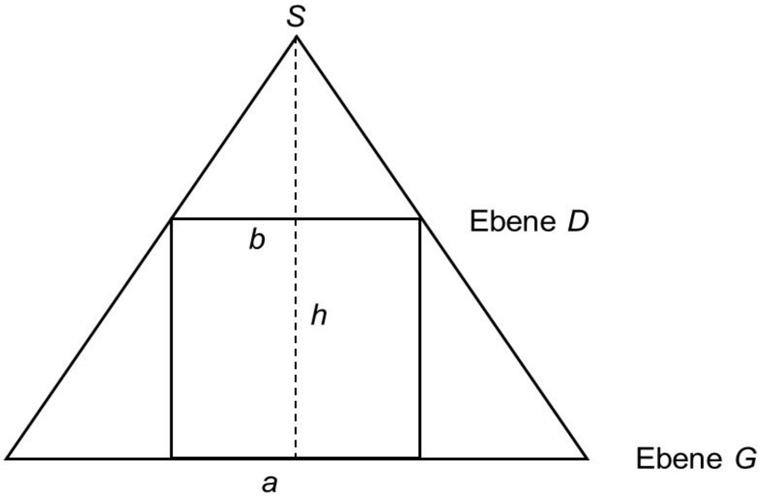
Thema 06 – Einbeschriebene Körper

Aufgabe 1 – MO600936[1]. Wir betrachten in dieser Aufgabe eine gerade quadratische Pyramide. Im Inneren dieser Pyramide liege ein Würfel, der mit seiner Grundfläche auf der Grundfläche der Pyramide steht. Weiterhin sollen die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Die Länge der Grundkanten der Pyramide wird im Folgenden mit a, die Länge ihrer Höhe mit h und schließlich die Länge der Würfelkanten mit b bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$ gilt.
b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem a, h und b positive ganze Zahlen sind und die Gleichung aus Teil a) gültig ist.
c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von b alle Paare (a, h) positiver ganzer Zahlen, wenn b eine Primzahl ist und die Gleichung aus Teil a) erfüllt sein soll.

Lösungshinweise: Da die Aufgabenstellung keine Abbildung zur Veranschaulichung des Sachverhaltes enthält, skizzieren wir die gegebene Situation. Häufig lassen sich räumliche Fragestellungen auf ein ebenes Problem zurückführen, wenn wir eine geeignete Schnittebene finden. Hier eignet sich die senkrechte Parallelprojektion auf senkrecht stehende Würfelebene.



Teil a) Die Ebene, in welcher die Deckfläche des Würfels liegt, schneidet die Pyramide in einem Quadrat, dessen Ecken auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Da auch die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen, handelt es sich bei dem genannten Quadrat genau um die Deckfläche des Würfels. Die Ebene schneidet von der großen also eine kleine Pyramide ab.

Die kleine Pyramide geht durch eine zentrische Streckung an der Spitze S in die große Pyramide über, welche die Ebene D der Deckfläche des Würfels in die Ebene G der Grundfläche der großen Pyramide überführt. Bei dieser Streckung geht jede Ecke der quadratischen Deckfläche des Würfels in die entsprechende Ecke der Grundfläche der großen Pyramide über. Da die Deckfläche des Würfels

[1] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

die Seitenlänge b und die Grundfläche der großen Pyramide die Seitenlänge a haben, muss der Streckfaktor der genannten Abbildung gleich $\frac{a}{b}$ sein.

Andererseits hat S von D den Abstand $h - b$ und von G den Abstand h, also ist der Streckfaktor gleich $\frac{h}{h-b}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Beziehung

$$\frac{h}{h-b} = \frac{a}{b}$$

die nach Multiplikation mit $(h - b) \cdot b$ zu $h \cdot b = a \cdot (h - b) = a \cdot h - a \cdot b$ und weiter nach Addition von $a \cdot b$ zu $a \cdot b + h \cdot b = a \cdot h$ führt. Nach Division durch $a + h$ finden wir hieraus Die Behauptung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$.

Teil b) Ein Beispiel ist $a = 2$, $h = 2$ und $b = 1$, denn es gilt $1 = \frac{2 \cdot 2}{2+2}$. Es ist die Probe, aber keine Herleitung erforderlich!

