen wir an, dass es dazu ein passendes b' gibt, so muss gelten

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9} a +^2 \frac{17}{9} \cdot b^2 - \frac{2ab}{9}$$

gilt. Es ist nicht erkennbar, ob auf diese Weise b‘ für alle a‘ als ganze Zahl definiert werden kann. Es ist aber auch $a' = \frac{a+4b}{3} = \frac{a+b}{3} + b$ wieder eine positive ganze Zahl. Damit finden wir

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 + 8ab + 16b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9} a^2 + \frac{2}{9} \cdot b^2 - \frac{8ab}{9}$$

gilt. Dies gelingt uns aber mit $b'^2 = \frac{1}{9}(4a^2 - 4ab + b^2) = \frac{1}{9}(2a - b)^2$. Also erhalten wir für $b' = \frac{|2a-b|}{3}$ ein zu (a, b) passendes Lösungspaar (a‘, b‘). Damit treten im Fall, dass a und b bei Division durch 3 unterschiedliche Reste lassen, Lösungspaare in gerader Zahl auf, wenn die passenden Lösungspaare tatsächlich verschieden sind. Eine Ausnahme finden wir im Fall $a = a$‘ und $b = b$‘, also wenn gilt

$$a = \frac{a + 4b}{3} \quad \leftrightarrow \quad a = 2b.$$

Diese Bedingung führt gleichzeitig zu b‘ $= b$, d.h. in diesem Fall existiert eine einzelne Lösung, so dass $r(n)$ ungerade ist. Gilt $a = 2b$, so lautet die Gleichung (1)

$$a^2 + 2 \cdot b^2 = 4 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 = 6 \cdot b^2 = 3 \cdot (2 \cdot b^2) = 3 \cdot n,$$

also ist $r(n)$ genau dann ungerade, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl b gibt, für die $n = 2 \cdot b^2$ gilt. In diesem Fall existiert immer diese einzelne Lösung, unabhängig davon, ob es weitere paarweise Lösungspaare gibt.

Mit ähnlicher Argumentation setzen wir fort: Lassen a und b bei Division durch 3 gleiche Reste (wie zum Beispiel für $n = 11$), so ist $a' = \frac{|a-4b|}{3}$ wieder eine positive ganze Zahl. Nehmen wir an, dass es ein dazu einpassendes b‘ gibt, so muss gelten

$$a'^2 + 2 \cdot b'^2 = \frac{a^2 - 8ab + 16b^2}{9} + 2 \cdot b'^2 = 3n$$

Diese Gleichung wäre erfüllt, wenn

$$2 \cdot b'^2 = \frac{8}{9} a^2 + \frac{2}{9} \cdot b^2 + \frac{8ab}{9}$$

gilt. Dies gelingt uns aber mit $b'^2 = \frac{2}{9}(4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{1}{9}(2a + b)^2$. Also erhalten wir für $b' = \frac{2a+b}{3}$ ein zu (a, b) passendes Lösungspaar $(a‘, b‘)$. Damit treten im Fall, dass a und b bei Division durch 3 gleiche Reste lassen, Lösungspaare in gerade Zahl auf, wenn die passenden Lösungspaare tatsächlich verschieden sind. Eine Ausnahme finden wir im Fall $a = a‘$ und $b = b‘$, also wenn gilt

$$b = \frac{2a + b}{3} \quad \leftrightarrow \quad a = b.$$

Diese Bedingung führt gleichzeitig zu $a‘ = a$, d.h. in diesem Fall existiert eine einzelne Lösung, so dass $r(n)$ ungerade ist. Gilt $a = b$, so lautet die Gleichung (1)

$$a^2 + 2 \cdot b^2 = a^2 + 2 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2 = 3 \cdot n,$$

also ist $r(n)$ genau dann ungerade, wenn es eine positive ganze, nicht durch 3 teilbare Zahl a gibt, für die $n = a^2$ gilt. In diesem Fall existiert immer diese einzelne Lösung, unabhängig davon, ob es weitere paarweise Lösungspaare gibt.

Außerdem können nicht beide einzelnen Lösungen gleichzeitig auftreten, da sich die Bedingungen gegenseitig ausschließen. ❑

Anmerkung der Aufgabenkommission: Eine grundsätzliche heuristische Vorgehensweise ist nicht als Teil einer vollständigen Lösung zu erwarten. Für eine vollständige Lösung reicht es, f wie in (2) zu definieren und die danach zusammengefassten Eigenschaften zu zeigen (was einfach ist); die Angabe, wie man auf so ein f kommt, ist nicht notwendig (und würde sich im Zweifel partiell auf einem Konzeptblatt wiederfinden). In den Lösungshinweisen wird die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise erläutert, die zu den Lösungspaaren führt. Dazu wird die

Involution

als eine selbstinverse Abbildung eingeführt. Die Bezeichnung leitet sich von dem lateinischen Wort *involvere* „einwickeln“ ab.

