Aufgaben Serie 3 (2018/19)

Am 1. Dezember startet der Bundeswettbewerb Mathematik[1]. Für die Aufgaben dieser Serie wurden deshalb Aufgaben der vergangenen Jahre aus diesem Wettbewerb ausgewählt – gewissermaßen als Einstimmung auf die neue Auflage.

(Einsendungen bis 10. Dezember 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [2])

Aufgabe 3-1.
Bei einer 202-stelligen Quadratzahl $\underbrace{99\ldots99}_{100\ \textit{Neunen}}\ z\ \underbrace{00\ldots00}_{100\ \textit{Nullen}}9$ ist die Ziffer z an der 102-ten Dezimalstelle von rechts nicht lesbar. Ermitteln Sie eine mögliche Ziffer, die dort stehen kann

(5 Punkte)

Aufgabe 3-2.
Gegeben seien 2016 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2016 Zahlen kleiner als 1 sein?

(5 Punkte)

Aufgabe 3-3.
Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

(6 Punkte)

Aufgabe 3-4.
Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

(6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.
(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(2 Punkte)

---

[1] www.mathe-wettbewerbe.de/bwm
[2] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(2 Punkte)

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

(4 Punkte)

Aufgabe 3-5B. Es ist $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„*S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$*“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige:
Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, so dass für $x_1 = m$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(2 Punkte)

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

(4 Punkte)