Aufgabe 5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $(Q(Q(n))$ beträgt 2018.

Aufgabe 5-2. Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10.000.000.000. Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischen Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 5-3 (Aufgabe 1, Bundeswettbewerb Mathematik 2018, 1. Runde).
Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Aufgabe 5-4 (Aufgabe 4, Bundeswettbewerb Mathematik 2018, 1. Runde).
Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten.
Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

Aufgabe 5-5A. Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mit der Methode der vollständigen Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganze Zahlen r und s, so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

(c) In der Ebene seien n Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Aufgabe 5-5B
(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung $F \leq \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$.

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$ gilt.

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b und c die Ungleichung $F \leq p \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ gilt. Man ermittle diesen Wert von p.

Hinweis: Für jedes Dreieck gilt zwischen dem Flächeninhalt F und dem Umfang U die Beziehung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} U^2$.