Aufgaben Serie 4 (2018/19)

(Einsendungen bis 11. Februar 2019 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[1])

Aufgabe 4-1
Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2
Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3
Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4
Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α. Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.

(6 Punkte)

(*Hinweis*: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8 Punkte, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 4-5A
(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots..+2018}}}$ rational oder irrational ist. (2 Punkte)

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

[1] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit „Re: KZM Serie 4“ bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

- unendlich viele Paare (x ; y) gibt, so dass z rational ist.
- unendlich viele Paare (x ; y) gibt, so dass z irrational ist. (2 Punkte)

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B

Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(2 Punkte)

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt. (2 Punkte)

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt? (4 Punkte)