Definition. Eine Abbildung $f: A \to A$ mit übereinstimmender Definitions- und Zielmenge A heißt genau dann eine *Involution*, wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(f(x)) = x$.

Beispiele. Negatives und Kehrwert: Die Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x$$

und

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$$

sind Involutionen, denn es gilt

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}\text{: } -(-x) = x$$

bzw.

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}, x \neq 0\text{: } \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

Logik: Die Negation in der klassischen Logik ist ebenfalls eine Involution, denn es gilt für alle x: $\neg(\neg x) \leftrightarrow x$.

Es sei $L = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + 2 \cdot b^2 = 3 \cdot n\}$ die Lösungsmenge der Gleichung (1) mit ganzen Zahlen. Wir untersuchen, ob Lösungen $s \in L$ „normalerweise" in Paaren vorkommen, indem wir nach einer zu sich selbst inversen Abbildung $f: L \to L$ (einer Involution) suchen, die $s = (a,b) \in L$ auf $s' = f(s) = (a',b') \in L$ und s' auf $f(s') = s$ abbildet. Die Zuordnung $s \leftrightarrow s'$ induziert dann eine Paarbildung, wenn $s \neq s'$ gilt. Ist $s = s'$ möglich, so gibt es in L auch gewisse bzgl. f „singuläre" Elemente.

Um eine solche Involution f zu finden, setzen wir $a' = u_1 a + u_2 b, b' = v_2 a + v_2 b$ mit unbestimmten Koeffizienten u_1, u_2, v_1, v_2 und leiten (hinreichende – wir wollen nicht alle denkbaren Involutionen, sondern nur eine für unsere Zwecke geeignete finden) Bedingungen für diese Koeffizienten ab. Damit f eine Involution ist, muss

$$a'' = u_1 a' + u_2 b' = u_1(u_1 a + u_2 b) + u_2(v_1 a + v_2 b) = a$$

und

$$b'' = v_1 a' + v_2 b' = v_1(u_1 a + u_2 b) + v_2(v_1 a + v_2 b) = b$$

gelten. Koeffizientenvergleich führt auf die Gleichungen

$$u_1^2 + u_2 \cdot v_1 = 1\,, u_2 \cdot (u_1 + v_2) = 0\,, v_1 \cdot (u_1 + v_2) = 0, v_2^2 + u_2 \cdot v_1 = 1$$

die für $v_2 = -u_1$ und $u_1^2 + u_2 \cdot v_1 = 1$ erfüllt sind.
Damit $s' = f(s) \in L$ für $s \in L$ erfüllt ist, muss

$$\begin{aligned} 3 \cdot n = a^2 + 2 \cdot b^2 = {a'}^2 + 2 \cdot {b'}^2 = (u_1 \cdot a + u_2 \cdot b)^2 + 2 \cdot (v_1 \cdot a + v_2 \cdot b)^2 \\ = (u_1^2 + 2 \cdot v_1^2) \cdot a^2 + (2 \cdot u_1 \cdot u_2 + 4 \cdot v_1 \cdot v_2) \cdot a \cdot b + (u_2^2 + 2 \cdot v_2^2) \cdot b^2 \end{aligned}$$

gelten, was für $u_1^2 + 2 \cdot v_1^2 = 1, u_2 - 2v_1 = 0, u_2^2 + 2u_1^2 = 2$ erfüllt ist, wobei in den letzten beiden Beziehungen $v_2 = -u_1$ verwendet wurde. Setzen wir $u_1 = -v_2 = u$, $v_1 = v$ und damit $u_2 = 2 \cdot v_1 = 2 \cdot v$, so sind die linearen Transformationen $a' = u \cdot a + 2 \cdot v \cdot b$, $b' = v \cdot a - u \cdot b$ mit rationalen u, v, die $u^2 + 2 \cdot v^2 = 1$ erfüllen, gute Kandidaten für eine Involution f mit den oben beschriebenen Eigenschaften.

Eine rationale Lösung der Gleichung $u^2 + 2 \cdot v^2 = 1$ ist $\left(u = \frac{1}{3}, v = \frac{2}{3}\right)$. Diese Lösung führt auf die Involutionen

$$f(a,b) = \left(a' = \frac{a+4b}{3}, b' = \frac{|2a-b|}{3}\right) \quad (2.1)$$
$$f(a,b) = \left(a' = \frac{|a-4b|}{3}, b' = \frac{2a+b}{3}\right) \quad (2.2)$$

Damit die Involution für unsere Zwecke verwendet werden kann, müssen a' und b' noch ganzzahlig sein. Das ist genau für (2.1) dann der Fall, wenn $a + 4 \cdot b$ und $2 \cdot a - b$ durch 3 teilbar sind, also im Fall $a + 4 \cdot b \equiv a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$ und genau für (2.2) dann der Fall, wenn $a - 4 \cdot b$ und $2 \cdot a + b$ durch 3 teilbar sind, also im Fall $a - 4 \cdot b \equiv a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$. Das ist jeweils in der „Hälfte“ der Fälle so, denn zwei nicht durch 3 teilbare Zahlen a und b lassen bei Division durch 3

– entweder denselben Rest, dann ist $a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$,
– oder verschiedene Reste, dann ist $a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$.