Teil c) Die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$ ist gleichbedeutend mit $(a - b) \cdot (h - b) = b^2$. Daher müssen $a - b$ und $h - b$ Komplementärteiler von b^2 sein. Wäre dabei einer von ihnen negativ, so wären beide negativ und der kleinere läge zwischen $-b^2$ und $-b$. Das kann aber nicht sein, weil a und h positiv sind. Folglich müssen $a - b$ und $h - b$ beide positiv sein. Weil b eine Primzahl ist, gibt es drei Fälle:

$a - b = 1$ und $h - b = b^2$,
$a - b = b$ und $h - b = b$,
$a - b = b^2$ und $h - b = 1$.

Diese Fälle führen auf die folgenden Lösungen (unter Beachtung der möglichen Vertauschung von a und h):

$$(a, h) = ((b + 1) \cdot b, b + 1), (a, h) = (b + 1, (b + 1) \cdot b), (a, h) = (2b, 2b).$$

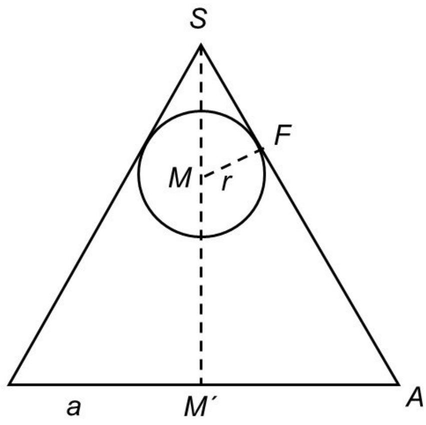
In einer Probe müssen wir noch zeigen, dass es sich hierbei auch tatsächlich um Lösungen der Gleichung aus Teil a) handelt. ❑

Derartige Aufgabenstellungen finden wir schon in den Anfängen der Mathematik-Olympiaden, beispielsweise in

Aufgabe 2 – MO031024. In einem Kreiskegelkörper mit der Spitze S, dessen Achsenschnitt die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt M die Höhe $\overline{SM'}$ des Kegels im Verhältnis $|SM| : |MM'| = 1 : 2$ teilt. Die Länge eines Durchmessers der Grundfläche des Kegels sei a.

Wie groß ist der Radius r der Kugel?

Lösungshinweise: Im Aufgabentext wird bereits auf den Achsenschnitt hingewiesen. Das räumliche Problem können wir also in die Ebene projizieren: Wir zeichnen die Schnittfläche durch S und M', in der die Mantellinie SA des Kreiskegelkörpers zu sehen ist. Da die Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, hat auch die Mantellinie die Länge a. Wir suchen den Radius r, der in der Zeichnung die Länge des Lotes vom Mittelpunkt M der Kugel auf die Mantellinie mit Fußpunkt F darstellt. Wir erkennen, dass die Dreiecke MFS und $AM'S$ ähnlich sind. Somit finden wir



$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a, \qquad \text{also} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Für die Höhe h des Schnittdreiecks wissen wir: $h = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3}$. Nach Voraussetzung ist $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ unmittelbar $|SM| = \frac{h}{3}$ folgt. Daraus erhalten für den gesuchten Radius $r = \frac{a}{12} \cdot \sqrt{3}$. ❑

In der Diskussion mit Kugeln oder Kreisen darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln oder Kreise durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht.

Aufgabe 3 – MO510945. Auf einer waagerechten Ebene E liegen drei gleich große Kugeln K_1, K_2 und K_3, die sich paarweise berühren. Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 dieser Kugeln bilden also ein gleichseitiges Dreieck. Eine vierte Kugel K_4 berührt die Kugeln K_1, K_2, K_3 und die Ebene E. Eine weitere Kugel K_5 wird von jeder dieser vier Kugeln K_1, K_2, K_3 und K_4 von außen berührt.

