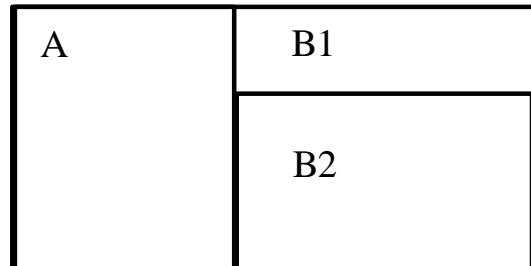


## Aufgaben Serie 6 (2017/18)

**Aufgabe 6-1.** Eine Turmuhr (mit üblichem Zwölfstundenziffernblatt) zeigt genau 13:00 Uhr an. Wie oft bilden bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel miteinander?

**Aufgabe 6-2.** Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt.

Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen vollständigen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der Teilrechtecke erneut in zwei Rechtecke usw. In der nebenstehenden Abbildung



kann man mit einem ersten Schnitt das Rechteck  $A$  abteilen und dann in einem zweiten Schnitt die Rechtecke  $B1$  und  $B2$  erhalten.

Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird *sequentiell* genannt. Gibt es für eine Zerlegung jedoch keine solche Schnittfolge (lassen sich also die Teilrechtecke nicht sequentiell mit vollständigen geraden Schnitten erzeugen, d.h. durch Abteilen eines Rechtecks entsteht eine Figur die kein Rechteck ist), heißt die Zerlegung *primär*.

(a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechtecks in 3 Teilrechtecke gibt (d.h. dass jede Zerlegung eines Rechtecks in 3 Teilrechtecke sich durch eine sequentielle Zerlegung erzeugen lässt).

(b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in 5 Teilrechtecke existiert.

**Aufgabe 6-3.** Man finde alle reellwertigen Lösungen  $(x; y; z)$  des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1\end{aligned}$$

**Aufgabe 6-4.** Es ist zu beweisen, dass die Ebene durch drei Ecken eines Würfels, welche Endpunkte dreier von ein und derselben Ecke  $F$  des Würfels ausgehender Kanten sind, auf der Raumdiagonalen durch  $F$  senkrecht steht und die Raumdiagonale im Verhältnis 1 : 2 teilt.

**Aufgabe 6-5A.** Das HERONSche Verfahren dient zur Approximation der Quadratwurzel einer reellen Zahl  $a$  ( $a > 0$ ): Es sei  $x_0$  ein „Schätzwert“ für  $\sqrt{a}$ . Im ersten Schritt berechnet man  $x_1$  durch

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

Im  $n$ -ten Schritt ergibt sich aus  $x_n$  ein „besserer“ Näherungswert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (a) Man berechne mit dem HERONSchen Verfahren einen Wert für  $\sqrt{2018}$ .  
 (b) Man zeige: Für  $\sqrt{a} < x_n$  gilt  $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ .  
 (c) Man beweise. Beim HERON-Verfahren gilt für alle  $n > 0$  die Ungleichung:

$$|\sqrt{a} - x_{n+1}| < \frac{1}{2} \cdot |\sqrt{a} - x_n|$$

**Aufgabe 6-5B**

- (a) Welchen Polynomrest lässt  $P(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$  bei Division durch  $x^2 + x + 1$  ?

(b) Man beweise: Wenn im Polynom  $P(x) = ax^2 + bx + c$  die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sämtlich ungerade Zahlen sind, so hat  $P$  keine rationale Lösung.

(c) Das Polynom  $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$  (mit einer reellen Zahl  $c$ ) habe drei reelle Nullstellen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  mit  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Man zeige:  $x_3 - x_1 > 6$ .