Wir fassen das Ergebnis der Untersuchungen zusammen: Auf der Menge $L = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \colon a^2 + 2b^2 = 3n, a \pm b \equiv 0 \ (mod\ 3)\}$ sind die in (2.1) bzw. (2.2) beschriebenen Abbildungen Involutionen, also Abbildungen, bei denen für $s = (a,b) \in L$ stets $s' = f(s) \in L$ und $s'' = f(s') = s$ gilt. Wegen

$$a' + b' = \frac{a+4b}{3} + \frac{|2a-b|}{3} = a + b \equiv 0 \ (mod\ 3)$$
$$a' + b' = \frac{|a-4b|}{3} + \frac{2a+b}{3} = a - b \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

ist in der Tat mit $s \in L$ auch $s' \in L$.

Die Fachbegriffe werden in der Musterlösung lediglich verwendet, um eine Verbindung der benutzten Ideen zur weiterführenden Literatur zu schaffen. Die hier genutzte Art der Paarbildung, um gerade Anzahlen von ungeraden zu unterscheiden, ist eben eine so oft hilfreiche Heuristik, dass die verwendete Sorte von Funktionen sogar einen eigenen Namen bekommen hat. Es ist nicht nötig, diese Fachbegriffe zu kennen oder zu verwenden.

Die grundsätzliche heuristische Vorgehensweise für sich genommen ist aber durchaus ein wesentlicher Schritt hin zur Lösung der Aufgabe und das Verfolgen des dort geschilderten Ansatzes ist durchaus bei nicht gelungenem Beweis Teilpunkte wert, selbst wenn in der Abgabe nur relevante Teile dieses heuristischen Vorgehens geschildert sind.

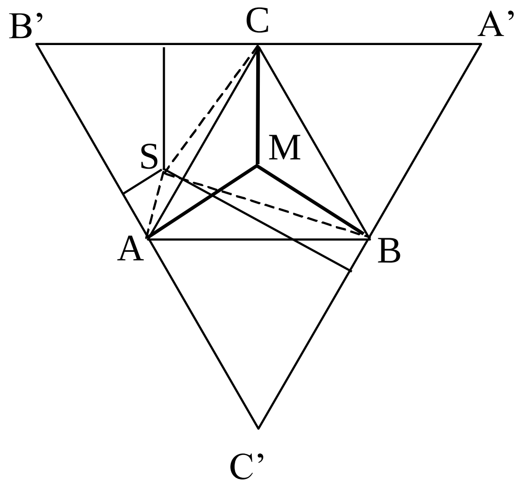
Hat man den Beweis also auf Konzeptpapier nicht gefunden, ist es durchaus sinnvoll, kluge Ideen zum Finden eines Beweises auf die Reinschrift zu übertragen, die man bei gefundenem Beweis dort nicht mehr benötigt.

Konstruktion des Fermat-Punktes[3]

Aufgabe KZM 2-5A. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.
(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT -Punkt.
(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180° einen FERMAT -Punkt?

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt. Betrachten wir das gleichseitige Dreieck $\Delta A'B'C'$, das aus ΔABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $\Delta A'B'C'$.

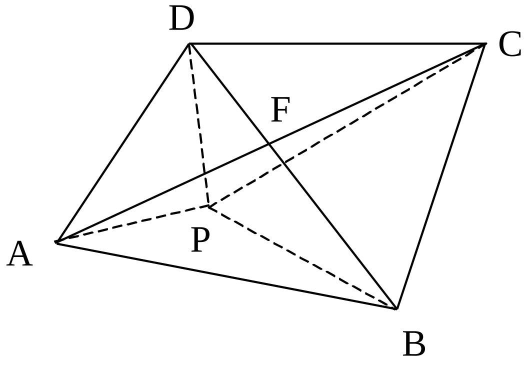


Im gleichseitigen Dreieck $\Delta A'B'C'$ ist nach dem Satz von VIVIANI[4] die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des Dreiecks $\Delta A'B'C'$.

Der *Beweis* dieser Aussage ist einfach: Man betrachte die Dreiecke $\Delta A'B'S$, $\Delta B'C'S$ und $\Delta A'C'S$. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'B'C'$. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

[3] Nach Engelhaupt, H.: Kürzeste Wege (Teil I). In: Mathematikinformation Nr. 41. Universität Gesamthochschule Kassel, 2004.
[4] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

(Für M stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von S zu den Eckpunkten A, B und C können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten sein. Liegt dagegen S außerhalb des Dreiecks $\Delta A'B'C'$, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von M aus.

