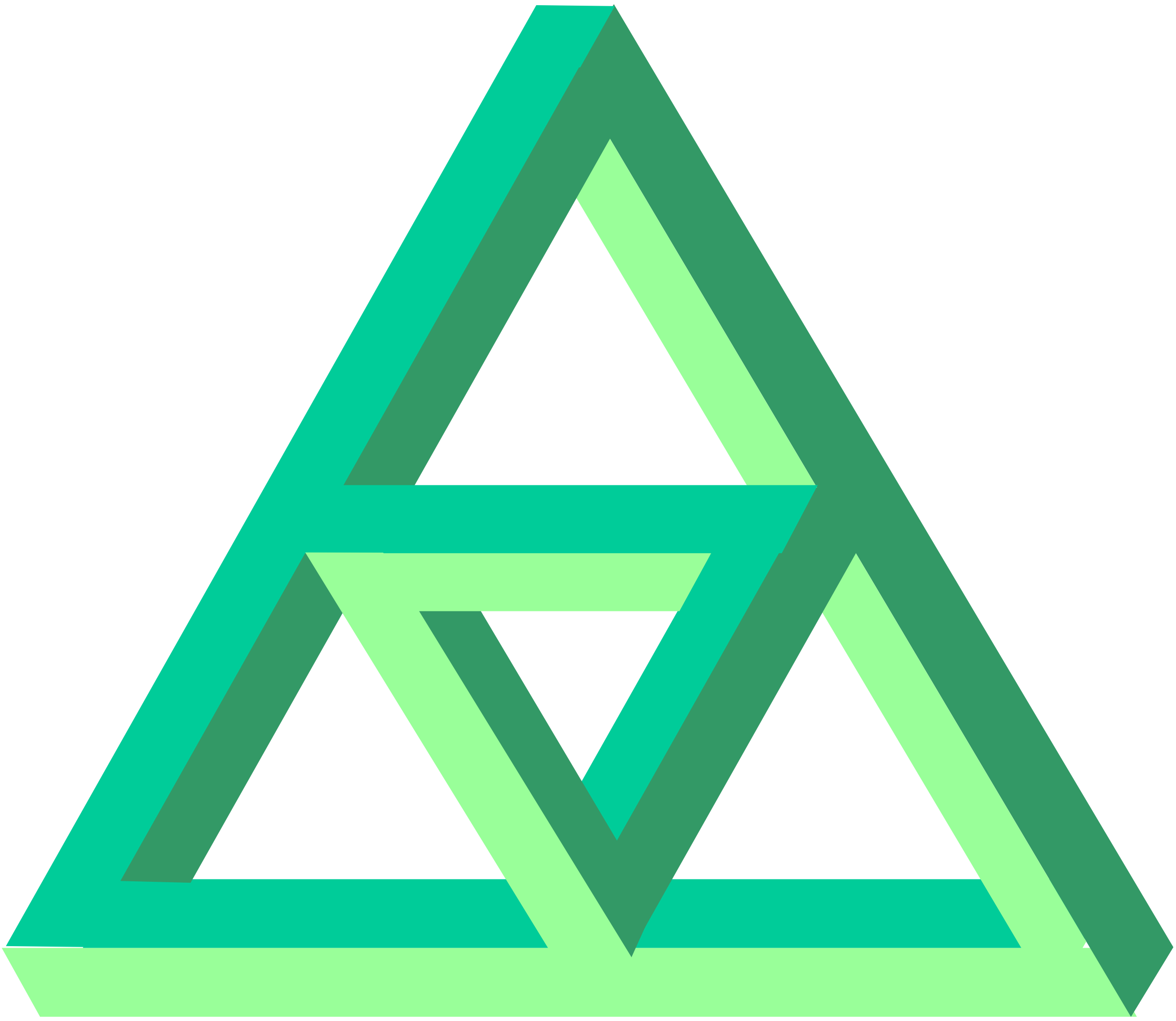
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 08/2024 (August 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir starten in das Schuljahr 2024/25 mit einem Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 63. MO und greifen mit den Aufgaben **MO630941/MO631041** das Thema Schubfachprinzip auf. Während dieses grundlegende Prinzip häufig nur die Argumentation innerhalb eines Beweises vereinfacht (wie beispielsweise unlängst bei den Aufgaben **MO630934/MO631034**), basieren die aktuellen Aufgaben maßgeblich auf der Konstruktion geeigneter „Schubfächer“.

Mit dem Aufgabenpaar **MO630944/MO631044** sehen wir ein weiteres Beispiel, in dem die Erfahrungen aus Aufgaben vergangener Olympiaden einen Zugang zum Lösungsansatz vereinfachen. Ergänzend betrachten wir eine Aufgaben-„Familie“ zu rationalen Zahlen, in der über mehrere Jahrgängen eine gemeinsame Problemstellung präsent war.

Wir informieren über die **65. Internationale Mathematik-Olympiade** (IMO), bei der das deutsche Team mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen erfolgreich abschnitt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 29 – Schubfachprinzip

Aufgabe MO630941/MO631041. Gegeben ist eine Menge von 115 Punkten, die alle im Inneren eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge 2 liegen[3].

Zeigen Sie, dass es einen Kreis mit dem Radius 1 gibt, in dessen Inneren mindestens 20 dieser Punkte liegen.

