Aufgaben Serie 2 (2017/18)

(Einsendungen bis 16. Oktober 2017 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [1])

Aufgabe 2-1. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n + 1)$ des Nachfolgers $(n + 1)$ durch 11 teilbar sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2-2. Drei gleich große Kreise mit dem Radius r berühren sich gegenseitig von außen. Wie groß ist die von ihnen eingeschlossene Fläche in Abhängigkeit von r. (5 Punkte)

Aufgabe 2-3. Natürliche Zahlen, die durch ihre eigene Quersumme teilbar sind, werden Harshad-Zahlen genannt. Weisen Sie nach, dass unter 18 aufeinanderfolgenden dreistelligen natürlichen Zahlen stets mindestens eine Harshad-Zahl ist. (6 Punkte)

Aufgabe 2-4. Gegeben sei ein Dreieck ABC und auf AB ein Punkt D. Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass DE die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben bzw. mehr als 12 Punkte zwei Zusatzpunkte.)

Aufgabe 2-5A. In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

(a) Man zeige: die entstehende Figur enthält keine sich schneidende Strecken. (2 Punkte)

(b) Man zeige: die entstehende Figur enthält kein geschlossenes Polygon. (2 Punkte)

(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug P_1, P_2, .. P_n dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen.)

---

[1] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:" bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält. (4 Punkte)

Aufgabe 2-5B.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Tripel natürlicher Zahlen (k, m, n) mit $n > m > 1$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen. (2 Punkte)

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl $n!$ auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen. (2 Punkte)

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl 0,(1!)(2!)(3!)... (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. 0,1 2 6 24 120...) irrational ist. (4 Punkte)

(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)