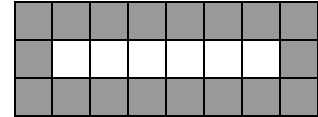


Aufgaben Serie 7 (2018/19)

Einsendungen bitte bis 22. Juni 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de¹.

Aufgabe 7-1. Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, dass sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind, während alle übrigen (im Innern gelegenen Quadratflächen) weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der Anzahl der weißen Quadratflächen sein.



Man gebe alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-2. Man berechne die Summe S aller der (im dezimalen Positionssystem) dreistelligen natürlichen Zahlen, die jeweils mit voneinander verschiedenen Ziffern und ohne Ziffer 0 dargestellt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 7-3. Es sei A der Flächeninhalt und $u = a + b + c$ der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b und c . Man ermittle das Maximum des Verhältnisses $z = \frac{A}{u^2}$. Für welche Dreiecke wird es angenommen?

(6 Punkte)

Aufgabe 7-4. Man ermittle alle geordneten Paare $(x ; y)$ jeweils zweistelliger Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes (gleichzeitig) gilt:

- (*) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y .
- (**) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2 .

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 7-5A

¹ Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(a) Man gebe für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x

$$f(x) = f(x+1) - a$$

gilt.

(2 Punkte)

(b) Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung

$$f(x+1) = f(-x)$$

erfüllen.

(2 Punkte)

(c) Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaft hat: Für alle x gilt

$$f(x) = x \cdot f(x+1)$$

$$f(1) = 1$$

Man ermittle alle ganzen Zahlen n , für die $f(n) = 0$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 7-5B

Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(2 Punkte)

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

(4 Punkte)