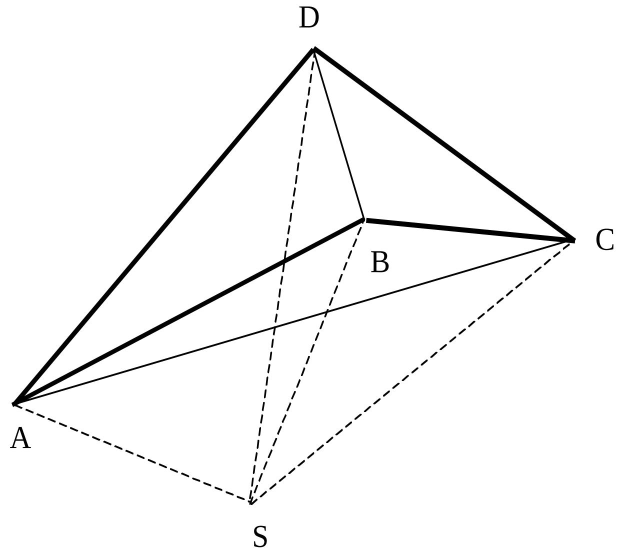


Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Es sei F der Schnittpunkt der Diagonalen und P ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken ΔAPC bzw. ΔDPB:

$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AC}| = |\overline{AF}| + |\overline{FC}|$$
$$|\overline{BP}| + |\overline{PD}| \geq |\overline{BD}| = |\overline{BF}| + |\overline{FD}|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der beiden Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von P zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalenschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe c): Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze B) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei S ein beliebiger, von B verschiedener Punkt der Ebene.



Die drei Dreiecke ΔASC, ΔCSD und ΔDAS überdecken das Dreieck ΔACD und somit das konkave Viereck $ABCD$. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt B. Es sei dies das Dreieck ΔSCD. Dann liegt der Streckenzug CBD vollständig innerhalb des Dreiecks ΔSCD und somit gilt:

$$|\overline{CS}| + |\overline{SD}| \geq |\overline{CB}| + |\overline{BD}|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.) Im Dreieck ΔABS gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$|\overline{AS}| + |\overline{SB}| \geq |\overline{AB}|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls S zwischen AB liegt.) Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von S zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von B zu den Eckpunkten A, C und D. Der Punkt B ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. ❑

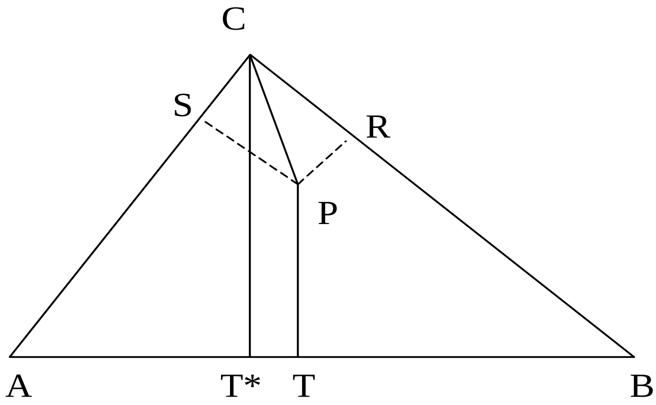
Wir betrachten nun ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit der Basisseite $\overline{AB} = c$ und den Schenkeln der Länge a, dessen Winkel an der Basisseite größer als 60° sind. Gibt es dafür eine ähnliche Eigenschaft?

Für einen beliebigen Punkt P im Innern des Dreiecks und dessen Abständen zu den Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, die wir wieder mit h_c, h_a und h_b bezeichnen, gilt

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = c \cdot h = a \cdot (h_a + h_b) + c \cdot h_c$$

Wenn $h_c = 0$ gilt, liegt P auf der Seite $\overline{AB}$. Damit ist für alle Punkte P auf der Basisseite die Summe der Abstände konstant, denn wir finden $h_a + h_b = \frac{c \cdot h}{a}$. Wählen wir dagegen $P = C$, so reduziert sich die Summe der Abstände auf h_c.