Vorbemerkung: Aufgabenstellungen des Typs *„Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ...“* sind häufig mit dem Schubfachprinzip[4] lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen“ nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint. Das DIRICHLETsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert[5]:

> *Werden (für natürliche Zahlen n und k) $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.*

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, wir müssen „nur“ die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe MO630941: Offenbar könnten die 115 Punkte die Objekte sein. Wegen $6 \cdot 19 = 114$ würde es genügen, 6 geeignete Figuren („Schubfächer“) zu finden, die das gegebene Sechseck vollständig überdecken. Wären in keinem dieser Schubfächer 20 Punkte, könnten nur maximal 114 Punkte erfasst werden. Also muss in mindestens einem dieser Schubfächer 20 (oder mehr) Punkte liegen. *Geeignet* bedeutet dabei, dass um die Figuren ein Kreis mit dem Radius 1 beschrieben werden kann.

Da ein regelmäßiges Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken (jeweils mit der Seitenlänge $a = 2$) zusammengesetzt werden kann, versuchen wir in naheliegender Weise als Figuren diese Teildreiecke zu verwenden, also die sechs Dreiecke A_1A_2M, ..., A_6A_1M. Dann ist bereits die Aussage nach dem Schubfachprinzip richtig, dass in mindestens einem dieser Dreiecke mindestens 20 Punkte liegen. Aber für einen Kreis, der beispielsweise das Dreieck A_1A_2M umschreibt, liegt dessen Umkreismittelpunkt

[3] Da die Maßeinheit für die Lösung unerheblich ist, werden Längenangaben ohne Einheiten angegeben.

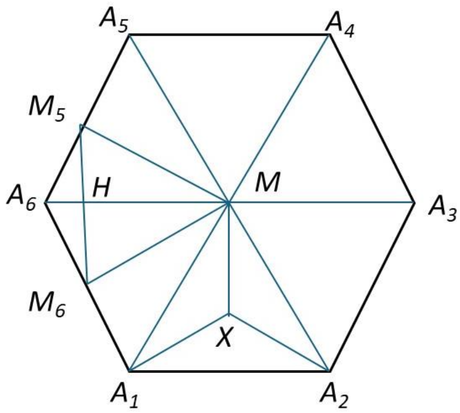
[4] siehe MathKost, Hefte 12/2022 und 01/2023

[5] Eine frühe, aber nur anschauliche Beschreibung des Schubfachprinzips finden wir bereits 1636 in Daniel Schwenters „Deliciae physico-mathematicae“ (siehe MatheKost Heft 01/2023).

X im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, der zugleich Schnittpunkt der Höhen ist. Damit beträgt der Radius $\frac{2}{3}$ einer Höhe und wir finden (wegen 1.5² = 2.25 < 3) die Abschätzung

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1.5}{3} \cdot a = \frac{a}{2} \geq 1$$

Diese Schubfächer sind im Sinne der Aufgabenstellung offenbar zu groß!



Fällen wir dagegen von M aus die Lote auf die Dreiecksseiten, so sind deren Fußpunkte die Seitenmitten des Sechsecks. Betrachten wir die Figur $A_6M_6MM_5$. Wegen der Rechtwinkligkeit in den Punkten M_5 und M_6, liegen beide Punkte jeweils auf einem THALESkreis mit dem Durchmesser $\overline{A_6M}$. Also wird jedes dieser Drachenvierecke von einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ umschrieben.

Da die gegebenen 115 Punkte im Innern des Sechsecks liegen, liegt keiner der Punkte auf dem Rand und somit weder auf $A_1, \dots, 6$ noch auf $M_1, \dots, M_6$. Allerdings könnten Punkte auf M liegen und wären dann nicht im Innern der überdeckenden Kreise. Da es aber nur endlich viele Punkte sind, finden wir ein regelmäßiges Sechseck, dass vollständig im Innern des gegebenen Sechsecks liegt und alle 115 Punkte im Innern oder auf dem Rand enthält. Konstruieren wir wie eben die zugehörigen Drachenvierecke, so werden sie durch Kreise mit einem Radius kleiner als 1 überdeckt, Wir können also diese Kreise um deren Mittelpunkte strecken, bis der Radius 1 beträgt, so dass eventuelle Randpunkte nun im Inneren der gestreckten Kreise liegen. ❑

Mit der Anwendung des Schubfachprinzips können manchmal trivial erscheinende Entscheidungen prägnant begründet werden (auch wenn es wie bei folgender Aufgabe in den Musterlösungen nicht erwähnt wird).

Aufgabe MO630934/MO631034. Es sei n eine positive ganze Zahl mit folgender Eigenschaft: Je zwei aufeinander folgende Ziffern bilden eine Primzahl, und diese Primzahlen sind paarweise verschieden.

a) Zeigen Sie, dass n höchstens 12 Stellen hat.
b) Untersuchen Sie, ob es eine solche Zahl n mit 12 Stellen gibt.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Da zweistellige Primzahlen ungerade sind und auch nicht auf 5 enden, müssen alle Ziffern von n bis auf möglicherweise die erste eine der Ziffern 1, 3, 7 oder 9 sein. Alle zweistelligen Primzahlen nur aus diesen Ziffern sind genau die zehn Primzahlen 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 und 97.

Eine k-stellige Zahl enthält $k-1$ Paare aufeinander folgender Ziffern, von denen sich alle bis auf das erste zu einer der aufgelisteten zehn zweistelligen Primzahlen zusammensetzen sollen, und jede dieser Primzahlen kommt höchstens einmal vor. ***Nach dem Schubfachprinzip*** können nur 10 solche Paare aufeinanderfolgender Ziffern in Frage kommen, denn bei 11 und mehr Paaren würde mindestens eine der 10 Primzahlen mindestens zweifach auftreten.

