Ungleichungen mit einer Folgerung aus vollständigen Quadraten

Aus der grundlegenden Ungleichung

$$(a-1)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

folgt für alle reellen Zahlen a unmittelbar $a^2 + 1 \geq 2a$. Für positive Zahlen a lässt sich diese Ungleichung zu

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \qquad (2)$$

umformen. Weil alle Umformungen äquivalent sind, sind beide Aussagen für positive reelle Zahlen a gleichwertig. Die Gleichheit gilt nur für $a = 1$.

Hinweis: Die Gültigkeit dieser Ungleichung wird in der Mathematik-Olympiade als bekannt akzeptiert. Wir dürfen diese Ungleichung zitieren und ohne zusätzlichen Beweis in der Lösungsdarstellung verwenden.

Dieser Aspekt wurde bereits in einer frühen Olympiade-Aufgabe thematisiert:

Aufgabe 02-06 (MO311041). Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (3) wahr ist:

Für jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen a, b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$. (3)

Lösungshinweise:

(I) Für jede reelle Zahl k mit $|k| \leq 2$ und jedes Paar $(a; b)$ reeller Zahlen a, b gilt wegen $|ab| \geq 0$: $|k| \cdot |ab| \leq 2 \cdot |ab|$. Daraus findet man folgende Ungleichungen:

$$a^2 + b^2 - k \cdot ab \geq a^2 + b^2 - |k| \cdot |ab| \geq a^2 + b^2 - 2 \cdot |ab| = (|a| - |b|)^2$$

Da das Quadrat der rechtsstehenden Differenz stets nicht-negativ ist, gilt die Aussage (3) für jede reelle Zahl k mit $|k| \leq 2$.

(II) Zu jedem k mit $|k| > 2$ gibt es ein Paar $(a; b)$ reeller Zahlen mit $a^2 + b^2 < k \cdot ab$. Man setze beispielsweise $a = 2$ und $b = k$:

$$2^2 + k^2 < 2 \cdot k^2 = k \cdot 2k.$$

Mit (I) und (II) ist gezeigt, dass die Aussage (3) genau für alle reellen Zahlen k mit $|k| \leq 2$ gilt. ❑

Teilen wir in Aussage (3) beide Seiten der Ungleichung durch ab, so erhalten wir als Folgerung die Ungleichung (2) mit dem maximal möglichen Wert für k.

Aufgabe 02-07 (MO370945). Zu bestimmen sind die Tripel von reellen positiven Zahlen $(a; b; c)$, für die gilt:

$$a + 2 \cdot b^2 + 3 \cdot c^3 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^3} = 12.$$

Lösungshinweise: Mit der Idee aus Ungleichung (2) lässt sich die Gleichung umsortieren und abschätzen :

$$\left(a + \tfrac{1}{a}\right) + 2 \cdot \left(b^2 + \tfrac{1}{b^2}\right) + 3 \cdot \left(c^3 + \tfrac{1}{c^3}\right) \geq 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12$$

Da das Gleichheitszeichen gelten soll, muss es in jedem Klammerausdruck auf der linken Seite der Ungleichung gelten, also $a = 1, b^2 = 1, c^3 = 1$. Damit ist für positive Zahlen nur das Tripel (1;1;1) eine Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe 02-08 (MO450922/MO451022). Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4} \tag{4}$$

Lösungshinweise: Zunächst ist der Definitionsbereich zu untersuchen. Für das Produkt im Nenner der behaupteten Ungleichung gilt:

$$\left(a + \tfrac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \tfrac{1}{a}\right) = \frac{ab+1}{b} \cdot \frac{ab+1}{a} = \frac{(ab+1)^2}{ab} \tag{5}$$

Deshalb ist der Bruch auf der linken Seite der Ungleichung nur für $a \cdot b \notin \{0; -1\}$ definiert. Mit der Umformung des Nenners gemäß (5) lässt sich die Ungleichung (4) wegen $(ab + 1)^2 > 0$ schreiben als

$$4 \cdot ab \leq (ab + 1)^2 = (ab)^2 + 2 \cdot ab + 1 \tag{6}$$

Für $ab > 0$ soll also $4 \leq ab + \frac{1}{ab} + 2$ gelten. Dies ist wegen (2) stets erfüllt.
Ist dagegen $ab < 0$, folgt aus (6) nach Division durch ab:

$$4 \geq ab + \frac{1}{ab} + 2 = -|ab| - \frac{1}{|ab|} + 2,$$

äquivalent zu

$$|ab| + \frac{1}{|ab|} \geq 2$$

Also gilt auch in diesem Fall die Ungleichung für alle $ab < 0$ mit $ab \neq -1$. ❑

Die Ungleichung (2) können wir nun verallgemeinern.

