

Aufgaben Serie 5 (2018/19)

Nicht vergessen: Am 4. März 2019 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik. Man findet die Aufgaben unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de und natürlich beim Mathematik-Lehrer.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

(Einsendungen bis 22. März 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de ¹⁾)

Aufgabe 5-1.

In der Ebene seien $3n$ Punkte gegeben (n natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) n Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Aufgabe 5-2.

Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)
Ein 8×8 -Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1×2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt. Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2×2 -Quadrat bilden.

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019, 1. Runde*)
Im Quadrat $ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF = 45^\circ$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden AE und AF schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H . Beweise, dass die Geraden EF und GH parallel sind.

* Für die Einsendungen dieser Aufgaben (5.3 und 5.4) können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb verwandt werden. Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden. Bitte beachten: Bereits mit 3 richtig gelösten Aufgaben kann man einen Preis erreichen und Gruppenarbeit ist in Runde 1 ausdrücklich zugelassen!

¹ Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 5-5A.

(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen n .

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(c) Man finde eine natürliche Zahl n , für die mit üblicher Rundungsregel gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2019.$$

Aufgabe 5-5B. (Nach einer Anregung des Ingenieurbüros Wuttke²)

Vor der Entwicklung der elektronischen Distanzmessung wurden Vermessungen häufig im Rechtwinkelfverfahren durchgeführt. Dafür wird durch die aufzunehmende Fläche eine Messungslinie (Messachse) gelegt und darauf die aufzumessenden Punkte (z.B. Grenzpunkte) rechtwinklig vermessen. Mit der GPS-basierten Messung können alle Punkte mit ihren Koordinaten (ausreichend) exakt bestimmt werden.

(a) Sind für ein Dreieck ABC die Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ bekannt, so gilt für den Flächeninhalt F dieses Dreiecks

$$2 \cdot F = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2).$$

(b) Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, 4$. Beweisen Sie die Trapezformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^4 (x_i + x_{i+1}) \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \text{wobei } x_5 = x_1 \text{ bzw. } y_5 = y_1 \text{ gelte.}$$

(c) Gegeben sei ein konvexes Polygon $A_1A_2\dots A_n$ mit den gegen den Uhrzeigersinn nummerierten Eckkoordinaten $(x_i; y_i)$ mit $i = 1, \dots, n$. Beweisen Sie die Gaußsche Flächenformel zur Berechnung des Flächeninhaltes F

$$2 \cdot F = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad \text{wobei } y_0 = y_n \text{ bzw. } y_{n+1} = y_1 \text{ gelte.}$$

² Gastgeber des Trainingsseminars am 10.12.2018 (www.wuttke-geogroup.de)