Ist n eine k-stellige Zahl mit der in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaft, so muss also $k-2 \leq 10$ und damit $k \leq 12$ gelten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir versuchen, die Ziffernpaare 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 und 97 zu einer 11-stelligen Zahl zusammenzusetzen. Da im Innenteil jede Ziffer einmal die erste und einmal die zweite Ziffer eines Paares ist, muss diese 11-stellige Zahl mit 1 beginnen und 9 enden, denn in den zehn Ziffernpaaren kommt die 1 viermal als erste und nur dreimal als zweite Ziffer vor. Umgekehrt ist es bei der 9. Diese kommt nur einmal als erste Ziffer, aber zweimal als zweite Ziffer vor. Die anderen beiden Ziffern treten gleich oft als erste und als zweite Ziffer auf.

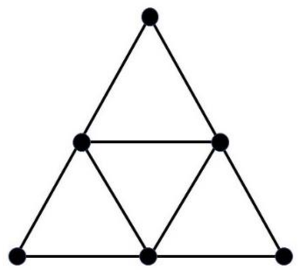
Geeignete 11-stellige Zahlen sind beispielsweise n = 11 317 197 379 oder n = 19 737 131 179. Nun müssen wir noch die Zehnerziffer einer zweistelligen Primzahl, die auf 1 endet und noch nicht in der oben genannten Liste der 10 Primzahlen steht, voranstellen, also 4 oder 6, um die geforderte 12-stellige Zahl zu finden. Eine Herleitung wie hier ist bei dieser Aufgabenstellung jedoch nicht erforderlich. Es genügt die Angabe einer Lösung, die durch die Folge der aneinandergereihten Primzahlen erläutert werden:

n = 411 317 197 379 (mit der paarweisen Folge 41-11-13-31-17-71-19-97-73-37-79)
n = 611 317 197 379 (mit der paarweisen Folge 61-11-13-31-17-71-19-97-73-37-79)
n = 419 737 131 179 (mit der paarweisen Folge 41-19-97-73-37-71-13-31-11-17-79)
n = 619 737 131 179 (mit der paarweisen Folge 61-19-97-73-37-71-13-31-11-17-79)

❑

Aufgabe MO291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

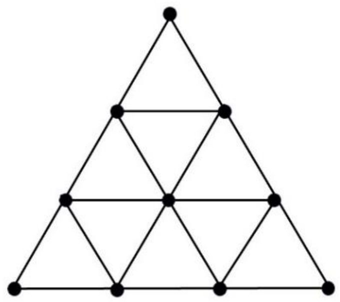
Lösungshinweise: Es sei a die Seitenlänge des Dreiecks. Dann können die fünf (und sogar sechs) Punkte wie in der Abbildung gelegt werden: Werden die Mittelpunkte der Dreiecksseiten verbunden, beträgt der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten hierbei $\frac{a}{2}$.

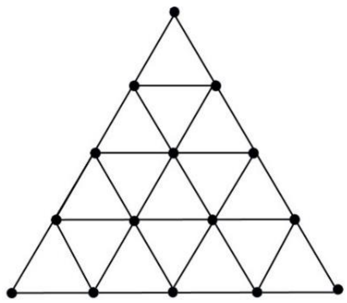


Wir zeigen nun, dass bei keiner Lage von fünf Punkten im Dreieck der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten größer als $\frac{a}{2}$ sein kann. Gäbe es nämlich eine solche Lage, so wäre jeder dieser Abstände größer als $\frac{a}{2}$. Daher könnte dann in jedem der vier in der Abbildung gezeigten Teildreiecke höchstens ein Punkt liegen, also lägen insgesamt höchstens vier Punkte im ganzen Dreieck. Damit ist bewiesen, dass der größte Mindestabstand zweier Punkte von 5 in einem gleichseitigen Dreieck befindlichen Punkte höchstens $\frac{a}{2}$ beträgt und die gezeigte Verteilung diesen Mindestabstand realisiert.

Lösungsvariante: Wir betrachten die fünf zu verteilenden Punkte als *5 Objekte* und die vier Teildreiecke wie in obiger Skizze als *4 Schubfächer*. Nach dem **Schubfachprinzip** befinden sich in mindestens einem Teildreieck mindestens zwei Punkte. Deren Abstand kann aber nicht größer als $\frac{a}{2}$ sein. Da mit Verteilung der fünf Punkte auf die Eckpunkte der Teildreiecke eine Verteilung mit diesem Mindestabstand gefunden wurde, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Wir wollen diese Aufgabe verallgemeinern: Ermitteln Sie eine Verteilung von möglichst vielen verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!





Lösungshinweise: Wir betrachten zwei Beispiele, indem wir die Dreiecksseiten dritteln bzw. vierteln und daraus Dreiecksgitter mit 9 bzw. 16 Teildreiecken konstruieren. Mittels **Schubfachprinzips** können wir zeigen, dass es im ersten Fall mindestens zwei Punkte unter den 10 Punkten gibt, deren Abstand nicht größer als $\frac{a}{3}$ ist. Um diesen Abstand zu gewährleisten, lassen sich die 10 Punkte auf die Gitterpunkten legen.