Aufgabe 02-09. Beweisen Sie, dass für alle positiven Zahlen *a, b, c* gilt:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geq 3 \tag{7}$$

Untersuchen Sie, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Lösungshinweise: Diese Ungleichung ist eine einfache Folgerung aus der bekannten Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel. Wir wollen jedoch hier diesen Zusammenhang nicht verwenden, sondern den Beweis direkt mit folgender Fallunterscheidung führen:

(I) Die drei Zahlen sind gleich groß. Dann gilt für alle positiven Zahlen mit $a = b = c$ sogar das Gleichheitszeichen.

(II) Es sind genau zwei der Zahlen gleich groß, zum Beispiel $a = c \neq b$. Dann ist die Ungleichung (7) äquivalent zu

$$1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 3.$$

Dies ist wegen (2) für positive Zahlen *a* und *b* stets erfüllt.

(III) Alle drei Zahlen sind verschieden und es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > b > c$, d.h. es gibt positive reelle Zahlen *x* und *y* mit $a - x = b = c + y$.

Wegen a > c gilt $\frac{x}{c}>\frac{x}{a}$ und wegen b > c gilt $\frac{y}{c}>\frac{y}{b}$. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt

$$\frac{x}{c}-\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-\frac{y}{b}>0,$$

$$\frac{x+y}{c}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}>3,$$

$$\frac{c+x+y}{c}+\frac{a-x}{a}+\frac{b-y}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}>3,$$ was zu beweisen war. ❑

Aufgabe 02-10 (MO511022). Für zwei positive rationale Zahlen a und b mit $a > b$ werden die Terme $a^2, a + b, a - b, a \cdot b, a : b$ und b^2 gebildet.

Weisen Sie nach, dass die Summe der sechs Terme stets größer als 12 ist.

Lösungshinweise: Wir bilden die Summe der sechs Terme und finden

$$a^2+(a+b)+(a-b)+a\cdot b+\frac{a}{b}+b^2=$$

$$a\cdot\left(a+2+b+\frac{1}{b}\right)+b^2>2\cdot(2+2+2)+0=12.$$

Hierbei haben wir neben $a > 2$ die Ungleichung $b+\frac{1}{b}\geq 2$ verwendet. ❑

Aufgabe 02-11 (MO480943). Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $(1 + x^3) \cdot (1 + y^3) = 1.$
(2) $\sqrt[3]{|(1 + x) \cdot (1 + y)|}$ ist rational.
(3) $\sqrt[3]{|xy \cdot (x + y)|}$ ist rational.

Lösungshinweise: Aufgrund der Betragszeichen sind alle angegebenen Wurzeln nichtnegativ und deshalb definiert. Wir untersuchen zunächst die Aussage (1). Es gilt:

Aus $(1 + x^3) \cdot (1 + y^3) = 1$ folgt nach Ausmultiplizieren

(4) $x^3 + y^3 + (xy)^3 = 0.$

Ist eine der Variablen gleich 0, so gilt auch $x = y = 0$. Offensichtlich sind aber für das Paar (0;0) auch die Aussagen (2) und (3) erfüllt.

Sind x und y beide positiv oder beide negativ, so erhalten wir bei Division durch $\sqrt{(xy)^3}$ die Gleichung

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y^3}} + \frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3}} + \sqrt{(xy)^3} = 0.$$

Diese Gleichung kann aber durch keine reellen Zahlen erfüllt werden, weil die Summe der beider ersten (positiven) Summanden bereits mindestens 2 beträgt und der dritte Summand nicht-negativ ist.

Ist dagegen eine Variabel negativ (beispielsweise x < 0) und die andere Variable positiv (y > 0), so gilt statt (4)

(4′) $|x|^3 + y^3 + (|x| \cdot y)^3 = 0.$

Für diese Situation können wir in gleicher Weise argumentieren: Diese Gleichung kann durch keine reellen Zahlen erfüllt werden. ❑

Damit haben wir ohne Analyse der Aussagen (2) und (3) alle Lösungen der Aufgabe gefunden! In der Musterlösung dagegen wird aufwändig unter Verwendung von (4) die Rationalität der Wurzeln aus (2) und (3) analysiert, um zu zeigen, dass es außer (0;0) keine weiteren Lösungen geben kann.