Aufgaben Serie 4 (2019/20)

(Einsendungen bis 11. Februar 2020 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [1])

Aufgabe 4-1.
Man bestimme alle Paare *(n ; k)* mit natürlichen Zahlen *n* und *k*, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2.
Für welche positiven ganzen Zahlen *n* gibt es eine Quadratzahl, deren letzten *n* Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

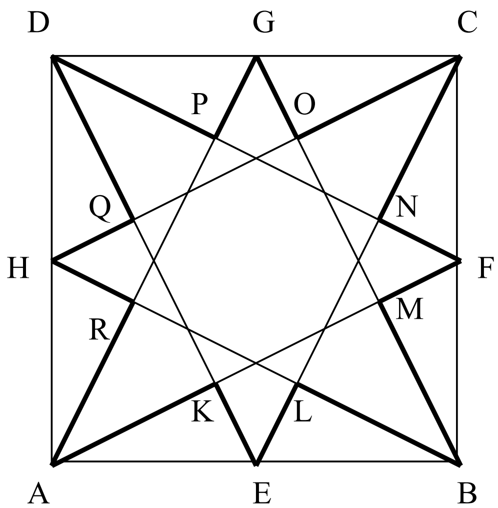
(5 Punkte)

Aufgabe 4-3.
Man finde alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, so dass gilt:

$$p = x^2 - y$$
$$q = y^2 + 3x - 7$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4.
In einem Quadrat *ABCD* seien die Mittelpunkte der Seiten *AB, BC, CD* und *DA* mit *E, F, G* bzw. *H* bezeichnet. In dem Streckenzug *AFDECHBGA* auftretende Schnittpunkte seien so mit *K, L, M, N, O, P, Q, R* bezeichnet, dass *AKELBMFNCO GPDQHR* ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).



Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates *ABCD*.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt, mehr als 12 Punkte, werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

---

[1] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 4-5A.
Es sei P ein Polynom vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ... a_n, also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 .$$

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Ist x eine rationale Nullstelle des Polynomes P, also $P(x) = 0$, und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.

(2 Punkte)

(c) Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B.
Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, \ldots, a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme QQS von n* verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i^2 \ .$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n*“, also $n_0, n_1, \ldots$ mit

$$n_{j+1} = QQS(n_j) \quad ; \quad j = 0,1,2,\ldots$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.

(2 Punkte)

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!

(2 Punkte)

(Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

(4 Punkte)