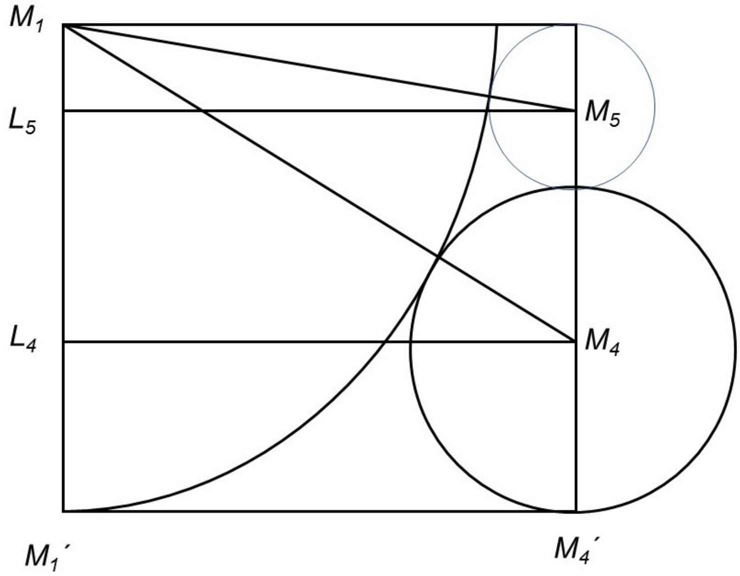
In welcher Lagebeziehung steht K_5 zur Ebene E' durch M_1, M_2 und M_3?

Lösungshinweise: Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bezeichnen wir mit M_i der Mittelpunkt der Kugel K_i, mit r_i der Radius der Kugel K_i und mit M'_i das Bild von M_i unter der senkrechten Parallelprojektion auf E. Für die Radien $r_1 = r_2 = r_3$ setzten wir R.

Schritt 1: Lagebestimmung der M'_i in E. Da für $i \neq 5$ der Berührungsradius von K_i mit E senkrecht auf E steht, ist für $i \neq 5$ der Punkt M'_i auch der Berührpunkt von K_i mit E. Da sich die gleich großen Kugeln K_1, K_2, K_3 von außen berühren, bilden ihre Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E', und es gilt $E' \parallel E$. Somit bilden M'_1, M'_2 und M'_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E. Da die Abstände von M_4 zu M_i für $_i \in \{1, 2, 3\}$ alle gleich sind, liegt M_4 in den mittelsenkrechten

Ebenen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3. Da diese Ebenen senkrecht zu E' und damit auch senkrecht zu E stehen, werden sie in der senkrechten Parallelprojektion auf E als Mittelsenkrechte von $M'_1M'_2$, $M'_1M'_3$ und $M'_2M'_3$ abgebildet. Der Punkt M'_4, das Bild von M_4 unter dieser Projektion, ist also der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $M'_1M'_2M'_3$.

Analog ergibt sich, dass auch M_5 auf M'_4 abgebildet wird. Die Kugeln K_4 und K_5 liegen also senkrecht übereinander und es ist $M'_4 = M'_5$. Weiter gilt



$$|M'_1M'_4| = \frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}$$

als Umkreisradius im gleichseitigen Dreieck $M'_1M'_2M'_3$ mit der Kantenlänge $2R$.

Schritt 2: Bestimmung von r_4 und r_5. Dafür zeichnen wir einen ebenen Schnitt E´´ durch die Mittelpunkte M_1, M_4 und M_5, der senkrecht auf der Ebene E steht. Dann finden wir

$$|M_5M'_4| = r_5 + 2 \cdot r_4, |M_1M_4| = R + r_4, |M_1M_5| = R + r_5.$$

Seien L_4 und L_5 die Fußpunkte der Lote von M_4 bzw. M_5 auf $M_1M'_1$. Die Vierecke $M'_1M'_4M_4L_4$ und $L_4M_4M_5L_5$ sind dann Rechtecke. Im rechtwinkligen Dreieck $L_4M_4M_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$(R - r_4)^2 + \left(\frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_4)^2$$

Umstellen nach r_4 unter Beachtung von $R \neq 0$ liefert $r_4 = \frac{1}{3}R$. Im rechtwinkligen Dreieck $L_5M_5M_1$ folgt ähnlich

$$(R - 2 \cdot r_4 - r_5)^2 + \left(\frac{2}{3}R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_5)^2$$

Umstellen nach r_5 liefert $r_5 = \frac{1}{6}R$. Damit folgt $2 \cdot r_4 + 2 \cdot r_5 = R$.

Antwort: E′ tangiert also die Kugel K_5 (im Umkreismittelpunkt von Dreieck $M_1M_2M_3$). ❑