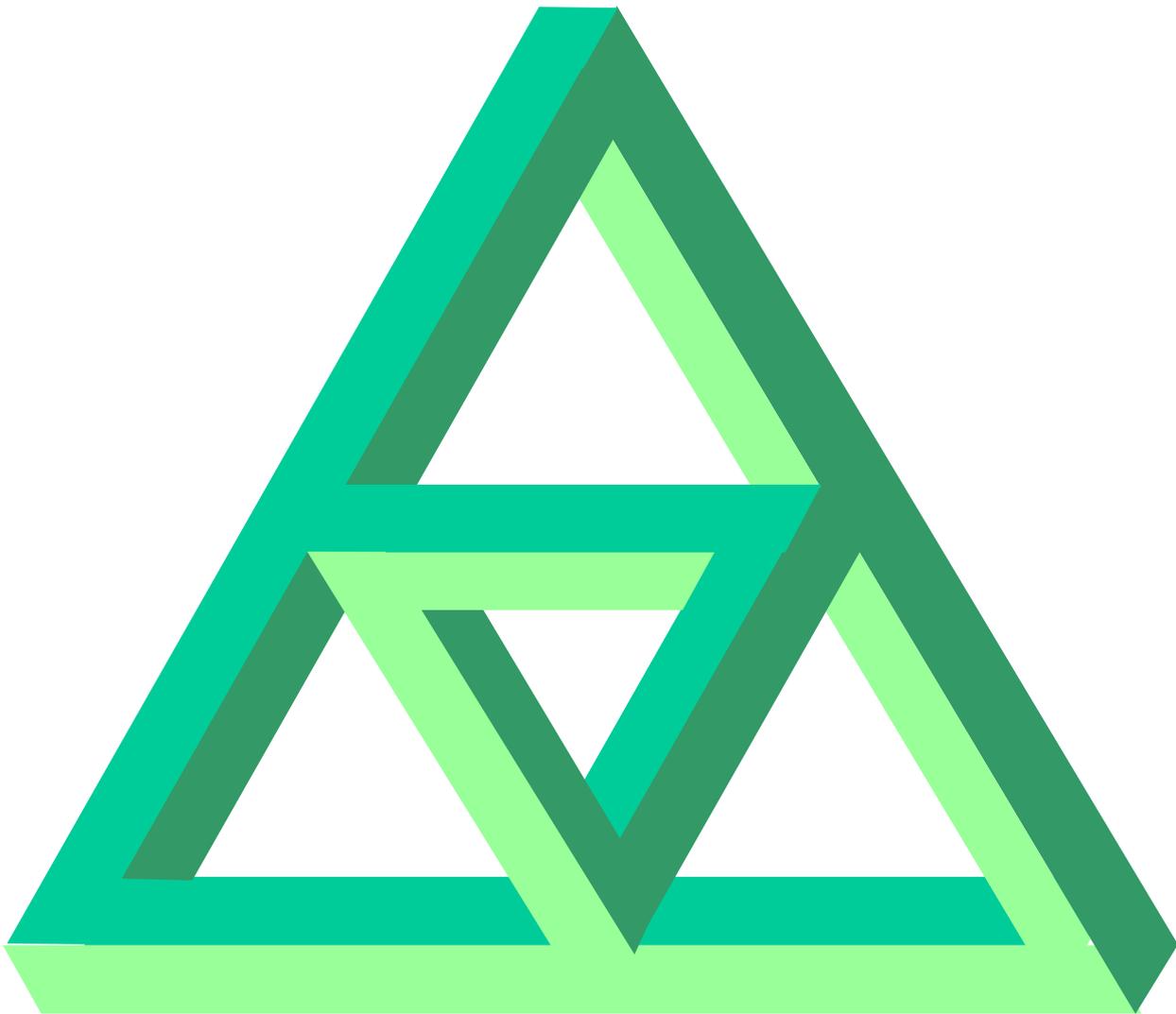


# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

---



## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben<sup>1</sup> thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10<sup>2</sup> haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken auf die Aufgaben der ersten Runde der 64. MO zurück. Wir erkennen in mehreren Aufgaben Themen wieder, die in früheren Ausgaben der „Mathematischen Kostproben“ diskutiert wurden. Insbesondere greifen wir für die Aufgabe **MO641012** das **Thema 19** „Maximale Flächeninhalte“ mit der Suche nach extremalen Situationen in ebenen Figuren auf. Neben dem Prinzip der schrittweisen konstruktiven Vergrößerung vorgegebener Größen bis zu Extremwerten untersuchen wir auch die Optimierung von Streckenzügen mittels Konstruktion kürzester Verbindungsgeraden.

Mit dem Aufgabenpaar **MO641015** und **MO641016** sehen wir weitere Beispiele, in denen die Erfahrungen aus Aufgaben vergangener Olympiaden einen Zugang zum Lösungsansatz vereinfachen. Während das **Thema 3** „Gleichungssysteme“ schon länger zurück liegt, wurde das **Thema 22** „Zahlenverteilungen auf ebenen oder räumlichen Figuren“ erst 2023 intensiv diskutiert. Die damals gezeigten Lösungsstrategien lassen sich auf die aktuellen Aufgaben übertragen.

Im historischen Einblick nutzen wir einen Beitrag von Karl Wilhelm Feuerbach aus dem Jahr 1822, in dem er den Umfang des Höhenfußpunktes berechnete.

---

<sup>1</sup> [www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de)

<sup>2</sup> [https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no\\_cache=1](https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1)

## Thema 19.2 – Maximale Eigenschaften von ebenen Figuren

**Aufgabe 19.06 – MO641012.** In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

*Hinweis:* In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$ .

Im ersten Teil der Thematik 19 „Maximale Flächeninhalte“ (s. Heft 12/2022) diskutierten wir u.a. folgende

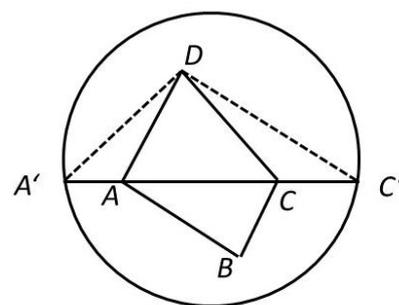
**Aufgabe 19.01 – MO620924.** Zeigen Sie: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks  $\triangle XYZ$  alle auf dem Rand oder im Inneren eines Quadrats  $ABCD$ , so ist der Flächeninhalt des Quadrats mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

Ein Lösungsansatz beruhte auf der schrittweisen Vergrößerung des gegebenen Dreiecks  $\triangle XYZ$ , so dass schließlich die Eckpunkte des vergrößerten Dreiecks  $\triangle X'Y'Z'$  auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Quadrates  $ABCD$  liegen. Es ist einfach zu zeigen, dass ein solches Dreieck nur einen Flächeninhalt haben kann, der halb so groß wie der des Quadrates ist. Es bedurfte allerdings einer sorgfältigen Fallunterscheidung zur Lage der drei Punkte  $X, Y, Z$ , um sicherzustellen, dass die Punkte  $X', Y'$  und  $Z'$  die gewünschte Lage einnehmen. Für die aktuelle Aufgabe erscheint die Lösung ohne derartige Probleme.

