Aufgaben Serie 1 (2018/19)

(Einsendungen bitte bis 14. September 2018 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [1])

Aufgabe 1-1: Man finde alle positiven ganzen Zahlen, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes sind? (5 Punkte)

Hinweis: Man beantworte ohne Verwendung von technischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1-2: Unter einem magischen Multiplikationsquadrat n-ter Ordnung versteht man eine Anordnung von n^2 paarweise verschiedenen natürlichen (nicht notwendig aufeinander folgenden) Zahlen auf einem n x n-Quadrat, so dass die Produkte der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich einer Konstante sind. Man untersuche, ob es für $n > 2$ magische Multiplikationsquadrate gibt! (5 Punkte)

Aufgabe 1-3: Jemand hat 55 Bälle, von denen einige blau sind und die übrigen rot. Außerdem hat er 10 Kisten; in die erste passt genau ein Ball, in die zweite passen genau zwei Bälle usw.
Zeigen Sie, dass es möglich ist, alle Bälle so in den Kisten zu verstauen, dass in keiner Kiste Bälle unterschiedlicher Farbe vorkommen. (6 Punkte)

Aufgabe 1-4: Gegeben sei ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei benachbarte Seiten des Quadrates berührt und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Quadrates geht. Man beschreibe die Konstruktion. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

Aufgabe 1-5A: Gegeben sei für S die Summendarstellung $S = 1 + 3 + \ldots + 31$. Man könnte vermuten, dass unter S die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 31 gemeint ist, also $S = S_1(16) = \sum_{k=1}^{16}(2 \cdot k - 1)$.

(a) Man leite eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen her, also einen Ausdruck ohne Summenzeichen für S_1 in Abhängigkeit von n: $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n}(2 \cdot k - 1)$. (2 Punkte)

---

[1] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Kommt diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(b) Es ist zu zeigen, dass die Darstellung von $S = 1 + 3 + ... + 31$ nicht eindeutig ist. Man gebe außer S_1 (mit 16 Summanden) zwei weitere Summen mit verschiedener Summandenzahl an, in denen die Summanden 1, 3 und 31 wie angegeben als erste, zweite bzw. letzte Summanden vorkommen, und verwende für die Summendarstellung das Summenzeichen. (2 Punkte)

(c) Man gebe unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für $S = 1 + 3 + ... + 31$ derart an, dass sich bei insgesamt 4 Summanden die Summe 45 ergibt. Man berechne die Summe der ersten 6 Zahlen gemäß dieser Darstellung. Kann man für jede vorgegebene Zahl A unter Verwendung des Summenzeichens eine Darstellung für S finden, so dass $S(4) = A$ gilt?
(4 Punkte)

Aufgabe 1-5B: Es sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2 = \sqrt{2}$. Für $n = 4$ erscheint $d_4 = 1$ als naheliegend, aber dafür ist bereits ein Beweis notwendig.

(a) Man gebe für $n = 3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel. (2 Punkte)

(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n = 6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird. (2 Punkte)

(c) Man finde eine Verteilung von $n = 5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.