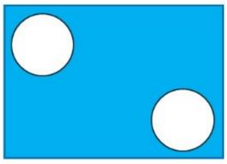
Teil A: Im Fußball-Fieber

Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato – verfolgten im Sommer die Spiele der Europameisterschaft im Fußball mit Interesse, denn auch Quadrato und Kreisa spielen in Mannschaften eines Fußball-Vereins.

Aufgabe 1. Quadrato bereitete sich auf ein Turnier vor und übte Torwandschießen. Wenn er den Fußball durch das Loch rechts unten schoss, erhielt er einen Punkt. Traf er dagegen das Loch links oben, erhielt er drei Punkte. Wenn er daneben schoss, gab es keinen Punkt. Jeden Tag schoss er dreimal und zählte die Trefferpunkt zusammen.



Am Montag schaffte er nur wenige Punkte. Am Dienstag waren es schon 4 Punkte mehr als am Vortag. Mittwoch war sein erfolgreichster Tag. Am Donnerstag gelangen ihm halb so viele Trefferpunkte wie am Dienstag. Quadrato freute sich, dass er in der Summe der vier Tage mehr als 15 Trefferpunkte erreichte. Außerdem stellte er fest, dass diese Summe ein Vielfaches von 4 ist.

Kannst du ermitteln, wie viele Punkte Quadrato insgesamt an diesen vier Tagen schaffte? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – *Antwortsatz:* Quadrato schaffte insgesamt an diesen vier Tagen 20 Punkte. Dabei erreichte Quadrato am Montag 2, Trefferpunkte, am Dienstag 6 Trefferpunkte, am Mittwoch 9 Trefferpunkte und am Donnerstag 3 Trefferpunkte.

Probe: Am Dienstag waren es 4 Trefferpunkte mehr als am Montag: 6 = 2 + 4.
Am Donnerstag waren es halb so viele Trefferpunkte wie am Dienstag:
6 : 2 = 3. Am Mittwoch war der erfolgreichste Tag: 9 > 2, 9 > 6, 9 > 3.
Summe 2 + 6 + 9 + 3 = 20 > 15. 20 ist ein Vielfaches von 4: 20 : 4 = 5.

Herleitung: Du kannst diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Wenn du weißt, wie viele Trefferpunkte Quadrato am Montag schaffte, kannst du ermitteln, wie viele Trefferpunkte es an den anderen Wochentagen waren. Beachte dabei:

- Jeden Tag konnte er zwischen 0 (dreimal daneben) und 9 Punkte (dreimal links oben getroffen) erreichen.
- Weil Mittwoch sein erfolgreichster Tag war, erreichte er am Mittwoch mehr Punkte als an jedem anderen Tag.

Trage deine Erkenntnisse in einer Tabelle ein. Da Quadrato am Montag nur wenige Punkte erreichte, könntest du am Montag mit 1 Punkt beginnen.

Montag	Dienstag	Donnerstag	Mittwoch	Summe	Gesamtsumme
1	1 + 4 = 5	5 : 2 nicht möglich			
2	2 + 4 = 6	6 : 2 = 3	7	11	18, aber kein Vielfaches von 4
2	2 + 4 = 6	6 : 2 = 3	8	11	19, aber kein Vielfaches von 4
2	2 + 4 = ***6***	6 : 2 = ***3***	***9***	***11***	***20***
3	3 + 4 = 7	7 : 2 nicht möglich			
4	4 + 4 = 8	8 : 2 = 4	9	16	25, aber kein Vielfaches von 4
5	5 + 4 = 9	9 : 2 nicht möglich			
6	6 + 4 = 10 nicht möglich				

Da in der Tabelle angegeben ist, wie du die Zahlen ermittelst, ist die Probe enthalten.

Lösungsvariante: Du bemerkst, dass Quadrato am Dienstag eine gerade Trefferzahl erreicht haben muss (weil es am Donnerstag halb so viele Punkte wie am Dienstag waren).