*Lösungshinweise zu MO641012:* Da die Innenwinkel im konvexen Viereck  $ABCD$  kleiner als  $180^\circ$  sind, liegen die Diagonalen des Vierecks stets vollständig in ihm. Liegen nicht alle Eckpunkte auf dem Rand des Kreises, so wählen wir eine Diagonale aus, bei der mindestens ein Endpunkt im Innern des Kreises liegt. Es sei dies o.B.d.A. die Diagonale  $\overline{AC}$ . Wir verlängern  $\overline{AC}$  über  $A$  und  $C$  hinaus, so dass Schnittpunkte  $A'$  bzw.  $C'$  mit der Kreislinie entstehen (dabei ist  $A' = A$  oder  $C' = C$  möglich).

Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle A'C'D$  ist wegen  $|\overline{A'C'}| \geq |\overline{AC}|$  bei gleicher Höhe nicht kleiner als der des Dreiecks  $\triangle ACD$ .

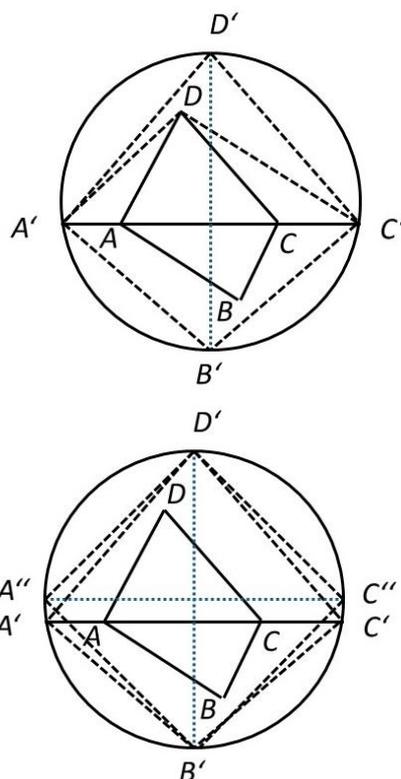
Betrachten wir nun den Schnittpunkt  $D'$  der Mittelsenkrechten von  $\overline{A'C'}$  mit der Kreislinie (auf der gleichen Seite wie  $D$ ). Wir erkennen: Da der Abstand des Punktes  $D'$  zu  $A'C'$  nicht kleiner als der Abstand des



Punktes  $D$  zu  $A'C'$  ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta A'C'D'$  nicht kleiner als der des Dreiecks  $\Delta A'C'D$  und deshalb nicht kleiner als der des Dreiecks  $\Delta ACD$ .

Mit analoger Argumentation konstruieren wir den Punkt  $B'$  als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $\overline{A'C'}$  mit der Kreislinie (auf der gleichen Seite wie  $B$ ). Dann ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta A'C'B'$  nicht kleiner als der des Dreiecks  $\Delta ACB$ .

Weil der Mittelpunkt des Kreises auf der Mittelsenkrechten liegt, ist  $\overline{B'D'}$  ein Durchmesser des Kreises. Nun konstruieren wir dessen Mittelsenkrechte, die die Kreislinie in  $A''$  (auf der Seite wie  $A$ ) und  $C''$  (auf der Seite wie  $C$ ) schneidet. Wie oben erkennen wir, dass die Flächen der Dreiecke  $\Delta A''B'D'$  und  $\Delta B'C''D'$  nicht kleiner als die der Dreiecke  $\Delta ABD$  bzw.  $\Delta BCD$  sind.



Insgesamt ist somit der Flächeninhalt des Vierecks  $A''B'C''D'$  maximal. Da seine Diagonalen als Durchmesser des Kreises gleich lang sind und nach Konstruktion senkrecht aufeinander stehen, ist  $A''B'C''D'$  ein Quadrat.  $\square$

*Lösungsvariante:* Wir wählen eine Diagonale des Vierecks  $ABCD$  aus, o.B.d.A.  $\overline{AC}$ . Da die Strecke  $\overline{AC}$  innerhalb des Kreises einschließlich seines Randes liegt, gilt für den Kreisdurchmesser  $d$  stets  $|\overline{AC}| \leq d$ . Wir fällen von  $B$  und von  $D$  die Lote auf  $\overline{AC}$  mit den Fußpunkten  $H_B$  bzw.  $H_D$ . Wir finden nun  $|\overline{BH_B}| + |\overline{DH_D}| \leq d$ , denn entweder liegen die Lote bereits auf dem zu  $\overline{AC}$  senkrechten Durchmesser oder sie können dahin verschoben werden, ohne die Kreislinie zu schneiden. Damit erhalten wir

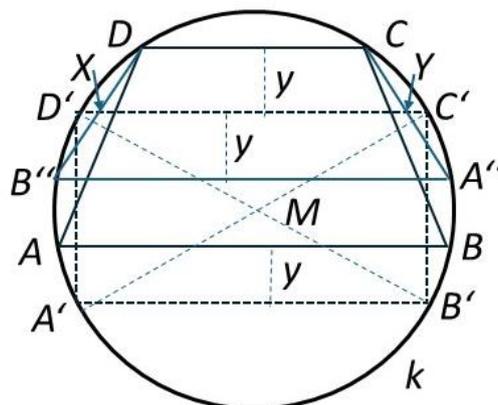
$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BH_B}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{DH_D}| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot d \cdot (|\overline{BH_B}| + |\overline{DH_D}|) \leq \frac{1}{2} \cdot d^2 \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $\overline{AC}$  ein Durchmesser ist und  $B$  und  $D$  die Endpunkte des zu  $\overline{AC}$  senkrecht stehenden Durchmessers sind. Unter diesen Bedingungen ist das Viereck  $ABCD$  aber ein Quadrat.

**Aufgabe 19.07 – MO461033.** Gegeben ist ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  sowie eine reelle Zahl  $h$  mit  $0 < h < 2r$ . Wir betrachten Trapeze  $ABCD$ , deren Eckpunkte auf  $k$  liegen und deren parallele Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  den Abstand  $h$  haben.

Finden Sie unter all diesen Trapezen eines mit größtmöglichem Flächeninhalt.

*Lösungshinweise:* Es sei  $ABCD$  ein Trapez mit der Höhe  $h$  gemäß der Aufgabenstellung. Weiter sei  $A'B'C'D'$  ein weiteres solches Trapez, bei dem zusätzlich der Mittelpunkt  $M$  auf der Diagonalen  $\overline{A'C'}$  liegt. Dieses Trapez ist sogar ein Rechteck, da nach Satz des THALES die Winkel bei  $B'$  und bei  $D'$   $90^\circ$  betragen. Außerdem ist dieses Rechteck punktsymmetrisch bzgl.  $M$ .



Wir zeigen nun: Der Flächeninhalt von  $A'B'C'D'$  ist mindestens so groß wie der von  $ABCD$ . O.B.d.A. können wir  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  und deshalb auch  $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$  annehmen. Die Geraden  $AB$  und  $CD$  entstehen deshalb durch Parallelverschiebung von  $A'B'$  bzw.  $C'D'$ , wobei wegen der gleichen Höhe  $h$  der beiden Trapeze die Verschiebungen um einen gleichen Betrag  $y$  erfolgen.