In Analogie könnten wir erwarten, dass im zweiten Fall 17 Punkte auf die 16 Teildreiecke verteilt werden können, so dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{a}{4}$ beträgt. Aber da nur 15 Gitterpunkte zur Verfügung stehen, finden wir in diesem Fall keine Verteilung mit dem Mindestabstand von $\frac{a}{4}$.

Dieser Aspekt wird mit folgender Aufgabe vertieft.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Lösungshinweise: Wir betrachten die zehn beliebig vorgegebenen Punkte als 10 Objekte und die neun Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ als Schubfächer. Nach dem **Schubfachprinzip** befinden sich in mindestens einem der Teilquadrate mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann. ❑

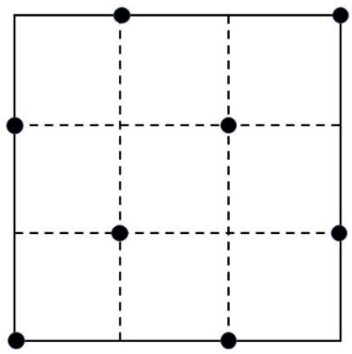
Wir bemerken, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

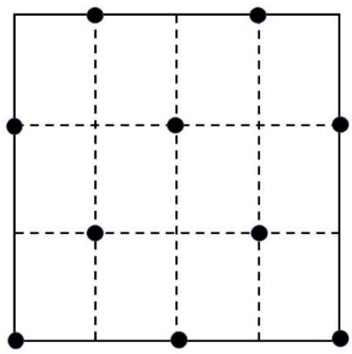
Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten in einem Quadrat mit möglichst großem Mindestabstand.

Hinweis: Im Gegensatz zu „der Abstand von zwei Punkten ist höchstens …“ bedeutet „möglichst großer Mindestabstand“, dass jedes Paar von Punkten mindestens diesen Mindestabstand einhält.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt für den maximalen Mindestabstand von 10 Punkten in einem Quadrat $d_{10} \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471$.

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist: Wählen wir eine Zerlegung in neun Teilquadrate (linke Abbildung), so ist für die Einhaltung des Mindestabstandes erforderlich, die Punkte jeweils diagonal auf die Eckpunkte der Teilquadrate zu verteilen. Dies gelingt aber nur für maximal 8 Punkte.





Wir zeigen nun, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilen wir nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ (rechte Abbildung) und verteilen die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand

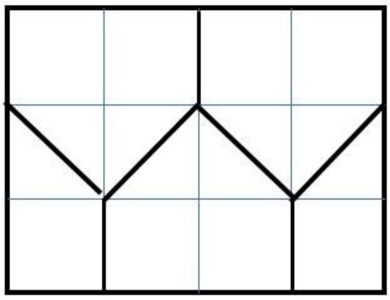
$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{144}} = \frac{5}{12} > 0{,}416.$$

❑

Aufgabe MO221034. Beweisen Sie folgende Aussage: In einem Quadrat der Seitenlänge a gibt es 10 Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5} \cdot a$ zueinander haben.

Lösungshinweise: Für die Beantwortung der Aufgabe genügt es, ein Beispiel einer solchen Verteilung anzugeben und den Nachweis zu führen, dass der genannte Mindestabstand bei jedem Punktepaar eingehalten wird. Die Gitterpunkte in der oben dargestellten Teilung des Quadrates in 3×4 Rechtecke bieten den Lösungsansatz. ❑

Die Schubfächer müssen nicht alle die gleiche Form oder Größe haben:



Aufgabe. Man zeige, dass von 6 Punkten in einem 3×4-Rechteck wenigstens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{5}$ haben.

Lösungshinweise: Wir zerlegen das Rechteck in 5 Teilfiguren, wie in der Abbildung ersichtlich. Nun betrachten wir die vorgegebenen 6 Punkte als sechs Objekte und die konstruierten 5 Teilfiguren als 5 Schubfächer. In mindestens einer der Teilfiguren befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 Punkte. Der maximale Abstand zweier Punkte in so einer Teilfigur beträgt

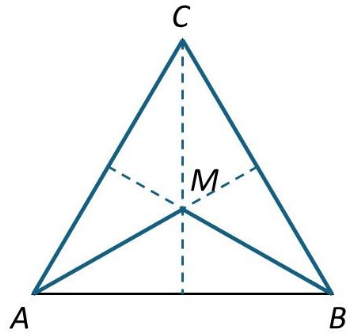
$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

Aufgabe MO211042. Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $|\overline{XY}| \leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $|\overline{PQ}| = d$ beträgt.

Untersuchen Sie, ob man jede Viereckfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!

Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)



Lösungshinweise: So eine Zerlegung ist nicht immer möglich. Es seien A, B, C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und es sei M der Mittelpunkt dieses Dreiecks. Dann hat das konkave Viereck $AMBC$ Durchmesser 1, denn es gilt beispielsweise $|\overline{AB}| = 1$ und für kein Punktepaar aus dem Viereck ist der Abstand größer als 1.

Zerlegen wir das Viereck $AMBC$ *nun* in zwei (beliebige) Teilflächen, so muss ***nach Schubfachprinzip***[6] eine dieser Teilflächen mindestens zwei der Punkte A, B, C enthalten (die paarweise den Abstand 1 haben). Diese Teilfläche hat somit einen Durchmesser von 1. ❑

Hinweis: Betrachten wir ein Viereck mit den Seitenlängen 2×1, so bildet die Diagonale den Durchmesser der Länge $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Teilen wir dieses Rechteckfläche in zwei kongruente Quadrate jeweils der Seitenlängen 1×1, so betragen die Durchmesser dieser Quadrate $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Wegen $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ gibt es also Vierecke mit der beschriebenen Eigenschaft.