- Wären es am Dienstag 0, 2 oder 4 Trefferpunkte gewesen, ist der Vergleich mit Montag nicht erfüllbar.
- Waren es am Dienstag 6 Trefferpunkte, findest du für Montag (6 – 4 =) 2 Punkte und für Donnerstag (6 : 2 =) 3 Punkte. An diesen drei Tagen sind es dann (2 + 6 + 3 =) 11 Punkte. Am Mittwoch müssen es mehr als 6 Punkte sein, aber höchstens 9 Punkte sein. Von den Möglichkeiten 7, 8 oder 9 Punkte erhältst du nur für 9 eine durch 4 teilbare Summe: 2 + 6 + 3 + 9 = 20.
- Es können am Dienstag nicht 8 Trefferpunkte gewesen sein, weil dieser Wert mit 3 Schuss nicht möglich ist.
- Es können auch nicht 10 oder mehr Treffer gewesen sein, weil mit 3 Schuss nur maximal 9 Trefferpunkte möglich sind.

****

Aufgabe 2. Im Fußball-Verein trainieren 3 Jungen-Mannschaften (wir nennen sie A, B und C). Damit sie im Turnier gegeneinander gut zu unterscheiden sind, hat der Verein Trikots in den Farben weiß und blau sowie Hosen in den Farben rot und schwarz. (Wenn gegnerische Mannschaften die gleiche Trikotfarbe tragen, unterscheiden sie sich in der Hosenfarbe. Wenn gegnerische Mannschaften die gleiche Hosenfarbe tragen, unterscheiden sie sich in der Trikotfarbe. Es können auch sowohl Trikotfarbe als auch Hosenfarbe verschieden sein.)

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Mannschaft A, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen? Schreibe das Ergebnis auf!
b) Wie viele Möglichkeiten bleiben für die Mannschaften B und C für ihre Auswahl übrig, wenn sich Mannschaft A für weiße Trikots und schwarze Hosen entschieden hat?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a – *Antwortsatz:* 4 verschiedene Möglichkeiten hat Mannschaft A, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen.

Begründung: Kürze die Farben mit den Buchstaben B (blau), R (rot), S (schwarz) und W (weiß) ab. Nun kannst du alle Möglichkeiten aufschreiben:

Trikotfarbe	W	W	B	B
Hosenfarbe	R	S	R	S

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b – *Antwortsatz:* Die zweite Mannschaft hat noch 3 Möglichkeiten, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen. Die dritte Mannschaft hat noch 2 Möglichkeiten, Trikot- und Hosenfarbe auszuwählen.

Begründung: Wenn sich Mannschaft A für W/S entschieden hat, bleiben für die zweite Mannschaft noch 3 Möglichkeiten, denn in der Tabelle entfällt eine Möglichkeit:

Trikotfarbe	W	~~W~~	B	B
Hosenfarbe	R	~~S~~	R	S

Nach der Auswahl durch die zweite Mannschaft bleiben noch 2 Möglichkeiten für die dritte Mannschaft, denn in der Tabelle ist eine weitere Möglichkeit zu streichen (nämlich die der zweiten Mannschaft). Ob B oder C die zweite Mannschaft ist, kann nicht entschieden werden.

Hinweis: Es gibt 6 Kombinationen, wie die Mannschaften B und C ihre Farben auswählen könnten (aber dies war in der Aufgabe nicht gefragt):

Mannschaft B	WR	WR	BR	BR	BS	BS
Mannschaft C	BR	BS	WR	BS	WR	BR

****

Aufgabe 3. Am Turnier nahmen die 3 Jungen-Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft: A gegen B, A gegen C und B gegen C. Die Spielergebnisse wurden in eine Tabelle eingetragen: Für einen Sieg gab es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt und für ein verlorenes Spiel wurde kein Punkt eingetragen. Die Mannschaft A erreichte in der Tabelle die meisten Punkte und gewann das Turnier.

a) Wie sah die Tabelle nach dem Turnier aus, wenn Mannschaft B Zweiter wurde und keines der 3 Spiele Unentschieden endete?
b) Wie viele Tore könnte Mannschaft A in ihren 2 Spielen geschossen haben, wenn in den 3 Spielen insgesamt 6 Tore fielen? Schreibe alle Möglichkeiten auf und begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – *Antwortsatz:* Mannschaft A erreichte 6 Punkte, Mannschaft B erhielt 3 Punkte und Mannschaft C bekam 0 Punkte.

Begründung: Es wurden insgesamt 9 Punkte vergeben, in jedem Spiel 3 Punkte (da kein Spiel unentschieden endete).