Wir spiegeln die Punkte  $A$  und  $B$  bzgl.  $M$  zu  $A''$  bzw.  $B''$ . Die Spiegelpunkte liegen ebenfalls auf dem Kreis  $k$ . Außerdem gilt  $|A''B''| = |\overline{AB}|$ . Die Gerade  $A''B''$  erhalten wir aber auch durch Parallelverschiebung von  $C'D'$  in Richtung  $AB$  um den Betrag  $y$ .

Damit ist  $\overline{C'D'}$  die Mittelparallele zu zwischen  $\overline{CD}$  und  $\overline{A''B''}$ . Folglich schneiden die Sehnen  $\overline{DB''}$  und  $\overline{CA''}$  die Sehne  $\overline{C'D'}$  in inneren Punkten, die wir  $X$  bzw.  $Y$  nennen. Laut Konstruktion ist  $\overline{XY}$  die Mittellinie des Trapezes  $B''A''CD$ . Es folgt:

$$|\overline{C'D'}| \geq |\overline{XY}| = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{CD}| + |\overline{A''B''}|) = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{CD}| + |\overline{AB}|)$$

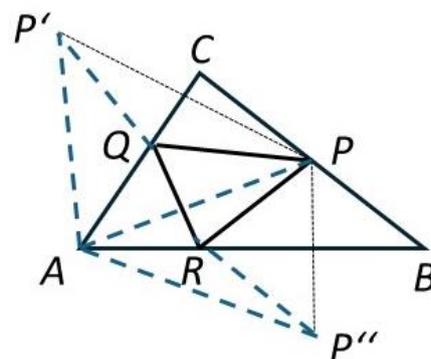
Da der Flächeninhalt des Rechtecks  $A'B'C'D'$  durch  $h \cdot |\overline{C'D'}|$  und der Flächeninhalt des Trapezes  $ABCD$  durch  $\frac{1}{2} \cdot (|\overline{CD}| + |\overline{AB}|) \cdot h$  gegeben ist, folgt aus dieser Ungleichung die Behauptung: Das Rechteck hat den größtmöglichen Flächeninhalt.  $\square$

Während obige Aufgaben durch (konstruktive) Vergrößerungen einer gegebenen Figur gelöst werden, können auch geschickte Hilfslinien für die Optimierung von Streckenzügen zum Erfolg führen, wie bei

**Aufgabe 19.08 – Das Problem von Fagnano<sup>3</sup>.** Das einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  einbeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs ist das Höhenfußpunktdreieck.

<sup>3</sup> GIOVANNI FRANCESCO FAGNANO DEI TOSCHI (1715 bis 1797) veröffentlichte 1775 dieses Optimierungsproblem und bewies die Aussage mit Methoden der Differentialrechnung. LEOPOLD FEJÉR (1880 bis 1959) fand einen elementargeometrischen Beweis

*Lösungshinweise:* Dem Dreieck  $\triangle ABC$  wird ein beliebiges Dreieck  $\triangle PQR$  einbeschrieben. Dabei liegen  $P$  auf der Seite  $\overline{BC}$ ,  $Q$  auf  $\overline{CA}$  und  $R$  auf  $\overline{AB}$ . Es seien  $P'$  der an  $CA$  gespiegelte Punkt zu  $P$  und  $P''$  der an  $AB$  gespiegelte Punkt zu  $P$ .



Wir wollen die Summe der Seitenlängen des Dreiecks  $\triangle PQR$  bilden, also den Umfang  $u$  dieses Dreiecks:  $u = |\overline{PQ}| + |\overline{QR}| + |\overline{RP}|$ . Dafür lässt sich wegen der Spiegelungen auch setzen:

$$u = |\overline{P'Q}| + |\overline{QR}| + |\overline{RP''}|.$$

Wir bemerken, dass (wie in der Skizze) dieser Streckenzug im Allgemeinen nicht geradlinig ist. Soll er so kurz wie möglich sein, wäre es erforderlich, dass er geradlinig ist, d.h. die Punkte  $Q$  und  $R$  müssten für jede Wahl des Punktes  $P$  auf  $\overline{AB}$  auf der zugehörigen Geraden  $P'P''$  liegen.

Für jede Wahl von  $P$  auf  $\overline{AB}$  besitzt dasjenige einbeschriebene Dreieck  $\triangle PQR$  den kleinsten Umfang, dessen Ecken  $Q$  und  $R$  auf der Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte  $P'$  und  $P''$  liegen.

Wir erkennen:  $\overline{AP'}$  und  $\overline{AP''}$  sind die Bilder der Strecken  $\overline{AP}$  bei den Spiegelungen. Somit gilt die Gleichheit der Streckenlängen:  $|\overline{AP'}| = |\overline{AP''}| = |\overline{AP}|$ , d.h. das Dreieck  $AP'P''$  ist gleichschenkelig und der Winkel  $\sphericalangle P''AP'$  ist doppelt so groß wie der Innenwinkel  $\sphericalangle BAC$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  bei  $A$ , also:  $|\sphericalangle P''AP'| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$ .

Wir stellen fest, dass der Winkel  $\sphericalangle P''AP'$  an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks konstant ist und nicht von der Wahl des Punktes  $P$  auf der Seite  $\overline{BC}$  abhängt! Wir erhalten deshalb eine möglichst kurze Basis  $\overline{P'P''}$  des gleichschenkligen Dreiecks  $AP'P''$ , wenn wir einen Schenkel minimalisieren, d.h. wenn wir erreichen, dass  $\overline{AP}$  möglichst klein wird. Dies ist genau dann erreicht, wenn  $\overline{AP}$  der kürzeste Abstand des Punktes  $A$  von der Seite  $\overline{BC}$  ist. Wir finden also:  $\overline{AP}$  muss senkrecht auf  $\overline{BC}$  stehen, d.h.  $P$  ist der Fußpunkt der Höhe  $h_a$  durch  $A$  auf der Seite  $\overline{BC}$ .

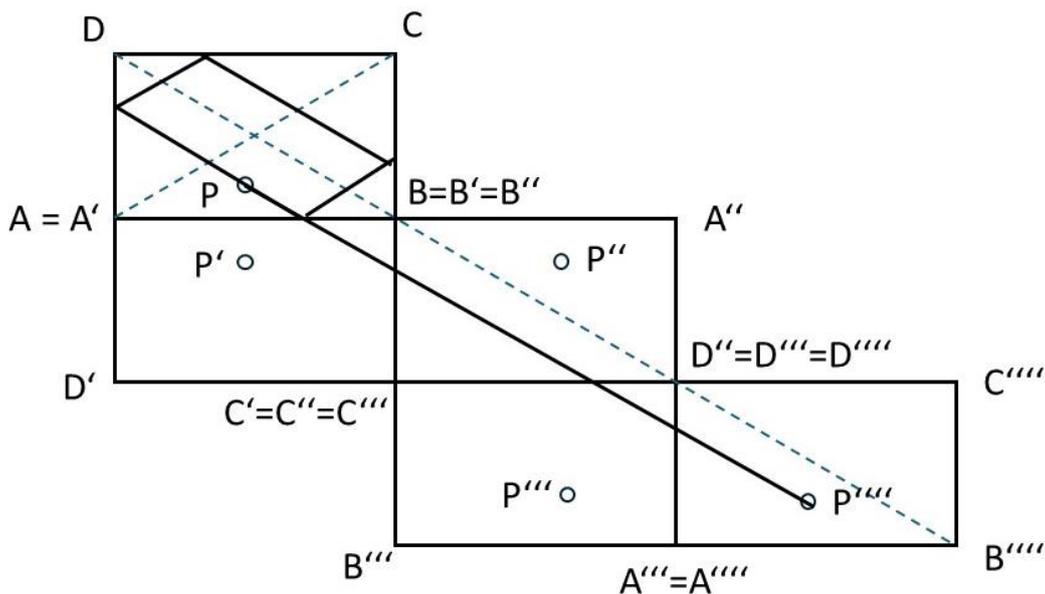
Dieselben Überlegungen gelten für die beiden anderen Seiten  $\overline{CA}$  und  $\overline{AB}$ : Im gesuchten Minimalfall sind  $\overline{BQ}$  und  $\overline{CR}$  die Höhen von  $B$  und  $C$  aus. Damit hat das Höhenfußpunktdreieck den minimalen Umfang aller einbeschriebenen Dreiecke.  $\square$

Wir finden diese Lösungsstrategie auf Basis der kürzesten Verbindung bereits in frühen MO-Aufgaben.