Eine aktuelle MO-Aufgabe und ihre Vorgängerin

Aufgabe MO630944/MO631044. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $x^2 + y^2 = 1$.
(2) $a = x + y$ ist rational.
(3) $b = \sqrt{(1 + x)(1 + y)}$ ist rational.

Vorbemerkungen: Spontan könnten uns drei Lösungsansätze einfallen:

- Wir wollen nachweisen, wie im Allgemeinen mit der Eigenschaft (1) gleichzeitig a und b rationale Zahlen sein können.
- Wir lösen das (nicht-lineare) Gleichungssystem nach (x, y) auf und lassen dabei zu, dass a und b freie Parameter sein könnten.
- Wir suchen nach einem Zusammenhang zwischen a und b, der die Vielfalt für (a, b) einschränkt und auf die Lösungsmenge (x, y) schließen lässt.

Bevor wir jedoch die Lösung der Aufgabe MO631044 beginnen, erinnern wir uns an eine sehr ähnlich formulierte Aufgabenstellung und deren Lösungshinweise:

Aufgabe MO480943. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $(1 + x^3)(1 + y^3) = 1$.

---
[6] Drei Objekte (Eckpunkte des Dreiecks ΔABC) und zwei Schubfächer (Teilflächen)

(2) $\sqrt[3]{|(1+x)(1+y)|}$ ist rational.

(3) $\sqrt[3]{|xy(x+y)|}$ ist rational.

Lösungshinweise: Wir formen die Aussage (2) um zu $a^3 = (1+x)(1+y)$ und die Aussage (3) um zu $b^3 = xy(x+y)$. Laut Aufgabenstellung sind a und b rationale Zahlen. Wir erkennen

(4) $(1+x^3)(1+y^3) = 1 \;\Leftrightarrow\; x^3+y^3+(xy)^3 = 0$

und

(5) $(1+x)(1+y) = a^3\; x+y+xy = a^3-1$

Durch fortlaufendes äquivalentes Umformen erhalten wir eine Beziehung zwischen a und b:

$$
\begin{aligned}
0 &= x^3+y^3+(xy)^3 = (x+y)^3+(xy)^3-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)\cdot((x+y)^2-xy(x+y)+(xy)^2)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)\cdot\big((x+y+xy)^2-3xy(x+y)\big)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)^3-3xy(x+y)(x+y+xy)-3xy(x+y)\\
&= (x+y+xy)^3-3xy(x+y)(1+x+y+xy)\\
&= (a^3-1)^3-3a^3b^3
\end{aligned}
$$

Also gilt $3a^3b^3 = (a^3-1)^3$. Bei jeder von null verschiedener rationaler Zahl lässt sich der Betrag eindeutig in ein Produkt von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten zerlegen. Offenbar ist die linke Seite durch 3 teilbar. Wir betrachten also den Primfaktor 3.

Wären die beiden Seiten in dieser Gleichung ungleich null, so wäre für den Exponenten p des Primfaktors 3 einerseits $p \equiv 0$ (mod 3) (rechte Seite), andererseits $p \equiv 1$ (mod 3) (linke Seite). Wegen des Widerspruchs sind folglich beide Seiten gleich null.

Somit muss $ab = a^3-1 = 0$, also $a = 1, b = 0$ gelten. Damit finden wir abschließend

$$b^3 = xy(x+y) = xy(a^3-1-xy) = -(xy)^2$$

Damit gilt $xy = 0$ und deshalb $x = 0$ oder $y = 0$. Setzen wir dies in Gleichung (1) ein, verbleibt als einziges Lösungspaar $(x,y) = (0;0)$. Ein Probe bestätigt, dass $(0;0)$ tatsächlich alle drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt. ❑

Lösungshinweise zu Aufgabe MO641044: Auch wenn die Umformungen in der Lösung zu Aufgabe MO480943 sehr komplex und „gekünstelt“ erscheinen, können wir die Lösungsstrategie auf die Aufgabe MO641044 übertragen.

Wir formen Aussage (3) um zu $(1+x)(1+y)=b^2$ und finden unter Verwendung von Aussage (2) $xy=b^2-x-y-1=b^2-a-1$. Setzen wir dies in Aussage (1) ein, erhalten wir die Gleichung

$$1=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-\ 2(b^2-a-1).$$

Weiter führt dies zu

$$2b^2=a^2+2a+1=(a+1)^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{2}\cdot|b|=|a+1|.$$

Wäre $b\neq 0$, so folgte aus der letzten Gleichung, dass mit den rationalen Zahlen a und b auch $\sqrt{2}=\frac{|a+1|}{|b|}$ eine rationale Zahl wäre. Wegen des Widerspruchs zur bekannten Irrationalität von $\sqrt{2}$ muss $|b|=|a+1|=0$ und folglich $a=\ -1$ und $b=0$ gelten.