Mannschaft A musste nur zweimal antreten. Sie konnte also nur maximal 6 Punkte erreichen (wenn sowohl A gegen B als auch A gegen C gewinnt). Da auch das Spiel B gegen C einen Sieger hatte (der 3 Punkte erhielt) muss B als Zweiter drei Punkte haben. Es bleiben für Mannschaft C nur 0 Punkte übrig.

Mannschaft	Punkte
A	6
B	3
C	0

Wenn Mannschaft A weniger als 6 Punkte hätte, wären es 3 oder 0 Punkte. Dann ist es aber nicht wahr, dass diese Mannschaft die meisten Punkte erreichte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – *Antwortsatz:* Mannschaft A hat mindestens 2 und höchstens 5 Tore geschossen haben. Mannschaft A kann aber auch insgesamt 3 oder 4 Tore geschossen haben.

Begründung: Weil Mannschaft A sowohl gegen B als auch gegen C gewonnen hat, muss Mannschaft A mindestens 2 Tore geschossen haben (in jedem Spiel mindestens 1 Tor). Weil Mannschaft B gegen C gewonnen hat, muss B mindestens 1 Tor geschossen haben, so dass Mannschaft A höchsten (6 – 1 =) 5 Tore geschossen hat. Es genügt bei dieser Aufgabenstellung, wenn du für jede ermittelte Anzahl von Toren eine Möglichkeit angibst, wie die drei Spiele ausgegangen sein könnten:

Tore Mannschaft A	2	3	4	5
A gegen B	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0
B gegen C	4 : 0	3 : 0	2 : 0	1 : 0

Für jede Anzahl der Tore von Mannschaft A gibt es viele Möglichkeiten, wie die drei Spiele geendet haben.

Mannschaft A: 2 Tore		
A gegen B	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0
B gegen C	4 : 0	3 : 1

Mannschaft A: 3 Tore						
A gegen B	2 : 0	2 : 0	2 : 1	1 : 0	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	2 : 0	2 : 0	2 : 1
B gegen C	3 : 0	2 : 1	2 : 0	3 : 0	2 : 1	2 : 0

Mannschaft A: 4 Tore							
A gegen B	3 : 0	3 : 1	2 : 0	2 : 1	2 : 0	1 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	1 : 0	2 : 0	2 : 0	2 : 1	3 : 0	3 : 1
B gegen C	2 : 0	1 : 0	2 : 0	1 : 0	1 : 0	2 : 0	1 : 0

Mannschaft A: 5 Tore				
A gegen B	4 : 0	3 : 0	2 : 0	1 : 0
A gegen C	1 : 0	2 : 0	3 : 0	4 : 0
B gegen C	1 : 0	1 : 0	1 : 0	1 : 0

****

Aufgabe 4. Am Rande des Turniers durfte Familie Geometrie sich im Torwandschießen messen, wobei die Regeln aus Aufgabe 1 galten. Jeder schoss dreimal. Vorab spekulierten sie über die Punktzahlen, die sie erreichen könnten.

Quadrato prahlte: „Ich werde der Beste sein."
Frau Dreieck meinte: „Ich schaffe bestimmt nur 3 Punkte".
Herr Raute frohlockte: „Ich war früher gut im Torwandschießen – ich erreiche bestimmt halb so viele Punkte wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen."
Schließlich sagte Kreisa: „Ich war schon einmal besser als Herr Raute – das wird mir heute wieder gelingen."

Ermittle die Anzahl der Trefferpunkte, die jeder der Familie Geometrie erreichte, wenn bekannt ist, dass alle 4 Aussagen richtig waren und kein Schuss ohne Punkte blieb!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – *Antwortsatz:* Quadrato erreichte 9 Punkte, Kreisa schaffte 7 Punkte, Herr Raute erhielt 5 Punkte, und Frau Dreieck kam auf 3 Punkte.

Herleitung: Du stellst fest, dass für jeden Schützen nach drei Schuss nur folgende Punktzahlen möglich sind:

- 3 Punkte: 3 Schüsse ins Loch rechts unten
- 5 Punkte: 2 Schüsse ins Loch rechts unten, 1 Schuss ins Loch links oben
- 7 Punkte: 1 Schuss ins Loch rechts unten, 2 Schüsse ins Loch links oben
- 9 Punkte: 3 Schüsse ins Loch links oben.

Frau Dreieck hat (wie von ihr behauptet) 3 Punkte.

