MO601024 – Ungleichungen mit vollständigen Quadraten

In der 2. Runde der 60. Mathematik-Olympiade (Schuljahr 2020/21) wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe 02-01 (MO601024).

(a) Ermitteln Sie alle Paare positiver Zahlen (x, y), für welche die folgende Gleichung gilt

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x+y.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen x und y die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x+y.$$

(c) Zeigens Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} > \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+y}\right)$$

für alle positiven Zahlen x und y.

Lösungshinweise: Zur Lösung der Aufgabe (a) erscheint es naheliegend, solange äquivalent umzuformen, bis die Gültigkeit der erhaltenen Gleichung erkennbar ist. Da die Summe der rechten Seite positiv ist, dürfen wir beide Seiten quadrieren und erhalten:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) = (x+y)^2.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zu

$$x^2\cdot y^2 - 2xy + 1 = 0, \text{ gleichbedeutend zu } (xy-1)^2 = 0.$$

Folglich ist die geforderte Gleichung genau dann erfüllt, wenn $y = \frac{1}{x}$ gilt. ❑

Für die Lösung von Aufgabe (b) erkennen wir, dass wir alle Gleichheitszeichen durch das Relationszeichen ≥ ersetzen können. Für die Beweisführung beginnen wir mit einer wahren Aussage: da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, gilt für alle positiven Zahlen

$$(xy-1)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

also $x^2\cdot y^2 - 2xy + 1 \geq 0 \qquad |+x^2+2xy+y^2$

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

Beide Seiten lassen sich als Produkte darstellen:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) \geq (x+y)^2.$$

Beide Seiten der Ungleichung sind nichtnegativ. Somit dürfen wir weiter umformen und finden die Behauptung:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} \geq x+y.$$

Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) könnte man auch zusammenfassen zu „Zeigen Sie die Ungleichung ... Für welche Zahlen *x* und *y* gilt die Gleichheit?“. Die hier gewählte Formulierung hat den Vorteil, im einfachen Teil (a) die Struktur der (Un-)Gleichung bereits untersuchen zu können, und dabei Fehler mit der Richtung der Relationszeichen zu vermeiden.

Kern der Lösung ist die grundlegende Aussage (1), dass vollständige Quadrate nichtnegativ sind. Die etwas überraschende Struktur der Ungleichung in Teilaufgabe (c) lässt vermuten, dass auch hierbei vollständige Quadrate für den Beweis verwendet werden können. Dafür multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit den positiven Faktoren $9\cdot x\cdot y\cdot(x+y)$ und erhalten

$$9\cdot y\cdot(x+y)+9\cdot x\cdot(x+y) > 4\cdot(2\cdot y\cdot(x+y)+3\cdot x\cdot y)$$

d.h. $9\cdot x^2+y^2-2\cdot x\cdot y > 0$

also $8\cdot x^2+(x-y)^2 > 0$ (2)

Die letzte Ungleichung ist als Summe vollständiger Quadrate nicht negativ und – da $x \neq 0$ – sogar positiv. Für die Beweisführung beginnen wir vorteilhafterweise mit Ungleichung (2) und formen um, bis wir die Behauptung finden. ❑

Der Nachweis von Ungleichungen mit Hilfe vollständiger Quadrate kann häufig in Wettbewerbsaufgaben angewandt werden.

Aufgabe 02-02 (MO381043). Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets mindestens 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen *x*, *y* und *z* stets

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \geq 0. \qquad (3)$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2+y^2+z^2-10\cdot(x+y+z)+3\cdot 25 \geq 0.$$

Setzt man nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt die Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Da für beliebige reelle Zahlen a und b stets die Ungleichung $(a+b)^2 \geq 2ab$ gilt, finden wir für x, y, z zunächst

$$2\cdot(x^2+y^2+z^2) \geq 2\cdot(xy+yz+xz) \qquad (4)$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 2 \cdot (xy + yz + xz) = 225 \qquad (5)$$

Die Addition von (4) und (5) führt zur Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Die Gleichung (3) können wir formulieren, wenn wir ein Zahlentripel (x, y, z) erraten, für das das Gleichheitszeichen gilt. Dann können wir die Lösung aber auch so fortsetzen: Wir untersuchen solche Tripel, die von (5,5,5) variieren und schreiben dafür $(5 + a, 5 + b, 5 + c)$ mit Variablen a, b, c, für die laut Voraussetzung $a + b + c = 0$ gelten muss. Dann finden wir

$$(5 + a)^2 + (5 + b)^2 + (5 + c)^2 = 75 + 10 \cdot (a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$$

Wegen $(a + b + c) = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ folgt aus dieser Ungleichung unmittelbar die Behauptung. ❑

Aufgabe 02-03 (MO480923/MO481023).