Seien T^* der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC und R, S, T die Fußpunkte der Lote von P auf die Dreiecksseiten. Dann ist die die Summe der Strecken PR und PS größer als die Strecke $\overline{CP}$ (als Diagonale im Rechteck $CSPR$). Weiterhin ist $\overline{|CP|} + \overline{|PT|}$ größer als $\overline{|CT^*|}$. Also gilt für jeden Punkt P:



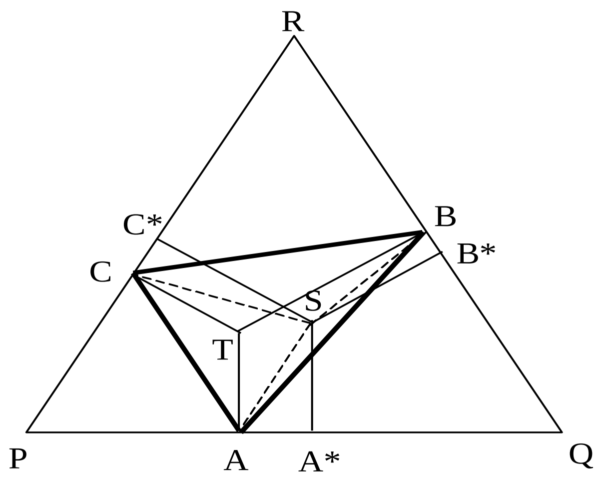
$$\left|\overline{PR}\right| + \left|\overline{PS}\right| + \left|\overline{PT}\right| \geq \left|\overline{PT}\right| + \left|\overline{PC}\right| \geq \left|\overline{PT^*}\right|.$$

Im Folgenden untersuchen wir nicht die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten, sondern die Summe der Abstände zu den Eckpunkten eines Dreiecks. Wenn es einen Punkt gibt, der diese Summe minimiert, so wird er FERMAT-Punkt genannt (da FERMAT in seinem Manuskript „MAXIMA ET MINIMA“ die Aufgabe stellte *„Gegeben sind drei Punkte, gesucht ist ein vierter Punkt, so dass die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.“*, selbst aber keine Lösung veröffentlichte).

Es sei also ΔABC ein beliebiges Dreieck. Der Punkt T sei so gewählt, dass die Strecken $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ und $\overline{TC}$ bei T gleiche Winkel bilden (also jeweils 120°). Nun zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck ΔPQR derart, dass dessen Seiten auf TA, TB und TC senkrecht stehen. Dies ist möglich, da im Viereck $TBRC$ die gegenüberliegenden Winkel zusammen 180° ergeben, folglich beträgt der Innenwinkel bei R $180° - 120° = 60°$.

Fällen wir nun von einem beliebigen, von T verschiedenen inneren Punkt S die Lote auf die Seiten des gleichseitigen Dreiecks PQR, so gilt

$$\left|\overline{TA}\right| + \left|\overline{TB}\right| + \left|\overline{TC}\right| = \left|\overline{SA*}\right| + \left|\overline{SB*}\right| + \left|\overline{SC*}\right|$$



Nun gelten aber im rechtwinkligen Dreieck ΔA^*SA die Ungleichung $\left|\overline{SA*}\right| \leq \left|\overline{SA}\right|$ und ebenso die entsprechenden Ungleichungen für die Punkte B, B^* bzw. C, C^*, also minimiert der Punkt T die Summe.

Wir konstruieren nun einen solchen Punkt. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz. In einem Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° schneiden sich die Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ΔABD, ΔBCF und ΔACG in einem Punkt.

Beweis: Die Umkreise der Dreiecke ΔACG und ΔABE schneiden sich im Punkt A und in einem weiteren Punkt P. Betrachten wir das Viereck $GAPC$, das laut Konstruktion ein Sehnenviereck ist (alle vier Eckpunkte liegen auf dem Umkreis). Da sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen und im aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ΔACG der Winkel $|\sphericalangle CGA| = 60°$ beträgt, finden wir $|\sphericalangle APC| = 120°$. Auch das Viereck $ADBP$ ist ein Sehnenviereck, so dass wir mit ähnlicher Argumentation von $|\sphericalangle BDA| = 60°$ auf $|\sphericalangle APB| = 120°$ schließen können.

Wegen $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPA| + |\sphericalangle BPC| = 360°$ erhalten wir $|\sphericalangle BPC| = 120°$.

Nach Umkehrung des Sehnensatzes ist das Viereck ebenfalls ein Sehnenviereck, weil sich die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle BPC$ und $\sphericalangle CFB$ zu 180° ergänzen. Somit liegt der Punkt P auch auf dem Umkreis des Dreiecks ΔBCF.

Wir zeigen nun noch, dass sich dieser gemeinsame Punkt P sehr leicht konstruieren lässt.

Satz. In einem Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° sei P der gemeinsame Punkt der Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ΔABD, ΔBCF und ΔACG. Dann liegen A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils auf einer Geraden.

Beweis: Die Dreiecke ΔADC und ΔABG sind ähnlich (SWS), denn
- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ΔACG gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$,
- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ΔABD gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AE}|$ und
- $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAC| = 60° + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle GAC| + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAG|$.