Quadrato muss mehr als 3 Punkte haben, denn er ist der Beste und hat deshalb mehr Punkte als Frau Dreieck.

Quadrato kann nicht 5 Punkte haben. Da er der Beste ist, müssten alle anderen 3 Punkte haben – aber dann hat Kreisa nicht mehr Punkte als Herr Raute.

Es könnte also sein, dass Quadrato 7 Punkte hat. Da Kreisa weniger Punkte als Quadrato, aber mehr Punkte als Herr Raute hat, muss Kreisa 5 Punkte und Herr Raute 3 Punkte haben. Doch dann ist die Aussage von Herrn Raute falsch. Er konnte ja nicht $(5 + 3) : 2 = 4$ Punkte erreichen. Also kann Quadrato nicht 7 Punkte haben.

Es bleibt nun übrig, dass Quadrato 9 Punkte erreichte. Wir prüfen, ob in diesem Fall die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute wahr sind:

Weil Kreisa mehr Punkte als Herr Raute hat, hat Kreisa mindestens 5 Punkte.

- Haben Kreisa 5 Punkte und Frau Dreieck 3 Punkte, müsste Herr Raute 4 Punkte haben – das ist nicht möglich.
- Haben Kreisa 7 Punkte, und Frau Dreieck 3 Punkte, hat Herr Raute 5 Punkte.
- Hat Kreis 9 Punkte, hätte sie so viele Punkte wie Quadrato – dann wäre Quadrato nicht der Beste.

Zusammenfassung: Es gibt nur die eine Möglichkeit (Quadrato 9 Punkte, Kreisa 7 Punkte, Herr Raute 5 Punkte, Frau Dreieck 3 Punkte), so dass alle vier Aussagen erfüllt sind.

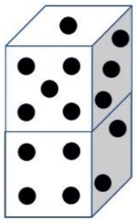
Lösungsvariante:
- Frau Dreieck hat (wie von ihr behauptet) 3 Punkte.
- Kreisa kann nicht 3 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (3 + 3) : 2 = 3 Punkte und Kreisa hätte nicht mehr Punkte als Herr Raute.
- Kreisa kann nicht 5 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (5 + 3) : 2 = 4 Punkte. Das ist aber unmöglich.
- Kreisa kann 7 Punkte haben, denn dann hätte Herr Raute (7 + 3) : 2 = 5 Punkte und Quadrato müsste als Bester 9 Punkte haben.
- Kreisa kann nicht 9 Punkte haben, denn dann wäre Quadrato nicht der Beste,

Zusammenfassung: Es gibt nur die eine Möglichkeit (Quadrato 9 Punkte, Kreisa 7 Punkte, Herr Raute 5 Punkte, Frau Dreieck 3 Punkte), so dass alle vier Aussagen erfüllt sind.

****

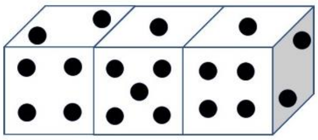
Teil B: Würfelspiele

Kreisa und Quadrato spielen gern mit Spielwürfeln, auf deren sechs Würfelseiten wie gewöhnlich 1 bis 6 Punkte zu sehen sind. Hast du auch schon bemerkt, dass die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7 ergibt?



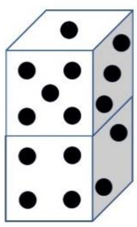
Aufgabe 1a. Quadrato hat auf dem Tisch einen Würfel-Turm aus zwei Würfeln gebaut, also zwei Würfel wie in der Abbildung übereinandergelegt. Wie viele Punkte sieht er insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten, wenn er um den Tisch herumläuft?

(Die Punkte auf der Seite unten und auf den sich berührenden Seiten beider Würfel sieht er natürlich nicht!)



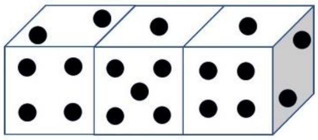
Aufgabe 1b. Kreisa hat auf dem Tisch eine Würfel-Schlange aus drei Würfel gelegt, also drei Würfel wie in der Abbildung nebeneinandergelegt. Wie viele Punkte könnte sie insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen, wenn sie um den Tisch herumläuft?

(Die Punkte auf den Seiten unten und auf den sich berührenden Seiten der Würfel sieht sie natürlich nicht!)
Wir bezeichnen die Blickrichtungen mit vorn, rechts, hinten, links und oben. Beachte. dass die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7 ergibt.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1a – Antwortsatz: Wenn Quadrato um den Tisch herumläuft, sieht er auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 29 Punkte.