**Aufgabe 19.09 – MO070932.** Auf einem rechtwinkligen Billardtisch  $ABCD$  befindet sich im Punkt  $P$  eine Kugel.

Nach welchem Punkt von  $AB$  muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$  des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt  $P$  eintrifft?

*Lösungshinweise:* Man muss auf den Schnittpunkt von  $\overline{AB}$  mit der Parallelen zu  $BD$  durch  $P$  zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch  $P$  eine zur Diagonalen  $\overline{BD}$  parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn  $P$  im Dreieck  $\triangle ABD$  liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu zeichnen:



Wir spiegeln  $ABCD$  an  $\overline{AB}$ . Das dadurch erhaltene neue Rechteck  $A'B'C'D'$  spiegeln wir an der Seite, die  $\overline{BC}$  entspricht, und erhalten das Rechteck  $A''B''C''D''$ . Dieses Rechteck wiederum spiegeln wir an der Seite von  $A''B''C''D''$ , die  $\overline{CD}$  entspricht, und erhalten das Rechteck  $A'''B'''C'''D'''$ . Dieses Rechteck spiegeln wir an der Seite, die  $\overline{DC}$  entspricht, und erhalten  $A''''B''''C''''D''''$ .

Sei  $P''''$  der Punkt in  $A''''B''''C''''D''''$ , der  $P$  entspricht. (Wir beobachten, dass  $A''''B''''C''''D''''$  durch Verschiebung von  $ABCD$  parallel zur Diagonalen  $\overline{BD}$  entsteht.) Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass, wenn wir die Kugel im Punkt  $P$  in die Richtung von  $P''''$  stoßen, wir die Seiten in der gewünschten Reihenfolge treffen und anschließend wieder bei  $P$  landet.

Analog zeigen wir, dass wir auch zu Punkt  $P$  zurückkehren, wenn wir die Kugel parallel zur Diagonalen  $\overline{AC}$  anstoßen. □

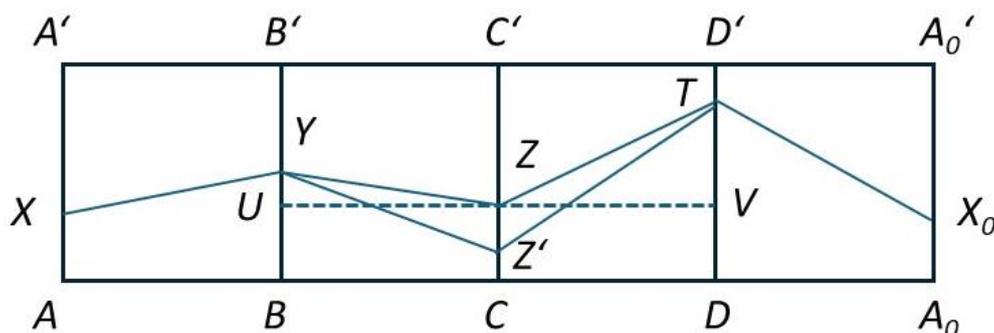
**Aufgabe 19.10 – MO160923.** Gegeben sei ein Würfel  $ABCD A'B'C'D'$ . Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge  $XYZTX$ , wobei  $X, Y, Z$  und  $T$  in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten  $AA', BB', CC'$  bzw.  $DD'$  seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte  $X, Y, Z, T$  so gibt, dass der Streckenzug  $XYZTX$  unter allen betrachteten Streckenzügen

- a) minimale,
- b) maximale

Gesamtlänge besitzt!

*Lösungshinweise:* Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den "Mantel" aus den vier zu  $AA'$  parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:



Für den dabei zweimal (als  $X$  und  $X_0$ ) auftretenden Punkt  $X$  gilt  $XX_0 \parallel AA_0$ .

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):* Zu jedem solchen  $X$  ergibt sich als Möglichkeit für  $Y, Z, T$  mit minimaler Gesamtlänge von  $XYTZX_0$  die Wahl von  $Y, Z, T$  auf der Strecke  $XX_0$ , da diese die kürzeste Verbindung zwischen  $X$  und  $X_0$  ist und da die so bestimmten Punkte  $Y, Z, T$  wegen  $|\overline{AX}| = |\overline{BY}| = |\overline{CZ}| = |\overline{DT}| = |\overline{A_0X_0}|$  im Innern von  $\overline{BB_0}, \overline{CC_0}$ , bzw.  $\overline{DD_0}$ , liegen.

Die so zu je einem  $X$  gehörende minimale Gesamtlänge von  $XYZTX_0$  ist  $|\overline{XX_0}| = |\overline{AA_0}|$ , also für alle  $X$  dieselbe Länge.

Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe b):* Es sei  $XYZTX$  ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug. Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen  $A, B, C, D$  sowie gleichzeitig  $A', B', C', D'$  und  $X, Y, Z, T$  erreicht, dass  $|\overline{CZ}| \leq |\overline{BY}|$  und  $|\overline{CZ}| \leq |\overline{DT}|$  gilt.

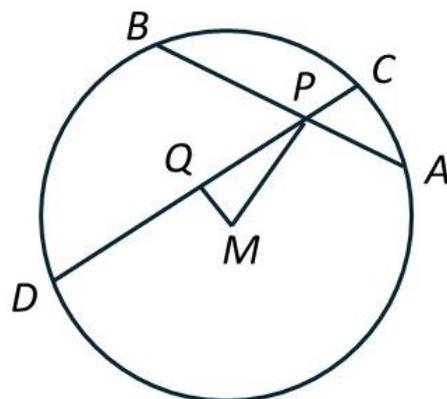
Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu  $\overline{AA_0}$  durch  $Z$  dann  $\overline{BB'}$  und  $\overline{CC'}$  in Punkten  $U$  bzw.  $V$  auf  $\overline{BY}$  bzw.  $\overline{DT}$ . Daher ist  $|\sphericalangle CZY| \geq |\sphericalangle CZU| = 90^\circ$  und  $|\sphericalangle CZT| \geq |\sphericalangle CZV| = 90^\circ$ . Wählen wir nun einen Punkt  $Z'$  zwischen  $C$  und  $Z$ , so gehört auch  $XYZ'TX$  zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck  $Z'ZY$  der Innenwinkel bei  $Z$  größer als der bei  $Z'$ , also gilt  $|\overline{YZ'}| > |\overline{YZ}|$ .