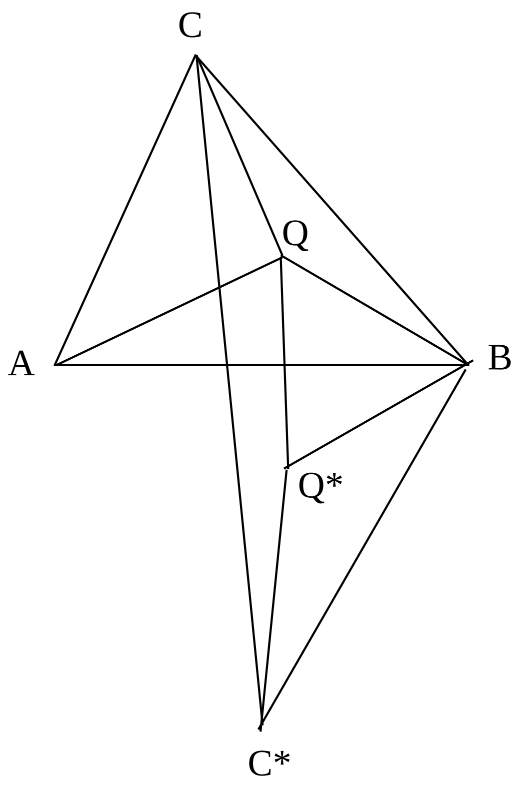
Damit stimmen auch die Winkel $\sphericalangle AGB$ und $\sphericalangle ACE$ in ihren Größen überein. Wenden wir im Dreieck ΔCGP den Innenwinkelsummensatz an, erhalten wir:

$$|\sphericalangle CPG| + (60° - |\sphericalangle AGB|) + (60° + |\sphericalangle ACE|) = 180°, \text{ also } |\sphericalangle CPF| = 60°.$$

Mit ähnlicher Argumentation zeigen wir, dass auch $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPE| = 60°$ gilt.

Da wir die Größen der Winkel $|\sphericalangle FPD| = |\sphericalangle DPE| = |\sphericalangle EPF| = 120°$ kennen, erhalten wir $|\sphericalangle APE| = |\sphericalangle BPF| = |\sphericalangle CPD| = 180°$ und schließen daraus, dass A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils kollinear sind. ❑

Aufgrund dieser Überlegung finden wir für ein beliebiges Dreieck ΔABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° folgende Konstruktionsvorschrift für den FERMAT-Punkt: Wir konstruieren die gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten nach außen (z.B. ΔABC^* über $\overline{AB}$) und verbinden die neuen Ecken A^*, B^* und C^* mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B bzw. C. Diese drei Verbindungsstrecken schneiden sich ein einem Punkt P, dem gesuchten FERMAT-Punkt.



Im Jahr 1929 wird von J. E. HOFMANN[5] die Existenz des FERMAT-Punktes geometrisch begründet: Gegeben sei ein Dreieck ΔABC, dessen Innenwinkel alle kleiner als 120° sind. Wir wählen im Innern einen Punkt Q und verbinden ihn mit den Ecken des Dreiecks. Drehen wir die Figur um den Punkt B um 60°, so sind die Dreiecke ΔBQQ^* und ΔABC^* gleichseitig (Bezeichnung wie in nebenstehender Skizze).

Die Streckenzüge $|\overline{CQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{AQ}|$ und $|\overline{CQ}| + |\overline{QQ^*}| + |\overline{QC^*}|$ haben die gleiche Länge, wobei der zweitgenannte Streckenzug unabhängig von Q immer in C^* endet.

Offensichtlich ist die Länge des zweitgenannten Streckenzuges minimal, wenn Q und Q^* auf der Geraden durch C und C^* liegen.

Aus dieser Argumentation lässt sich folgende Konstruktion herleiten:

Wir konstruieren auf $\overline{AB}$ das gleichseitige Außendreieck ΔABC^* und verbinden C mit C^*. Um auf CC^* den Punkt F zu finden, für den $|\sphericalangle AFB| = 120°$ erfüllt wird, zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks ΔABC^*. Der Schnittpunkt F mit CC^* ist der FERMAT-Punkt, da das Viereck AC^*BF ein Sehnenviereck ist.

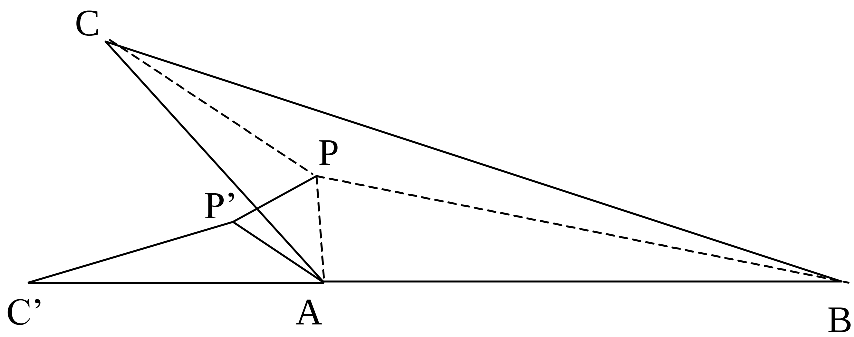
Den FERMAT-Punkt können wir auch experimentell finden: Wir zeichnen das Dreieck ΔABC auf eine Tischplatte und bohren an den Eckpunkte Löcher durch die Platte. Drei