Begründung: Egal, wie viele Punkte bei einem Würfel vorn zu sehen sind, vorn und hinten siehst du zusammen immer 7 Punkte. Ebenso siehst du rechts und links zusammen stets 7 Punkte. Insgesamt sind es deshalb bei einem Würfel-Turm aus zwei Würfeln (2 + 2) · 7 = 28 Punkte. Zusätzlich siehst du oben 1 Punkt, also insgesamt (28 + 1 =) 29 Punkte.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1b – Antwortsatz: Wenn Kreisa um den Tisch herumläuft, könnte sie auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 28 oder 33 Punkte sehen.

Begründung: Bei den 3 Würfeln siehst du vorn und hinten zusammen (3 · 7 =) 21 Punkte. Oben siehst du (2 + 1 + 1 =) 4 Punkte. Schließlich sind rechts 2 Punkte zu sehen. Da du auf den Seiten des linken Würfels in der Abbildung die 2 und die 4 siehst, weißt du schon, dass hinten die 3 und unten die 5 steht. Von links ist also höchstens 1 Punkt oder 6 Punkte zu sehen.

Insgesamt könnte Kreisa (21 + 4 + 2 + 1 =) 28 Punkte oder (21 + 4 + 2 + 6 =) 33 Punkte sehen.

Hinweis: Hast du dein Ergebnis durch Experimentieren mit Spielwürfeln gefunden? Dann ist dir bestimmt aufgefallen: Einen Spielwürfel kannst du nur so drehen, dass

- Variante (A): vorn 4, oben 2, links 1 zu sehen ist

oder

- Variante (B): vorn 4, oben 2, links 6 zu sehen ist.

Beide Möglichkeiten kannst du mit einem Würfel nicht erreichen! Aber es gibt Würfel, mit denen nur die Variante (A) gelingt, und andere Würfel. mit denen nur die Variante (B) gelingt. Prüfe deine Würfel. Es könnte sogar sein, dass du deine Würfel nicht so legen kannst, dass er die Punkte wie der rechte Würfel zeigt.

Wenn du als Ergebnis nur 28 Punkte oder nur 33 Punkte angegeben hast, ist dies also auch korrekt!

****

Aufgabe 2. Quadrato hat erneut einen Würfel-Turm aus zwei Würfeln gebaut. Kreisa hat daneben eine Turm-Schlange aus zwei Türmen gelegt. Erstaunt stellen sie fest, dass auf dem Turm insgesamt genauso viele Punkte zu sehen sind wie insgesamt auf der Schlange. Wie viele Punkte könnten sie sowohl auf dem Turm als auch auf der Schlange sehen? Finde alle Möglichkeiten!

Leider stand in der Aufgabenstellung das Wort „Turm-Schlange“, das gar nicht erklärt wurde. Es sollte „Würfel-Schlange“ (also nebeneinander liegende Würfel) heißen!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato und Kreisa könnten sowohl auf dem Würfel-Turm als auch auf der Würfel-Schlange insgesamt 29, 30, 31, 32, 33 oder 34 Punkte sehen.

Begründung: Du weißt bereits aus der Lösung zu Aufgabe 1a, dass Quadrato auf seinem Würfel-Turm vorn, hinten, rechts und links insgesamt (4 · 7 =) 28 Punkte sieht. Dazu kommen noch die Punkte, die oben zu sehen sind, also 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Auf dem Würfelturm können deshalb (28 + 1 =) 29, (28 + 2 =) 30, (28 + 3 =) 31, (28 + 4 =) 32, (28 + 5 =) 33 oder (28 + 6 =) 34 Punkte zu sehen sein.