Es gilt $xy=b^2-a-1=0$. Es ist also $x=0$ oder $y=0$. Einsetzen in Aussage (2) $x+y=a=-1$ liefert $(0;-1)$ und $(-1;0)$ als einzige Kandidaten für Lösungspaare. Eine Probe bestätigt, dass $(0;-1)$ und $(-1;0)$ in der Tat alle Forderungen der Aufgabenstellung erfüllen. ❑

Rationale Zahlen – eine MO-Aufgabenfamilie

Wir betrachten im Folgenden eine Aufgabe, bei deren Lösungshinweisen der Ausruf *„Wie soll man darauf kommen!“* nahe liegt. Es zeigt sich aber, dass in einer Reihe von hinführenden Aufgaben die Thematik umfassend vorbereitet wurde.

Aufgabe MO331042. Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Für den Beweis wäre es ausreichend, geeignete rationale Zahlen anzugeben. So leisten für jede natürliche Zahl n die rationalen Zahlen $t=\frac{1}{(n^2-1)^2}$ das Geforderte, denn es gilt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2}+\frac{1}{(n^2-1)}}=\sqrt{\frac{1+(n^2-1)}{(n^2-1)^2}}=\frac{n}{n^2-1}.$$

Um solche geeignete Zahlen t zu finden, versuchen wir den Wurzelausdruck zu analysieren. Da wir nicht alle Zahlen finden müssen, ist es zulässig, Vereinfachungen in den Betrachtungen vorzunehmen. Sicher ist es günstig für die Zielstellung, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also wenn es natürliche Zahlen p und q mit $q>0$ gibt, so dass $t=\frac{p^2}{q^2}$ gilt. Dann bleibt die innere Wurzel rational. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2}+\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}\,.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p+q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p=1$ und $q=n^2-1$ erhalten wir die oben angegebene Zahlenfolge. ❑

Ergänzend fragen wir uns, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ irrational ist. Betrachten wir beispielsweise die Zahlen $t=\frac{1}{n^4}$, so erkennen wir aus

$$\sqrt{t+\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n>0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Bereits in der Runde 1 des MO-Jahrgangs wurde die Struktur der zu untersuchenden Zahlen verwendet, die es für ganze Zahlen zu analysieren galt.

Aufgabe MO330913/MO331013. Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen *t* ist

$$z=\sqrt{t+\sqrt{t}}$$

eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösungshinweise: Für $t=0$ ist $z=\sqrt{0+\sqrt{0}}=0$, also eine rationale Zahl.

Angenommen, für eine ganze Zahl $t>0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2=t+\sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t}=z^2-t$ rationale Zahlen wären. Dann muss es eine positive ganze Zahl m mit $t=m^2$ geben. Mit dieser wäre demnach $z=\sqrt{m^2+m}$, woraus weiterhin folgt, dass auch m^2+m eine Quadratzahl sein muss.

Wegen $m^2< m^2+m<(m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war. Also haben wir bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t>0$ ist z keine rationale Zahl. Dagegen ist für $t=0$ die Zahl z rational. ❑

Bereits zwei Jahre davor wurde die Struktur in Aufgaben schon verwendet und dabei besonders auf die Darstellung rationaler Zahlen als Quotient zweier ganzer Zahlen hingewiesen.

Aufgabe MO311034.
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen

(1) Es gilt $t > 1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t = \frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n, m ist $n = 1000$.

b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n = 10000$ anstelle von $n = 1000$ steht!

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Falls $t, s \in Q$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ ist, gilt $\sqrt{t} = s^2 - t^2 \in Q$. Also ist t das Quadrat einer rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t = \frac{n}{m}$ müssen n, m Quadrate von natürlichen Zahlen sein. Dieses ist für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Wir setzen $r := \sqrt{t} = \frac{100}{q} \in Q$ mit $q^2 = m$. Aus der Bedingung (1) folgt $q < 100$. Nun ist die Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}} = s$ äquivalent zu

$$r \cdot (r+1) = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100 \cdot (100+q) = (qs)^2$$

Die Gleichung rechts hat offenbar genau dann eine Lösung in natürlichen Zahlen, wenn $100 + q$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21, 44, 69, 96\}$.

Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, entfallen die geraden Zahlen $q = 44$ und $q = 96$ als Lösung und somit gibt es für t die zwei Lösungen $\frac{100^2}{21^2}, \frac{100^2}{69^2}$. ❑

Bemerkung: Ohne die Bedingung (1) gibt es für die Teilaufgabe b) unendlich viele Lösungen

$$t = \frac{10000}{(a^2 - 100)^2}$$

mit natürlichen Zahlen a ($a > 10$ und $ggT(a, 10) = 1$). Diese ergeben somit eine weitere konstruktive Lösung zu Aufgabe MO331042.

Aufgabe MO311024. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24 \cdot \sqrt{t}}$ rational ist!

Lösungshinweise: Es sei $r^2 = t + 24 \cdot \sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24 \cdot n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot 12 \cdot n + 12^2 = (n + 12)^2$.

Setzen wir zur Vereinfachung $m \coloneqq n + 12 > 0$, erhalten wir $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist dabei $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, so dass (da 144 durch 2 teilbar ist) beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich folgende Lösungen:

- für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.
- für $m - r = 6$ ist $m + r = 24$, also $r = 9$, $m = 15$, $n = m - 12 = 3$ und $t = n^2 = 9$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{9 + 24 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{9 + 24 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ rational.
- für $m - r = 8$ ist $m + r = 18$, also $r = 5$, $m = 13$, $n = 13 - 12 = 1$ und $t = n^2 = 1$. Für diese Konstellation ist $\sqrt{1 + 24 \cdot \sqrt{1}} = \sqrt{25} = 5$ rational.