[5] JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN (deutscher Mathematik-Historiker, 1900 - 1973)

Schnüre werden in einem Punkt P verknotet. Die drei Enden werden durch diese Löcher geführt (möglichst über Rollen, um die Reibungsverluste zu minimieren) und mit gleich schweren Gewichten belastet. Dann werden die drei in P angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies ist nur möglich, wenn die Richtungen der drei Kräfte jeweils einen Winkel von 120° einschließen.

Gibt es auch in stumpfwinkligen Dreiecken, bei denen der stumpfe Winkel größer als 120° ist, einen FERMAT-Punkt?

Wir nehmen an, im Dreieck ΔABC mit$|\sphericalangle BAC| > 120°$ gäbe es einen Punkt P im Innern des Dreiecks, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten minimal sei.



Wir drehen das Dreieck ΔAPC um den Punkt A gegen den Uhrzeiger so, dass der Punkt C' auf die Gerade AB fällt. Der Drehwinkel ist (wegen $|\sphericalangle BAC| > 120°$) kleiner als $60°$. Deshalb ist die Strecke $\overline{PP'}$ kleiner als die Strecke $\overline{AP}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}&|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| > \left|\overline{PP'}\right| + |\overline{PB}| + \left|\overline{P'C'}\right| \\ &> \left|\overline{BC'}\right| = |\overline{AB}| + \left|\overline{AC'}\right| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|.\end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität der Abstandssumme für den Punkt P.

Satz. In einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel realisiert der Eckpunkt mit dem stumpfen Winkel die kleinste Summe der Abstände zu den Eckpunkten.

Beweis: Wir betrachten dazu ein Dreieck ΔABC mit $|\sphericalangle BAC| > 120°$. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P im Innern des Dreiecks mit minimaler Summe

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| < |\overline{AC}| + |\overline{AB}|.$$

Da wegen $|\sphericalangle BAC| > 120°$ erst recht $|\sphericalangle BPC| > 120°$ gilt, muss mindestens einer der Winkel $\sphericalangle APC$ oder $\sphericalangle APC$ kleiner als 120° sein. O.B.d.A. nehmen wir an, dass dies im Dreieck ΔABP erfüllt sei. Dann gibt es im Innern dieses Teildreiecks einen Punkt F mit

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FP}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

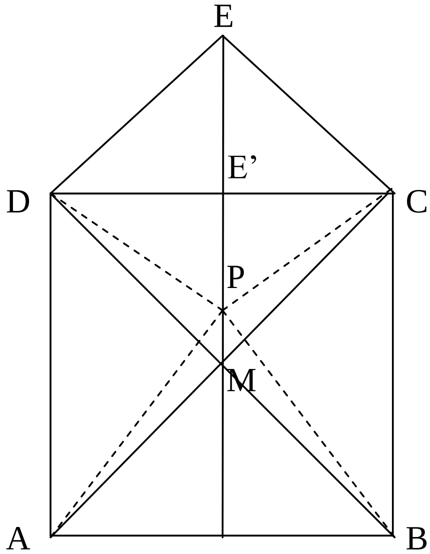
Nach der Dreiecksungleichung gilt zudem $|\overline{CF}| < |\overline{CP}| + |\overline{PF}|$. Die Addition der beiden Ungleichungen führt zu

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}|,$$

im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Summe für den Punkt P. Also realisiert C den Fermat-Punkt im Dreieck mit stumpfem Winkel bei C. ❑

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und mit einem auf $\overline{CD}$ aufgesetzten Dreieck ΔCDE. Man bestimme die Lage des Punktes P, für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.

Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt P auf der Verbindung des Mittelpunktes M des Quadrates $ABCD$ und E. Sei der Abstand des gesuchten Punkts P zum M gleich x. Es genügt zunächst, die Summe $S(x)$ der Abstände von P zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt E' von ME mit CD zu ermitteln. Dafür gilt:



$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} + \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

Wir finden ein Minimum für $S(x)$ bei $x \approx 0{,}3122 \cdot a$. Da der Punkt P im Innern des Quadrates liegt, ist P auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks *ABCDE*. ❑

Aufgabe. Es sei $ABCD$ eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche ΔABC (Seitenlänge a) und der Spitze D (Höhe h). Man finde den Punkt F, so dass die Summe der Abstände von F zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt F auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche x. Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände $S(x)$:

$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Wir finden das Minimum für $S(x)$ bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit F der FERMAT-Punkt ist, darf h nicht kleiner als x sein, andernfalls ist D der FERMAT-Punkt. ❑

