Aufgaben Serie 3 (2017/18)

(Einsendungen bitte bis 9.12.2017 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder per E-Mail an norman.bitterlich@t-online.de)

Aufgabe 3-1. Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen dieser Teilmenge ist?

Aufgabe 3-2. Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken, wenn keinerlei Einschränkung an die Lage dieser Quadrate gegeben wird?

Aufgabe 3-3. Man stelle die Zahl 1000 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte dieser Zahlen den Wert 1 ergibt.

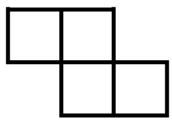
Aufgabe 3-4. Es sei Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetisches Mittel enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind.

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt bzw. bei mehr als 12 werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

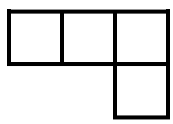
Aufgabe 3-5A. (a) Zum vollständigen Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2 x 2 und solche des Formates 4 x 1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man für das erneute Auslegen von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

(b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

F1



F2



(c) Man gebe Bedingungen für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers an, so dass der Fußboden nur mit Platten der Form F2 ausgelegt werden kann.

Aufgabe 3-5B. Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

(a) Man zeige, die Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd.

(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$.

(c) Man finde alle Lösungen für die Zahlen a, b und c, die die beschriebene Eigenschaft haben.