(a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (a, b), für die die Ungleichung $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (a, b) reeller Zahlen stets die Ungleichung $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt?

(c) Wann gilt in (b) das Gleichheitszeichen?

Lösungshinweise zu (b): Wir können das Zahlenpaar $a = b = \frac{1}{2}$ als Lösung für das Gleichheitszeichen in (b) erraten. Deshalb ist der Lösungsansatz

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \qquad (6)$$

eine erfolgsversprechende Ausgangsungleichung. Tatsächlich finden wir nach Ausmultiplizieren und Umordnen

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad |+a + b$$

also $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b.$ ❑

Lösungsvariante: Die Ungleichung (6) können wir auch durch Umformung der Behauptung in Teilaufgabe (b) erhalten:

$$a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \qquad |-a - b$$

$$0 \leq a^2 - a + \frac{1}{2} + b^2 - b + \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2.$$ ❑

Lösungsvariante: Haben wir mit $a = b = \frac{1}{2}$ eine spezielle Lösung gefunden, können wir jedes Lösungspaar auch in der Form $\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y\right)$ schreiben. Setzen wir diese in die Ungleichung der Behauptung ein, so erhalten wir:

$1 + x + y \leq 1 + x + x^2 + y + y^2$, also $0 \leq x^2 + y^2$.

Da die letzte Ungleichung für alle reellen Zahlen erfüllt ist, kann die Gültigkeit der Behauptung gezeigt werden, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = y = 0$ gilt. ❑

Aufgabe 02-04 (MO400942). Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, von denen das System der beiden Ungleichungen

$$x^2 \leq \frac{2000 \cdot y^2 + 2x - 1}{2001}, \; y^2 \leq \frac{2000 \cdot x^2 - 2y - 1}{2001}$$

erfüllt wird.

Lösungshinweise: Wenn (x, y) das System der Ungleichungen erfüllen, dann erfüllen (x, y) auch die Ungleichung, die durch Addition beider Ungleichungen und Multiplikation mit 2001 entsteht:

$x^2 + y^2 \leq 2x - 2y - 2$, also $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 0$.

Da die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind, gilt die letzte Ungleichung nur für $x = 1$ und $y = -1$. Die Probe $1 \leq \frac{2000 \cdot 1 + 2 - 1}{2001} = 2001$ bestätigt, dass die gegebenen Ungleichungen für diese (x, y) gelten. ❑

Die Eigenschaft der Quadrate von reellen Zahlen können wir auch zur Lösung von Gleichungen einsetzen.

Aufgabe 02-05 (MO411045). Ermitteln Sie alle rationalen Zahlen x, für die gilt:

$$4^x + 9^x + 16^x = 6^x + 8^x + 12^x.$$

Lösungshinweise: Mit der Idee von vollständigen Quadraten kommen wir auf folgenden Ansatz, indem wir die gegebene Gleichung geschickt umformen:

$$(2^x)^2 + (3^x)^2 + (4^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 4^x + 3^x \cdot 4^x \qquad | \cdot 2$$
$$2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{x^2} + 2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 4^x + 4^{x^2} + 3^{x^2} - 2 \cdot 3^x 4^x + 4^{x^2} = 0$$
$$(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 4^x)^2 + (3^x - 4^x)^2 = 0$$

Eine Summe von drei Quadraten reeller Zahlen kann nur dann gleich 0 sein, wenn jeder der Summanden gleich 0 ist. Also finden wir $2^x = 3^x = 4^x$. Dies ist jedoch nur für $x = 0$ möglich. Eine Probe bestätigt, dass $x = 0$ auch tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung ist. ❑