Bundeswettbewerb Mathematik 2025

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung gGmbH von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs sind die LEPPER Stiftung und der Arbeitgeberverband Gesamtmetall.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In zwei Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem Kolloquium, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit

Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt.“

Die Teilnehmerzahlen[6] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Schuljahr 2021/22).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)
2023/24	1189	378 (31.8%)	62 (5.2%)	28 (45.1%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2023/24 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 67 sächsischen Teilnehmern wurden 3 erste, 2 zweite und 25 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (44.8%, bundesweit 26.5%). Dazu kamen noch 30 Anerkennungsurkunden (44.8%). Somit wurden in Sachsen 89.6% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 87.6%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)
2023/24	289	110 (38.1%)	14 (4.8%)	7 (50.0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2023/24 wurden insgesamt 198 Preise vergeben (68.5% aller Teilnehmer), darunter 4 erste, 2 zweite und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (71.4% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 5 Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden die regionalen Auszeichnungsveranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen wurden am 28.

---

[6] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

November bei der Investitionsbank Berlin (IBB) empfangen. Frau CHRISTINA HENKE (Staatssekretärin für Bildung der Berliner Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie) begrüßte die Teilnehmer der Veranstaltung. Den Festvortrag hielt Dr. HINRICH HOLM (Vorstandsvorsitzender IBB)

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2025 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 4. März 2025 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

Termine

Bildung & Begabung gGmbH Bonn, 1. Dezember 2024: Start des Bundewettbewerbs Mathematik 2025. Ausschreibung und Aufgaben unter www.mathe-wettbewerbe.de/bwm (Einsendeschluss 3. März 2025)

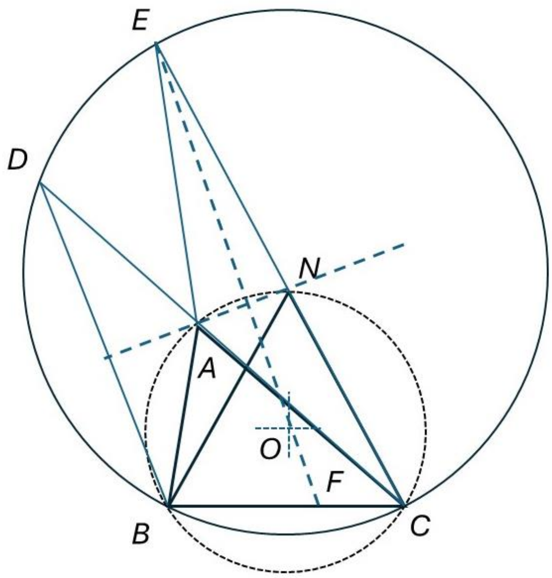
Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 19. Dezember 2024: Weihnachtsvorlesung *"Macht hoch die Tür, Tor 3 macht weit! - Das Ziegenproblem und andere Paradoxien der Stochastik", Prof.* Dr. UTA FREIBERG (Professor Stochastik), 09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 90, Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude, Hörsaal C10.114, Beginn 17:15 Uhr.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2024.

Aufgabe T-3 (Teamwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Sei ΔABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60°$. Sei D ein Punkt auf der Geraden AC, sodass $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ gilt und A zwischen C und D liegt. Angenommen, es existieren zwei Punkte $E \neq F$ auf dem Umkreis des Dreiecks ΔDBC, sodass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$ gilt.

Zeige, dass die Gerade EF durch den Umkreismittelpunkt von ΔABC verläuft.

Lösungshinweise: Es sei N der Mittelpunkt des Bogens $\widehat{BAC}$. Dann ist das Dreieck ΔNBC gleichseitig, denn $|\sphericalangle BNC| = 60°$ und N liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$. Außerdem liegt N auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$, der die Mittelsenkrechte des Segments $\overline{BD}$ ist, wenn wir das gleichschenklige Dreieck ΔABD betrachten. Daher ist N der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔDBC.



Da das Dreieck ΔNBC gleichseitig ist, ist der Umfangsradius des Dreiecks ΔDBC die Länge von $\overline{BC}$. Wir haben also $|\overline{BC}| = |\overline{NE}| = |\overline{NF}|$ und wissen, dass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$, also das Viereck $AENF$ ein Rhombus ist. Daher ist die Linie EF die Mittelsenkrechte von $\overline{AN}$. $\overline{AN}$ ist jedoch eine Sehne des Umkreises des Dreiecks ΔABC, so dass seine Mittelsenkrechte durch O verläuft. ❑

Monatsaufgabe 12/2024[7].

Für eine positive ganze Zahl n bezeichne $\sigma(n)$ die Summe der positiven Teiler von n.

Bestimme alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle positiven ganzen Zahlen k der Wert $P(k)$ durch $\sigma(k)$ teilbar ist.

[7] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.01.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[8]	Nr.	Thema	Aufgabe
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.