Aufgaben Serie 6 (2019/20)

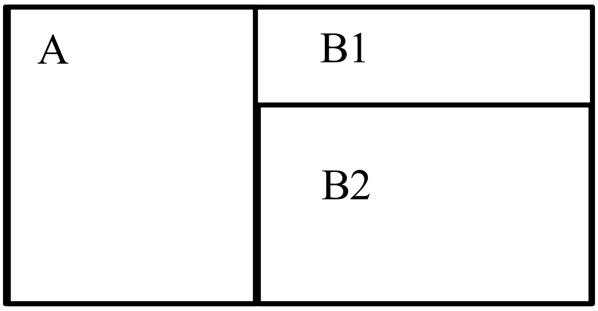
(Einsendungen bis 25. April 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de)

Aufgabe 6-1.
Man bestimme den Umfang eines Dreiecks mit folgenden Eigenschaften:

(a) alle Seitenlängen sind ganzzahlig,
(b) eine der Seitenlängen ist 13,
(c) das Produkt der beiden anderen Seitenlängen ist 105.

Aufgabe 6-2.
Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt.

Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen vollständigen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw. In der nebenstehenden Abbildung kann man mit einem ersten Schnitt das Rechteck A abteilen und dann in einem zweiten Schnitt die Rechtecke $B1$ und $B2$ erhalten.



Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es für eine Zerlegung jedoch keine solche Schnittfolge (lassen sich also die Teilrechtecke nicht sequentiell mit vollständigen geraden Schnitten erzeugen, d.h. durch Abteilen jedes der Rechtecke entsteht eine Figur die kein Rechteck ist), heißt die Zerlegung *primär*.

(a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechtecks in drei Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in drei Teilrechtecke sich durch eine sequentielle Zerlegung erzeugen lässt).

(b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

Aufgabe 6-3.
Man finde alle reellwertigen Lösungen $(x\,;\,y\,;\,z)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6-4.
Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke F des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch F senkrecht steht und die Raumdiagonale im Verhältnis 1 : 2 teilt.

Aufgabe 6-5A.
Das HERONsche Verfahren dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl a ($a > 0$): Es sei x_0 ein „Schätzwert" für $\sqrt{a}$. Im ersten Schritt berechnet man x_1 durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im n-ten Schritt ergibt sich aus x_n ein „besserer" Näherungswert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \qquad (n = 1, 2, ...)$$

(a) Man berechne mit dem HERONschen Verfahren einen Wert für $\sqrt{2020}$.
(b) Man zeige: Für $\sqrt{a} < x_n$ gilt $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$.
(c) Man beweise: Beim HERON-Verfahren gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung:

$$\left| \sqrt{a} - x_{n+1} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \sqrt{a} - x_n \right|$$

Aufgabe 6-5B
(a) Welchen Polynomrest lässt $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$ bei Division durch $x^2 + x + 1$?
(b) Man beweise: Wenn im Polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a, b und c sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat P keine rationale Lösung.

(c) Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl c) habe drei reelle Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.