Ebenso folgt  $|\overline{Z'T}| > |\overline{ZT}|$ . Daher hat  $XYZ'TX$  eine größere Gesamtlänge als  $XYZTX$ . Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.  $\square$

**Aufgabe 19.11 – MO060922.** Innerhalb eines Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius von der Länge  $r$  liege der von  $M$  verschiedene Punkt  $P$ .

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch  $P$  die kürzeste!

*Lösungshinweise - Konstruktion:* Wir verbinden  $P$  mit dem Mittelpunkt  $M$  des Kreises und konstruieren die Senkrechte zu  $\overline{MP}$  in  $P$ . Sie schneide die Kreislinie in den Punkten  $A$  und  $B$ .  $\overline{AB}$  ist die gesuchte Sehne.

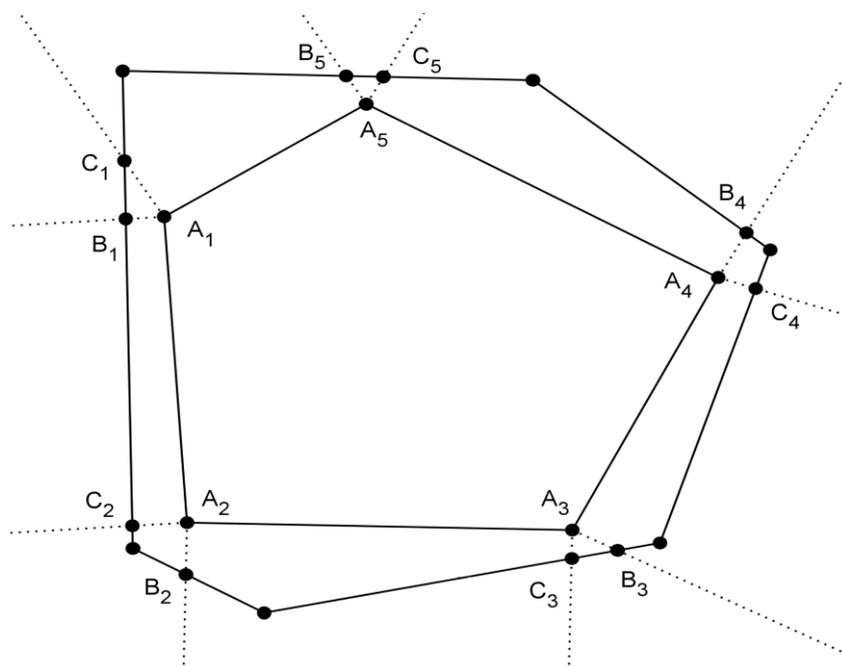


*Beweis:* Zum Nachweis, dass  $\overline{AB}$  die kürzeste durch  $P$  verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch  $P$ . Sie schneide die Kreislinie in den Punkten  $C$  und  $D$ . Dann ist der Abstand der Sehne  $\overline{CD}$  von  $M$  kleiner als  $\overline{MP}$ .

Enthält  $\overline{CD}$  den Punkt  $M$ , dann ist der Abstand der Strecke  $\overline{CD}$  von  $M$  gleich Null. Enthält aber  $\overline{CD}$  den Punkt  $M$  nicht, dann fallen wir das Lot von  $M$  auf  $\overline{CD}$  und nennen seinen Fußpunkt  $Q$ . Im rechtwinkligen Dreieck  $\Delta MQP$  ist  $\overline{MP}$  die Hypotenuse, und daher gilt  $|\overline{MQ}| < |\overline{MP}|$ . Nun ist von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat. Deshalb folgt  $|\overline{AB}| < |\overline{CD}|$ . Da  $\overline{CD}$  (durch  $P$ ) beliebig angenommen wurde, muss  $\overline{AB}$  die kürzeste durch  $P$  verlaufende Sehne dieses Kreises sein.

*Existenz und Eindeutigkeit:* Da es stets genau eine Gerade durch  $M$  und  $P$  gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig.  $\square$

**Aufgabe 19.12.** Es seien  $P$  und  $Q$  zwei konvexe Polygone, sodass  $P$  im Inneren von  $Q$  liegt. Man beweise, dass der Umfang von  $P$  kleiner als der Umfang von  $Q$  ist.



*Lösungshinweise:* Wir bezeichnen die Ecken von  $P$  mit  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Die in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  errichteten Senkrechten zu  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  schneiden  $Q$  in  $B_1, B_2, \dots, B_n$  die in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  errichteten Senkrechten zu  $A_nA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  schneiden  $Q$  in  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Wenn wir den Umfang von  $Q$  und  $P$  mit  $U_Q$  bzw.  $U_P$  bezeichnen, so gilt unter Verwendung der Dreiecksungleichung:

$$U_Q > |B_1C_2| + |B_2C_3| + \dots + |B_nC_1| > |A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_nA_1| = U_P$$

Also ist der Umfang von  $P$  kleiner als der Umfang von  $Q$ . □

## MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Lineare Gleichungssysteme

**Aufgabe 3.11 – MO641015.** Ein Schaf und eine Ziege können eine Wiese gemeinsam in 50 Minuten abfressen. Eine Ziege allein hätte 80 Minuten gebraucht, um die Wiese abzufressen.

Ermitteln Sie die Zeit, in der 5 Schafe und 2 Ziegen die Wiese abfressen können, wenn gilt: Alle Schafe fressen gleich schnell und alle Ziegen fressen auch gleich schnell. Die Fressgeschwindigkeit eines Tieres ändert sich nicht, wenn weitere Tiere anwesend sind.

*Lösungshinweise (mit ganzen Zahlen):* Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrisst, fressen 8 Ziegen die Wiese in 10 min ab. Wenn (1 Schaf und 1 Ziege) die Wiese in 50 min abfressen, fressen (5 Schafe und 5 Ziegen) die Wiese in 10 min ab. Somit fressen 5 Schafe so viel wie  $(8 - 5 =) 3$  Ziegen. Aus diesem Grund fressen (5 Schafe und 2 Ziegen) so viel wie  $(3 \text{ Ziegen} + 2 \text{ Ziegen})$ , also wie 5 Ziegen.

Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrisst, fressen 5 Ziegen die Wiese in  $(80 : 5 =) 16$  min ab. □

*Lösungshinweise (mit Normierung):* Wenn 1 Ziege die Wiese in 80 min abfrisst, frisst sie in einer Minute  $\frac{1}{80}$  der Wiese. Wenn (1 Schaf und 1 Ziege) die Wiese in 50 min abfressen, fressen sie in einer Minute  $\frac{1}{50}$  der Wiese. Daraus ermitteln wir, wie viel 1 Schaf in einer Minute frisst, nämlich:

$$\frac{1}{50} - \frac{1}{80} = \frac{8 - 5}{400} = \frac{3}{400}.$$

Deshalb fressen 5 Schafe und 2 Ziegen in einer Minute insgesamt

$$5 \cdot \frac{3}{400} + 2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{15 + 10}{400} = \frac{25}{400} = \frac{1}{16}.$$

Wir erhalten also: 5 Schafe und 2 Ziegen fressen die Wiese in 16 min ab. □

Diese Aufgabenstellung erscheint sehr ähnlich zur

**Aufgabe 3.05 – MO570934.** Drei Mährescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

- (1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
- (2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst  $\frac{2}{3}$  des Feldes abgeerntet.
- (3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst  $\frac{7}{12}$  des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mährescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

*Anmerkung:* In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mährescher stets mit voller Leistung arbeiten.