Bei einer Würfel-Schlange aus 2 Würfeln sind vorn und hinten zusammen (2 · 7 =) 14 Punkte zu sehen. Um auf der Schlange genauso viele Punkte wie auf dem Turm zu sehen, müssen oben, rechts und links zusammen mindestens (29 – 14 =) 15 Punkte, aber höchstens (34 – 14 =) 20 Punkte zu sehen sein. Das ist aber für jede Zahl 15, 16, 17, 18, 19 und 20 möglich:

oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
$2 \cdot 5 = 10$	1	4	14	$10 + 1 + 4 + 14 = 29$
$2 \cdot 6 = 12$	2	2	14	$12 + 2 + 2 + 14 = 30$
$2 \cdot 6 = 12$	2	3	14	$12 + 2 + 3 + 14 = 31$
$2 \cdot 6 = 12$	3	3	14	$12 + 3 + 3 + 14 = 32$
$2 \cdot 6 = 12$	3	4	14	$12 + 3 + 4 + 14 = 33$
$2 \cdot 6 = 12$	4	4	14	$12 + 4 + 4 + 14 = 34$

Beachte: Wenn oben nur 6 zu sehen ist, kann rechts oder links keine 1 zu sehen sein.

(Es gibt viele andere Möglichkeiten, die Würfel so in der Würfel-Schlange zu legen, dass eine Punktezahl wie beim Würfel-Turm zu sehen ist.)

Hinweis: Wenn du die Tabelle ergänzt, erkennst du, dass mit der Würfel-Schlange mindestens 28 Punkte und höchstens 36 Punkte erreicht werden können:

oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
$2 \cdot 5 = 10$	1	3	14	$10 + 1 + 3 + 14 = 28$
$2 \cdot 6 = 12$	4	5	14	$12 + 4 + 5 + 14 = 35$
$2 \cdot 6 = 12$	5	5	14	$12 + 5 + 5 + 14 = 36$

Vielleicht hast du versucht, das Wort „Turm-Schlange“ wörtlich zu nehmen. Folgende Ideen sind gut:

Variante 1: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei nebeneinander stehenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du vorn 4 Würfel, zusammen mit den Würfelseiten hinten ergeben diese bereits $4 \cdot 7 = 28$ Punkte. Nun sind rechts, oben und links noch 6 weitere Würfelseiten zu sehen, auf denen nicht gleichzeitig 1 zu sehen ist. Deshalb siehst du bei dieser Turm-Schlange mehr als (28 + 6 =) 34 Punkte.

Variante 2: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei hintereinander liegenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du vorn 4 Würfel, zusammen mit den Würfelseiten hinten ergeben diese bereits $4 \cdot 7 = 28$ Punkte. Nun sind rechts, oben und links noch 6 weitere Würfelseiten zu sehen, auf denen nicht gleichzeitig 1 zu sehen ist. Deshalb siehst du bei dieser Turm-Schlange mehr als (28 + 6 =) 34 Punkte.

Variante 3: Eine Turm-Schlange könnte aus zwei nebeneinander liegenden Würfel-Türmen bestehen. Dann siehst du keine gegenüberliegende Würfelseiten. An jeder Ecke siehst du mindestens (1 + 2 + 3 =) 6 Punkte und höchstens (4 + 5 + 6 =) 15 Punkte. Es sind auch (1 + 2 + 4 =) 7 Punkte, (1 + 3 + 5 =) 9 Punkte, (1 + 4 + 5 =) 10 Punkte, (2 + 3 + 6 =) 11 Punkte, (2 + 4 + 6 =) 12 Punkte oder (3 + 5 + 6 =) 14 Punkte möglich. Da jeder Eckwürfel für sich gelegt werden kann, sind bei vier Eckwürfel folgende Summen möglich:

$6 + 6 + 6 + 11 = 29$ $6 + 6 + 6 + 12 = 30$ $6 + 6 + 7 + 12 = 31$
$6 + 6 + 6 + 14 = 32$ $6 + 6 + 7 + 14 = 33$ $6 + 7 + 7 + 14 = 34$

Für jeden Würfel-Turm aus 2 Würfel gibt es also eine solche Turm-Schlange.

Wenn du eine solche oder ähnliche „Turm-Schlange“ untersucht hast, konntest du auch die volle Punktzahl erreichen.

****

Aufgabe 3a. Quadrato hat einen Würfel-Turm aus einigen Würfeln gebaut. Er behauptet, insgesamt 45 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Wenn seine Aussage stimmt – wie viele Würfel hat er übereinandergelegt und welche Punktzahl ist oben zu sehen?

Aufgabe 3b. Kreisa hat eine Würfel-Schlange aus einigen Würfeln gelegt. Sie behauptet, insgesamt 50 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Wenn ihre Aussage stimmt – wie viele Würfel hat sie nebeneinandergelegt?

