Aufgaben Serie 5 (2019/20)

In dieser Serie sind zwei Aufgaben aus dem aktuellen BWM. Für die Einsendungen dieser Aufgaben können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden (also kein zusätzlicher Aufwand). Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können natürlich keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden.

(Einsendungen zur Serie 5 bitte bis 17. März 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [1])

Aufgabe 5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $(Q(Q(n))$ beträgt 2019.

Aufgabe 5-2. Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 5-3 (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Beweise: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2020, 1. Runde). Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D.
Beweise: Der Wert von $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.

Aufgabe 5-5A. Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganzzahlige nichtnegative Zahlen r und s, so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

[1] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Aufgabe 5-5B

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung $F \leq \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$.

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$ gilt.

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b und c die Ungleichung $F \leq p \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von p.

Hinweis: Für jedes Dreieck gilt zwischen dem Flächeninhalt F und dem Umfang U die Beziehung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} U^2$.