Tatsächlich können wir die Lösungsidee (s. Thema 3.1 „Lineare Gleichungssysteme“ im Heft 02/2021) direkt übertragen und erhalten einen Lösungsansatz, der der obigen zweiten Variante entspricht:

*Lösungshinweise:* Es sei  $z$  die Fläche der Wiese, die eine Ziege in einer Zeiteinheit (hier: 10 min) abfrisst. Weiter sei  $s$  die Fläche der Wiese, die ein Schaf in einer Zeiteinheit abfrisst. Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$z = \frac{1}{8} \quad z + s = \frac{1}{5}$$

Nach Umformungen wie oben erhalten wir  $s = \frac{3}{40}$ , woraus wir die Fragestellung mit  $5 \cdot \frac{3}{40} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{40}$  die Fläche erhalten, die 5 Schafe und 2 Ziegen in der Zeiteinheit (10 min) abfressen.

Die gesamte Fläche fressen sie also in  $10 : \frac{25}{40} = \frac{400}{25} = 16$  Minuten ab. □

**Aufgabe 3.12 – MO330922.** Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen. Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist.

Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit  $A$  gemahlen und anschließend nur mit  $B$ , so würde  $B$  noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn  $A$  und  $B$  von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

*Lösungshinweise:* Es seien  $x$  und  $y$  die prozentualen Leistungen des Mahlwerks je Stunde Arbeitszeit. Dann ergibt sich das System

$$\frac{8}{x} + \frac{18}{y} = 1$$

und

$$\frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1$$

mit der Lösung  $x = 20, y = 30$ . Arbeiten beide  $t$  Stunden zusammen, wird damit

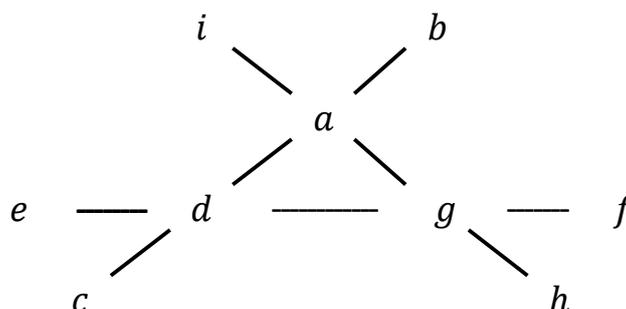
$$\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$$

mit der Lösung  $t = 12$ . Beide Mahlwerke benötigen also 12 Stunden, wenn sie von Anfang an gemeinsam arbeiten.

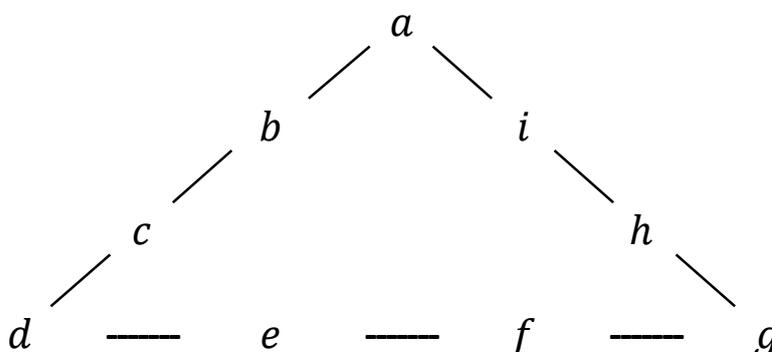
## MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren

**Aufgabe 22.15 – MO641016.** In der unten abgebildeten Figur ist jeder der neun eingezeichneten Kreise mit je einer der jeweils in den Teilaufgaben festgelegten Zahlen so zu beschriften, dass alle neun Zahlen verwendet werden und auf jedem der drei geradlinigen Abschnitte (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) die Summe  $s$  der vier Zahlen in jedem geradlinigen Abschnitt stets die gleiche ist.

- Hier sollen die neun Zahlen 2021, 2022, 2023, . . . , 2029 eingetragen werden. Geben Sie eine derartige Beschriftung und die mit dieser Beschriftung erreichte Abschnittssumme  $s$  an.  
Überprüfen Sie außerdem, ob es derartige Beschriftungen mit den gegebenen Zahlen gibt, bei denen die Abschnittssumme  $s$  den Wert 8097 bzw. den Wert 8104 hat.
- In dieser Teilaufgabe tragen wir die neun Zahlen  $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^8$  ein. Wie viele Werte kann die gemeinsame Abschnittssumme  $s$  annehmen?



Wir erkennen, dass die Struktur wie nachfolgend vereinfacht werden kann. Zudem genügt es, in Teilaufgabe a) für die Variablen die Werte 1, 2, ..., 9 zu untersuchen, wenn wir für die originale Aufgabe stets den Wert 2020 addieren. Dann finden wir aber im **Thema 22.1** im Heft 05/2023 in den Diskussionen zu **Aufgabe 22.03 – MO270911**, **Aufgabe 22.04 – MO270921** und **Aufgabe 22.05 – MO310924** vielfältige Anregungen zur Lösungsfindung.



*Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):* Laut Aufgabenstellung gilt

$$a + b + c + d = d + e + f + g = g + h + i + a$$

Verwenden wir für die Variablen die Zahlen 1, 2, ..., 9, so folgt daraus für die (reduzierte) Abschnittssumme  $s'$

$$3 \cdot s' = 1 + 2 + \dots + 9 + a + d + g = 45 + a + d + g$$

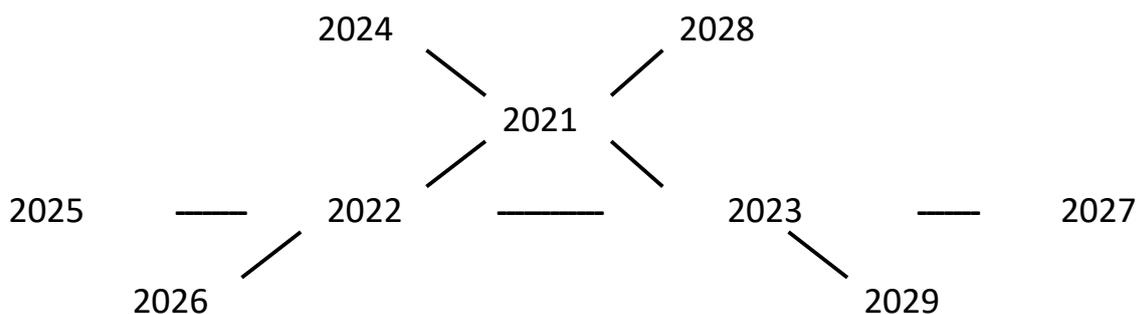
Damit  $s'$  eine ganze Zahl ist, muss  $a + d + g$  durch 3 teilbar sein. Da es genügt, eine Belegung ohne Herleitung anzugeben, versuchen wir es mit  $a = 1$ ,  $d = 2$  und  $g = 3$ . In diesem Fall gilt  $s' = 17$ . Außerdem finden wir folgende Zusammenhänge:

$$b + c = 17 - a - d = 17 - 3 = 14,$$

$$e + f = 17 - d - g = 17 - 5 = 12,$$

$$h + i = 17 - a - g = 17 - 4 = 13.$$

Da eine der Variablen 9 sein muss, könnte wegen  $9 + 4 = 13$  die Festlegung  $h = 9$  und  $i = 4$  zu einer Belegung führen. Da dann  $b + c = 14$  und  $e + f = 12$  gerade Summen ergeben, kann (bis auf Vertauschung) nur  $b = 8, c = 6$  bzw.  $e = 5, f = 7$  gelten. Weiter erhalten wir  $s = s' + 4 \cdot 2020 = 8097$ .