Damit ergeben sich genau vier Lösungen $t \in \{1,9,64,625\}$. ❑

Aufgabe MO301043A. Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Wir vermuten, dass es eine derartige Zahl m nicht gibt und wollen deshalb die folgende Aussage beweisen:

Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}}$ für alle $i = 1,2,\dots,m+1$ als rational nachzuweisen.

Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \ldots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \qquad (i = 2, 3, \dots, m+1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen. k ist wie gefordert positiv. Weiter gilt $t_2 > t_3 > \cdots > t_{m+1} > 0$, also sind $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen $t_1 = 0$ und

$$\sqrt{t_i + k \cdot \sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} + k \cdot \frac{k}{i^2 - 1}} = \frac{k}{i^2 - 1} \cdot \sqrt{1 + (i^2 - 1)} = \frac{k \cdot i}{i^2 - 1}$$

Sind für alle $i = 2,\dots,m+1$ (natürliche, also) rationale Zahlen. ❑

65. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 22. Juli 2024 in Bath (Vereinigtes Königreich) statt. Mit 81 teilnehmenden Schülerinnen und 528 Schülern aus 108 Ländern lag die Teilnahme wieder nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern, ebenfalls in Bath).

Insgesamt wurden 54 Gold-, 121 Silber- und 145 Bronzemedaillen vergeben, somit erhielten 320 Teilnehmende (52.9%) einen Preis. Mit zwei Silber- und vier Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 120 Punkten von 252 möglichen Punkten (47.6%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **31. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2022: 192 Punkte/7. Platz; 2023: 156/20. Platz). Angeführt wird diese Länderliste vom Vorjahreszweiten, den USA (192 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen), gefolgt von der Volksrepublik China (190 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaillen) und der Republik Korea (168 Punkte, zwei Gold- und vier Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern erreichten nur die Mannschaften aus dem Vereinigten Königreich (162 Punkte/6. Platz), aus Ungarn (155/8), Polen und Türkei (beide 151/9) mehr als 150 Punkte.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 65. IMO

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1. Man bestimme alle reellen Zahlen α, sodass für jede positive ganze Zahl n die ganze Zahl $\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$ ein Vielfaches von n ist.

(Dabei bezeichnet $\lfloor z\rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich z. Beispielsweise gilt $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ und $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Aufgabe 2. Man bestimme alle Paare $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen, für die es positive ganze Zahlen g und N gibt, sodass $ggT(an + b, bn + a) = g$ für alle ganzen Zahlen $n > N$ gilt.

(Dabei bezeichnet $ggT(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen x und y.)

Aufgabe 3. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen, und es sei N eine positive ganze Zahl. Für jedes $n > N$ komme die Zahl a_{n-1} unter $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ genau a_n mal vor.

Man beweise, dass mindestens eine der Folgen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ und $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ab einer gewissen Stelle periodisch ist.

(Eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ist ab einer gewissen Stelle periodisch, falls es positive ganze Zahlen p und M gibt, sodass $b_{m+p} = b_m$ für alle $m > M$ gilt.)

Aufgabe 4. Es sei ΔABC ein Dreieck mit $|\overline{AB}| < |\overline{AC}| < |\overline{BC}|$. Weiterhin seien I der Inkreismittelpunkt und ω der Inkreis des Dreiecks ΔABC. Sei X der von C verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AC durch X den Kreis ω berührt. Analog sei Y der von B verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AB durch Y den Kreis ω berührt. Die Gerade AI schneide den Umkreis des Dreiecks ΔABC erneut in $P \neq A$. Es seien K und L die Mittelpunkte von $\overline{AC}$ beziehungsweise $\overline{AB}$.

Man beweise, dass $\angle KIL + \angle YPX = 180°$ gilt.

Aufgabe 5. Die Schnecke Turbo spielt auf einem Brett mit 2024 Zeilen und 2023 Spalten. Auf 2022 Feldern befinden sich versteckte Monster. Zu Beginn weiß Turbo nicht, wo sich Monster befinden, aber sie weiß, dass es in jeder Zeile, außer der ersten und der letzten, genau ein Monster gibt und dass es in jeder Spalte höchstens ein Monster gibt.

Turbo unternimmt eine Reihe von Versuchen, von der ersten Zeile zur letzten Zeile zu gelangen. In jedem Versuch wählt sie ein Startfeld in der ersten Zeile und kriecht dann wiederholt auf ein Nachbarfeld mit einer gemeinsamen Seite. (Sie darf auf bereits besuchte Felder zurückkehren.) Wenn sie auf ein Feld mit einem Monster kommt, dann endet der Versuch und sie muss in der ersten Reihe einen neuen Versuch beginnen. Die Monster bleiben immer am selben Ort, und Turbo merkt sich für jedes besuchte Feld, ob dort ein Monster ist oder nicht. Wenn sie ein Feld in der letzten Zeile erreicht, dann endet ihr Versuch und das Spiel endet.

Man bestimme das kleinstmögliche n, für das Turbo eine Strategie hat, sicher in höchstens n Versuchen die letzte Zeile zu erreichen, unabhängig von der Position der Monster.

