Aufgaben Serie 4 (2017/18)

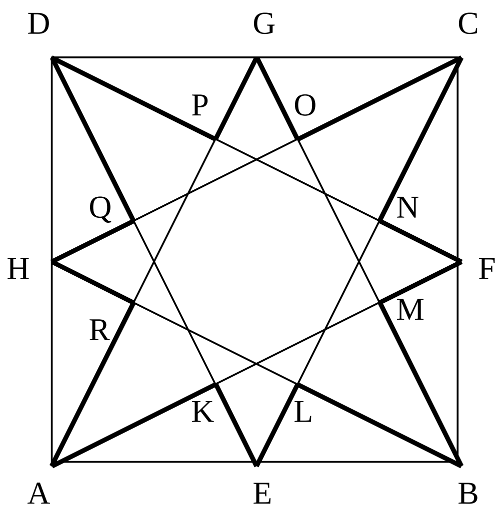
Aufgabe 4-1.
Man bestimme alle Paare *(n ; k)* mit natürlichen Zahlen *n* und *k*, die der Gleichung $n! - 56k + 10^n = 0$ genügen!

Aufgabe 4-2.
Man beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse mindestens so groß wie die vierfache Dreiecksfläche.

Aufgabe 4-3.
Man finde alle Paare (*p* ; *q*) von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen *x* und *y* gibt, so dass gilt:

$$p = x^2 - y \quad ; \quad q = y^2 + 3x - 7$$

Aufgabe 4-4.
In einem Quadrat *ABCD* seien die Mittelpunkte der Seiten *AB, BC, CD* und *DA* mit *E, F, G* bzw. *H* bezeichnet. In dem Streckenzug *AFDECHBGA* auftretende Schnittpunkte seien so mit *K, L, M, N, O, P, Q, R* bezeichnet, dass *AKELBMFNCO GPDQHR* ein (nichtkonvexes) Sechszehneck ist (s. Skizze).



Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechszehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates *ABCD*.

Aufgabe 4-5A.
Es sei *P* ein Polynom vom Grad *n* (*n* > 0) mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ... a_n, also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 .$$

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig *P(*2013*)* = 2015 und *P(*2017*)* = 2017 gelten kann.

(b) Man zeige: Ist *x* eine rationale Nullstelle des Polynoms *P*, also *P(x)* = 0, und gilt $a_n = 1$, so ist *x* ganzzahlig.

(c) Ist sowohl *P(*2017*)* als auch *P(*2018*)* ungerade, so besitzt *P* keine ganzzahlige Nullstelle.

Aufgabe 4-5B.
Es sei *n* eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, \ldots, a_k$ bestehe. Unter der *Quadratquersumme QQS von n* verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i^2 \quad .$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n*“, also $n_0, n_1, \ldots$ mit

$$n_{j+1} = QQS(n_j) \quad ; \quad j = 0,1,2,\ldots$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2017 und 2018.

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!

(Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl *n* ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.