*Hinweis:* Da eine der Variablen 9 sein muss, könnte wegen  $9 + 5 = 14$  die Festlegung  $b = 9$  und  $c = 5$  auch zu einer Belegung führen. Wir finden in diesem Fall  $e + f = 12$  und  $h + i = 13$ . Da nur noch eine ungerade Zahl verfügbar ist, kann (bis auf Vertauschung) nur  $e = 8, f = 6$  bzw.  $h = 8, i = 6$  gelten. Auch bei dieser Variante erhalten wir  $s = s' + 4 \cdot 2020 = 8097$ .

Mit diesen Beispielen haben wir zudem gezeigt, dass die Abschnittssumme 8097 möglich ist. Für  $s = 8104$  beträgt die zugehörige reduzierte Abschnittssumme  $(8104 - 4 \cdot 2020 =) 24$ . Um dies zu erreichen, müssen wir  $\frac{a+d+g}{3} = 9$  wählen, also  $a + d + g = 27$ . Da aber die Summe der drei Variablen nicht größer als  $7 + 8 + 9 = 24$  sein kann, kann es keine Belegung mit der Abschnittssumme 8104 geben.

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe b):* Eines der Felder wird mit  $2^8$  belegt. Dann gibt es mindestens einen geradlinigen Abschnitt, auf dem dieser Wert nicht liegt. Bezeichnen wir die vier Werte dieses Abschnitts mit  $2^w, 2^x, 2^y, 2^z$  mit  $w, x, y, z < 8$ , dann erkennen wir

$$s > 2^8 > \sum_{k=0}^7 2^k > 2^w + 2^x + 2^y + 2^z$$

Es ist also nicht möglich, dass alle Abschnittssummen gleich groß sein können.  $\square$

*Lösungsvariante:* Unter den neun aufzuteilenden Zahlen ist mit 1 nur genau eine Zahl ungerade. Damit gibt es unter den geraden Abschnitten mindestens einen Abschnitt, der diese 1 enthält und damit eine ungerade Abschnittssumme besitzt. Es gibt aber unter den geraden Abschnitten mindestens einen Abschnitt, der diese 1 nicht enthält und damit eine gerade Abschnittssumme besitzt. Damit können nicht alle Abschnittssummen gleich sein.

**Aufgabe 22.16 – MO310911.** Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

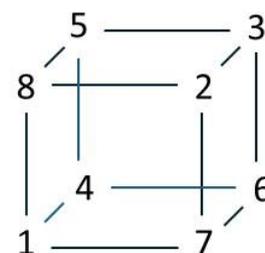
- a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: Wenn man an die Ecken eines Tetraeders  $ABCD$  in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4

schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

- b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):* Die genannte Aussage ist falsch, denn eine Seitenfläche des Tetraeders muss die Flächensumme  $1 + 2 + 3 = 6$  haben, eine andere Seitenfläche z.B. die Flächensumme  $1 + 2 + 4 = 7$ .

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe b):* Es ist möglich, die Zahlen in der genannten Weise an die Ecken eines Würfels zu schreiben. Eine solche Möglichkeit zeigt die Abbildung; denn bei ihr entstehen die Flächensummen



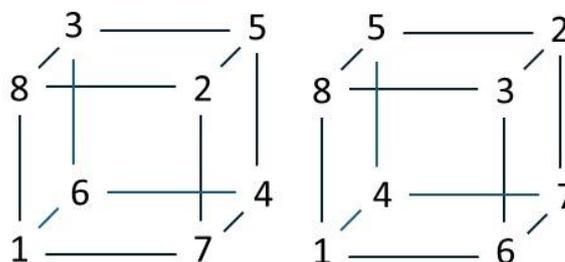
$$1 + 7 + 6 + 4 = 18 ; 1 + 7 + 2 + 8 = 18 ; 7 + 6 + 3 + 2 = 18 ;$$

$$6 + 4 + 5 + 3 = 18 ; 4 + 1 + 8 + 5 = 18 ; 8 + 2 + 3 + 5 = 18.$$

□

*Bemerkung:* Um eine solche Reihenfolge zu finden, berücksichtigen wir zunächst, dass das Sechsfache der einheitlichen Flächensumme  $s$  gleich dem Dreifachen von  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$  sein muss, da beim Addieren der sechs einander gleichen Flächensummen jede Ecke genau dreimal erfasst wird. Also gilt  $s = 18$ .

Dann können wir alle Zerlegungen von 18 in eine Summe aus vier verschiedenen unter den Zahlen 1, 2, ..., 8 bilden und eine Verteilung suchen, bei der sechs solche Zerlegungen als Flächensummen auftreten. Man kann zeigen, dass es bis Spiegelung und Drehung genau die drei Verteilungen (obere und nebenstehende Abbildungen) gibt.



**Aufgabe 22.17 - MO310931.** Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

*Lösungshinweise:* Nein, dies ist nicht möglich: Gabe es eine solche Verteilung, dann müsste die Summe aller acht Flächensummen einerseits das Vierfache der Summe der sechs Zahlen, also  $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4 \cdot 21 = 84$ , betragen, da jeder Eckpunkt an genau vier Flächen beteiligt ist, aber andererseits natürlich durch acht teilbar sein, da die acht Flächensummen alle gleich groß sein sollen.

Es ist aber 84 nicht durch 8 teilbar, sodass eine solche Verteilung der Zahlen an die Eckpunkte, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, nicht möglich ist.  $\square$

## In alten Mathe-Büchern geblättert

**Eigenschaften<sup>4</sup>**  
einiger merkwürdigen Punkte  
des  
geradlinigen Dreiecks  
und  
mehrerer durch sie bestimmten  
Linien und Figuren.

Eine  
analytisch-triigonometrische Abhandlung  
von  
Karl Wilhelm Feuerbach<sup>5</sup>  
der Philosophie Doktor.

Nürnberg, 1822.  
Bei Riegel und Wießner.

[Seite 15ff]

### Zweiter Abschnitt

Von Durchschnittspunkte der Senkrechten, welche auf den Winkelpunkten des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten, gefällt sind.

#### §. 19.

Wenn man auf den drei Winkelpunkten eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüberliegenden Seiten desselben die Senkrechten AM, BN, CP fällt, welche sich bekanntlich in einem und eben demselben Punkt O schneiden, so bestimmen die Fußpunkte dieser Senkrechten ein Dreieck MNP, welches darum merkwürdig ist, weil es unter allen in das Dreieck ABC beschriebenen Dreiecken den kleinsten Umfang hat \*).

Es wird daher nicht uninteressant seyn, dieses Dreieck näher zu betrachten, und vor allem seinen Umfang und Inhalt selbst, so wie das Verhältnis beider zum Umfang und Inhalt des vorgegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen.