Aufgabe 6. Es sei Q die Menge der rationalen Zahlen. Eine Funktion $f: Q \to Q$ heißt *aquäsulisch*[7], wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für alle $x, y \in Q$ gilt

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \text{ oder } f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Man zeige, dass es eine ganze Zahl c gibt, sodass es für jede *aquäsulische* Funktion f höchstens c verschiedene rationale Zahlen der Form $f(r) + f(-r)$ mit rationalem r gibt, und man bestimme den kleinstmöglichen Wert für ein solches c.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch können wir uns mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1: (mit einem Punktedurchschnitt von 5.6 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 6.7 Punkte und insgesamt 413-mal volle Punktzahl gehörte diese Aufgabe zu den leichteren Problemen) Man untersuche die Aufgabenstellung für $n = 2$ und $n = 3$.

zu Aufgabe 2: (durchschnittlich 2.5 Punkte alle Teilnehmer/4.5 Punkte deutsches Team) Man prüfe, ob es Lösungen für $a = 1$ oder $a = 2$ gibt.

zu Aufgabe 3: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.4 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.3 Punkte und insgesamt 501-mal 0 Punkte die „Knalleraufgabe“) Finden Sie eine Folge, die das Konstruktionsprinzip erfüllt.

zu Aufgabe 4: (durchschnittlich 4.9 Punkte alle Teilnehmer/3.2 Punkte deutsches Team) Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und prüfen Sie für einen selbstgewählten Spezialfall die Behauptung.

zu Aufgabe 5: (durchschnittlich 2.2 Punkte alle Teilnehmer/5.3 Punkte deutsches Team) Übertragen Sie die Problemstellung auf kleinere Spielfelder

[7] Aquae Sulis war eine römische Stadt in der Provinz *Britannia* (Britannien) an der Stelle des heutigen Bath in der Grafschaft Somerset, England. Der Ort gelangte vor allem wegen seiner heißen Quellen und eines damit verbundenen Heiligtums der Göttin Sulis zu überregionaler Bedeutung.

(z.B. 4 Zeilen, 3 Spalten und 2 Monster) und lösen Sie die entsprechende Aufgabe.

zu Aufgabe 6: (mit einem Punktedurchschnitt von 0.4 Punkten über alle Teilnehmer/deutsches Team 0.0 Punkte und insgesamt 482-mal 0 Punkte die zweite „Knalleraufgabe“) Gibt es aquäsulische lineare Funktionen? Falls ja, lösen Sie für diese die Aufgabenstellung.

Termine

Start zur Runde 1 der 64. Mathematik-Olympiade. August 2024, Informationen unter www.mathematik-olympiaden.de/moev/olympiaden/termine.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO), 24. bis 30. August 2024, Szeged (Ungarn), Informationen unter https://memo2024.bolyai.hu.

Wissenschaft LIVE! Die Online-Veranstaltungsreihe der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e. V. und der Stiftung Jugend forscht e. V.: 19. September 2024 von 15:30 bis 16:45 Uhr zum Thema „Laser und Attosekundenphysik“ mit Alexander Weigel, Max-Planck-Institut für Quantenoptik (Garching bei München). Informationen und Online-Anmeldung bis 19.09.2024 unter https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-laser-und-attosekundenphysik.html

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 5/2024

Aufgabe T-5 (Teamwettbewerb der 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck/Österreich). Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und O sein Umkreismittelpunkt. Die Gerade AO schneide den Umkreis I von ΔABC ein weiteres Mal im Punkt D und die Gerade BC im Punkt E. Der Umkreis von ΔCDE schneide die Gerade CA ein weiteres Mal im Punkt P. Die Gerade PE schneide die Gerade AB im Punkt Q. Die Gerade durch O parallel zu PE schneide die Höhe im Dreieck ΔABC durch A im Punkt F.

Zeige $|\overline{FP}| = |\overline{FQ}|$.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen $\angle ABC$ mit β und $\angle BCA$ mit γ. O.B.d.A. sei $|\overline{AB}| > |\overline{AC}|$, oder gleichwertig, $\beta > \gamma$.

Die Strecke $\overline{AD}$ ist ein Durchmesser des Umkreises von Dreieck ΔABC. Also erhalten wir nach dem Satz von Thales $\angle DCA = 90°$. Da die Punkte D, E, C und P laut Konstruktion auf einem Kreis liegen, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz über der

Sehne $\overline{DP}$ die Winkelgleichheit $\angle PED = \angle PCD = \angle DCA = 90°$, woraus unmittelbar $\angle AEQ = 90°$ folgt.

Da $\angle EAQ = \angle OAB = 90° - \gamma$ ist, erhalten wir auch $\angle AQP = \angle AQE = \gamma$. Im Sehnenviereck $CEDP$ finden wir zudem

$$\angle ADP = \angle EDP = 180° - \angle PCE = \angle ACB = \gamma.$$

Dies bedeutet, dass auch das Viereck $AQDP$ ein Sehnenviereck ist.

Wir bezeichnen den Kreismittelpunkt des Umkreises von $AQDP$ mit F'. Ausgehend von $\angle APQ = 180° - \angle CAB - \angle AQP = \beta$ folgt $\angle F'AQ = 90°$. Also liegt F' auf der Höhe des Dreiecks ΔABC, die durch A verläuft.

Außerdem muss F' per Definition auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AD}$ liegen, also auf der Linie durch O parallel zu PE. Wir erhalten also $F' = F$. Daraus folgt unmittelbar für die Radien $\overline{FP}$ und $\overline{FQ}$ wie behauptet $|\overline{FP}| = |\overline{FQ}|$. ❑

Monatsaufgabe 8/2024[8]

Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8×8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen

[8] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.09.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
08/2024 (August)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.