# Thema 02: Ungleichungen mit vollständigen Quadraten

## Aufgabe 02-01a (MO480923a).

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare $(a,b)$, für die

$$a + b \geq a^2 + b^2 - 1$$

gilt.

*Lösungshinweis:* Beachten Sie, dass hier nur ganzzahlige Lösungen zugelassen sind. Mit dieser Einschränkung kann die Lösungsmenge für $a$ und $b$ abgeschätzt werden.

## Aufgabe 02-02a (MO480935).

Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen $a, b, c$ mit $a + b + c = 1$ stets

$$\tfrac{1}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$$

gilt!

(vergleiche Aufgabe 02-02)

## Aufgabe 02-03a (MO540934).

Gegeben sind drei positive Zahlen $g, b$ und $f$, für die

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

gilt.

(a) Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.

(b) Beweisen Sie, dass für positive Zahlen $g, b$ und $f$, die (1) erfüllen, stets auch

$$g + b \geq 4f \qquad (2)$$

gilt.

*Lösungshinweis:* Ersetzen Sie in (2) die Variable *f* mittels der Gleichung (1) und suchen Sie in der Ungleichung das vollständige Quadrat.

**Aufgabe 02-04a (MO431043).**

Bestimmen Sie alle reellen Tupel $(a, b, c, d)$, welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$
\begin{aligned}
&a + bc = 1\\
&b + cd = 1\\
&c + da = 1\\
&d + ab = 1
\end{aligned}
$$

*Lösungshinweise:* Aus den ersten beiden Gleichungen können wir die Gleichung $ad - b^2 = d - b$ erhalten. Analog finden wir weitere drei Gleichungen mit den Differenzen $a - c$, $b - d$ und $c - a$ auf den rechten Seiten. Durch Addition dieser vier Gleichungen können wir dies zu einer Gleichung mit vollständigen Quadraten führen. (vergleiche Aufgabe 02-05).

**Aufgabe 02-05a.**

Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x$ die folgende Ungleichung gilt:

$$(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 6) + 9 \geq 0.$$