Wenn wir die im vorigen Abschnitt gebrauchte Bezeichnungsart für das Dreieck ABC beibehalten, so ist  $AP = b \cos \alpha$ ,  $AN = c \cos \alpha$ , also  $\overline{NP}^2 = (b^2 + c^2 -$

---

<sup>4</sup> Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp **Bertholdtr Mainzer Fraktur** verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt. Digitalisiert zugänglich im Göttinger Digitalisierungszentrum der niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN512512426>, zitiert am 02.11.2024.

<sup>5</sup> KARL WILHELM FEUERBACH, deutscher Mathematiker (1800 bis 1834)

$2bc \cos \alpha) \cos \alpha^2$ ; allein  $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$ , folglich  $\overline{NP}^2 = a^2 \cos \alpha^2$  und  $NP = a \cos \alpha$ ; ebenso  $MP = b \cos \beta$ , und  $MN = c \cos \gamma$ ; oder, wenn man die Cosinus durch die Seiten ausdrückt:

$$MN = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}, MP = \frac{b(a^2 - b^2 + c^2)}{2ac}, NP = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc}.$$

Addirt man diese drei Werthe, so wird, weil:

$$a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta^2,$$

$MN + MP + NP = \frac{8\Delta^2}{abc}$ ; und, da  $\frac{abc}{4\Delta} = R$ , wo  $R$  wie bisher den Halbmesser des um das Dreieck  $ABC$  beschriebenen Kreises vorstellt, so kommt der gefuchte Umfang,

$$MN + MP + NP = \frac{2\Delta}{R}.$$

Zugleich ist  $R(MN + MP + NP) = 2\Delta$ .

d.h. Das Rechteck aus dem Umfang des Dreiecks  $MNP$  in den Halbmesser des um das Dreieck  $ABC$  beschriebenen Kreises, ist gleich dem doppelten Inhalt des letzten Dreiecks.

Ist das Dreieck  $ABC$  stumpfwinklig z. B. bei  $A$ , so wird die, diesem stumpfen Winkel gegenüberliegende, Seite  $NP$  des Dreiecks  $MNP$  im Umfange negativ, so daß alsdann  $MN + MP - NP = \frac{2\Delta}{R}$ . Diese Bemerkung gilt eben so für die folgenden Sätze.

\*) Fagnani lehrte dieß vielleicht zuerst in der Abhandl. *Problemata quaedam ad methodum max, et min. spectantia*. Acta Erud, mens. Juni 1775.

## Termine

**Runde 2 (Regionalauscheid) der 64. Mathematik-Olympiade.** 13. November 2024, Informationen unter [www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine](http://www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine).

**Wissenschaft LIVE! „Epigenetik“.** Online-Seminar am 26. November 2024, ab 15:30 Uhr. Referent: Alexander Meissner vom Max-Planck-Institut für molekulare Genetik. Information und Anmeldung unter <https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-epigenetik.html>

**60. Wettbewerb „Jugend forscht“.** 30. November 2024 online-Anmeldeschluss unter <https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular>.

Ab sofort neue Übersicht für Schülerangebote an der TU Chemnitz unter <https://www.tu-chemnitz.de/tu/schuelerangebote/>

## Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 09/2024

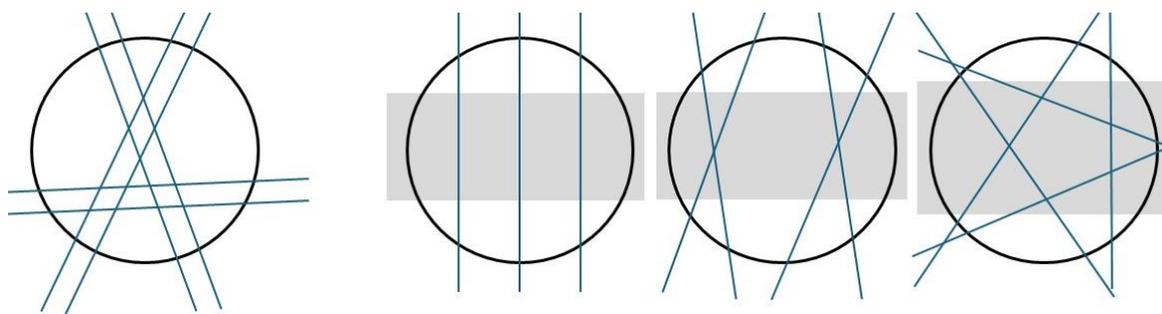
**Aufgabe I-2** (Individualwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno/Slowakei). Bestimme alle ganzen Zahlen  $n \geq 3$ , für die es möglich ist,  $n$  Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre  $2n$  Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau  $k$  andere Sehnen schneidet, wobei:

(a)  $k = n - 2$ ,

(b)  $k = n - 3$ .

*Bemerkung:* Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

*Lösungshinweise zu Teil a):* Jede Sehne schneidet sich und genau eine andere Sehne nicht, daher bilden die sich nicht schneidenden Sehnen Paare und  $n$  muss gerade sein. Andererseits ist die Konstruktion für jedes gerade  $n \geq 2$  einfach (siehe die linke Abbildung), wenn wir die Paare als parallele Sehnen wählen.



*Lösungshinweise zu Teil (b):* Für  $n = 3, 4, 5$  können wir die Sehnen wie in den drei rechten Abbildungen zeichnen: Jede eingezeichnete Sehne schneidet genau 0, 1 bzw. 2 der anderen Sehnen. Von einer solchen Zeichnung mit  $n = 3, 4, 5$  können wir nun eine passende Zeichnung mit  $n + 3k$  erstellen, indem wir  $k$  Dreiergruppen von parallelen Linien innerhalb des grauen Streifens hinzufügen: Jede bestehende Sehne kreuzt alle neu hinzugefügten Sehnen, schneidet also genau die 2 anderen Sehnen nicht, die sie vorher nicht geschnitten hat. Jede neu hinzugefügte Sehne kreuzt alle anderen Sehnen mit Ausnahme der beiden anderen Sehnen in seinem Tripel.  $\square$

## Monatsaufgabe 11/2024<sup>6</sup>

Betrachte die zwei unendlichen Folgen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und  $b_0, b_1, b_2, \dots$  reeller Zahlen mit  $a_0 = 0, b_0 = 0$  und  $a_{k+1} = b_k, b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k + a_{k+1}}{b_{k+1}}$  für alle ganzen Zahlen  $k \geq 0$ .

Zeige, dass  $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$ .

<sup>6</sup> Lösungseinsendungen an [bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de) sind bis 31.12.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

## Inhalt

Vorwort.....	2
Thema 19.2 – Maximale Eigenschaften von ebenen Figuren.....	3
MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Lineare Gleichungssysteme .....	10
MO-Aufgaben mit Vergangenheit: Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren .....	12
In alten Mathe-Büchern geblättert .....	16
Termine.....	17
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 9/2024 .....	17
Monatsaufgabe 11/2024.....	18

## Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe <sup>7</sup>	Nr.	Thema	Aufgabe
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (August)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041
			MO630941
			MO630934

### Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich  
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz  
 E-Mail: [bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de)  
[www.kzm-sachsen.de](http://www.kzm-sachsen.de)  
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

<sup>7</sup> Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage ([bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de)) oder unter <https://mathematikaalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.