Kreisa fragt sich, ob es möglich ist, unterschiedlich lange Würfel-Schlangen mit jeweils insgesamt 50 Punkten zu legen. Was meinst du? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 3c. Quadrato hat nun einen neuen Würfel-Turm aus einigen Würfeln gebaut. Er behauptet, diesmal ebenfalls insgesamt 50 Punkte auf allen sichtbaren Seitenflächen zu sehen. Kreisa widerspricht: „Das kann nicht sein!“ Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – Antwortsatz: Quadrato hat einen Würfel-Turm aus 3 Würfeln gebaut. Oben ist eine 3 zu sehen.

Begründung: Du weißt bereits, dass bei jedem verwendeten Würfel im Würfel-Turm vorn und hinten sowie rechts und links insgesamt 14 Punkte zu sehen sind. Du kannst nun untersuchen, wie viele Punkte es bei unterschiedlich hohen Türmen sind.

Anzahl Würfel	1	2	**3**	4	5
Punkte von vorn, hinten, rechts und links	14	28	**42**	56	70
Punkte von oben	6	6	**3**	1	1
Punkte gesamt	20	34	**45**	57	71
Feststellung	< 45		**= 45**	> 45	

Nur wenn Quadrato einen Würfel-Turm aus 3 Würfeln baut, kann er insgesamt 45 Punkte sehen. Verwendet er weniger als 3 Türme, kann er nur weniger als 45 Punkte erreichen, selbst wenn oben 6 zu sehen ist. Verwendet er mehr als 3 Türme, kann er nur mehr als 45 Punkte erreichen, selbst wenn oben 1 zu sehen ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – Antwortsatz. Kreisa könnte eine Würfel-Schlange aus 4 Würfeln oder aus 5 Würfeln gelegt haben.

Begründung: Die größte Punktzahl wird sicherlich erreicht, wenn oben stets 6 und rechts und links jeweils 5 zu sehen ist. Mit 2 oder 3 Würfel ist die damit erreichbare Punktezahl jedoch kleiner als 50.

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
2	$2 \cdot 6 = 12$	5	5	$2 \cdot 7 = 14$	$12 + 5 + 5 + 14 = 36$
3	$3 \cdot 6 = 18$	5	5	$3 \cdot 7 = 21$	$18 + 5 + 5 + 21 = 49$

Verwendet Kreisa 4 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt ($50 - 4 \cdot 7 =$) 22 Punkte zu sehen sein. Es gibt viele Möglichkeiten, ein solches Ergebnis zu erreichen, beispielsweise

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
4	$4 \cdot 5 = 20$	1	1	$4 \cdot 7 = 28$	$20 + 1 + 1 + 28 = 50$

Verwendet Kreisa 5 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt ($50 - 5 \cdot 7 =$) 15 Punkte zu sehen sein. Es gibt auch dafür viele Möglichkeiten, ein solches Ergebnis zu erreichen, beispielsweise

Würfel	oben	rechts	links	vorn und hinten	gesamt
5	5 · 2 = 10	4	1	5 · 7 = 35	10 + 4 + 1 + 35 = 50

Verwendet Kreisa 6 Würfel, müssen oben, rechts und links insgesamt (50 – 6 · 7 =) 8 Punkte zu sehen sein. Da es aber oben, rechts und links insgesamt 8 Würfelflachen sind und nicht auf jeder eine 1 zu sehen sein kann, sind stets mehr als 50 Punkte zu sehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c – Antwortsatz: Bei einem Würfel-Turm können nicht insgesamt 50 Punkte zu sehen sein, denn bei drei verwendeten Würfeln sind maximal 48 Punkte möglich, und bei vier verwendeten Würfeln sind mindesten 57 Punkte zu sehen.

Begründung: In der Tabelle zur Lösung von Aufgabe 3a erkennst du bereits, dass es nur bei einer Turmhöhe von 3 Würfeln gelingen kann, insgesamt 50 Punkte zu sehen. Da aber die Gesamtzahl nur (3 · 14 + 6 =) 48 wird, wenn oben 6 zu sehen ist, kann es keine Lösung mit 3 Würfeln geben.

Bei mehr als 4 Würfeln wird die sichtbare Punktezahl zu groß, selbst wenn oben 1 zu sehen ist: (4 · 14 + 1 =) 57.

Bei mehr als 4 Würfeln wird die Punktezahl noch größer.