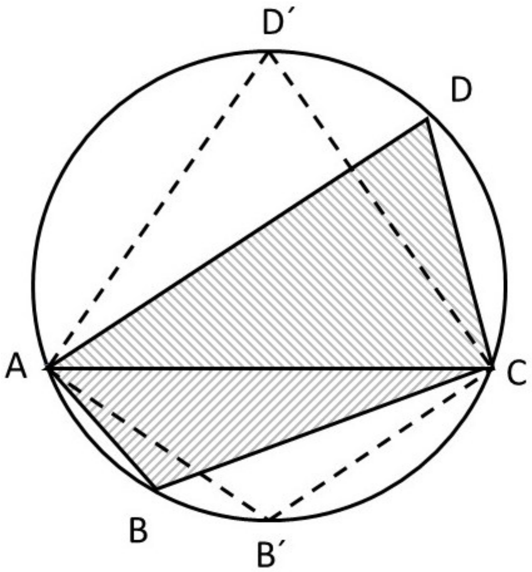
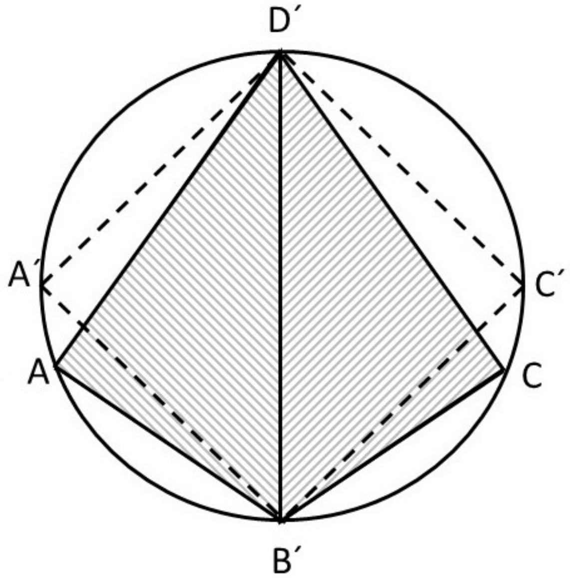
Thema 06 – Einbeschriebene Figuren

Aufgabe 1 – MO380941[1]. Gegeben ist ein Kreis k. Man beweise, dass von allen diesem Kreis einbeschriebenen Vierecken (Sehnenvierecken) die Quadrate den größten Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Wir betrachten ein Sehnenviereck $ABCD$ des Kreises k. Die Mittelsenkrechte von AC schneide k in B' und D' so, dass auch $AB'CD'$ ein Sehnenviereck von k ist. Dann ist $B'D'$ ein Durchmesser von k. Daher ist in den Dreiecken $AB'C$ und ACD' die Summe der auf AC senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken ABC und ACD. (Diese Summen sind genau dann gleich, wenn B und D selbst auf der Mittelsenkrechten von AC liegen, also mit B' und D' zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks $AB'CD'$ ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen Sehnenvierecks $ABCD$.





Nun gehen wir von dem Sehnenviereck $AB'CD'$ aus und betrachten die Mittelsenkrechte von $B'D'$, die k in A' und C' so schneidet, dass auch $A'B'C'D'$ ein Sehnenviereck von k ist. Dann ist $A'C'$ ein Durchmesser von k. Daher ist in den Dreiecken A´B´D´ und C´B´D´ die Summe der auf A´C´ senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken $AB'D'$ und $CB'D'$. (Diese Summen sind genau dann gleich, wenn A und C mit A' und C' zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks $A'B'C'D'$ ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des Sehnenvierecks $AB'CD'$ und deshalb auch größer oder gleich des ursprünglichen Sehnenvierecks $ABCD$.

Das Sehnenvierecks $A'B'C'D'$ ist aber aufgrund der Umkehrung des Satzes von THALES ein Quadrat. Eine Vergrößerung dessen Flächeninhaltes ist nicht mehr möglich, womit wir die Behauptung bewiesen haben. ❑

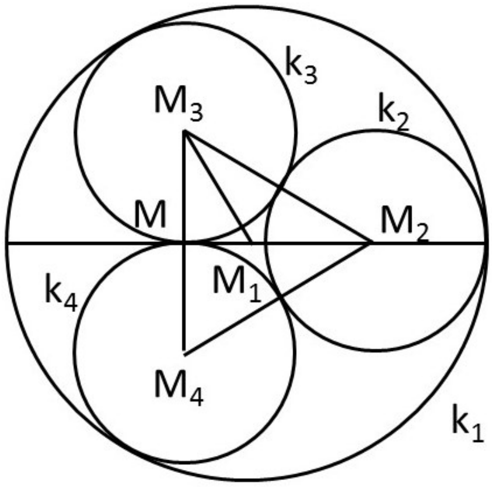
---

[1] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

Aufgabe 2 – MO480944/481044. Es sei C ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Über $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ seien die Halbkreise h_1 bzw. h_2 zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis k_3 berühre h_1 von innen, h_2 von außen und weiterhin die Strecke $\overline{AB}$.

Wenn die Radien von h_2 und k_3 beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von h_1?

Vorbemerkung: Bei Aufgaben mit konkreten Maßangaben ist es üblich, zu Beginn darauf zu verweisen, dass die Maßeinheiten im Folgenden weggelassen werden, wenn dadurch keine Missverständnisse möglich sind. Zudem dürfen wir ohne Beweis verwenden: Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte.



Lösungshinweise: Zum Aufgabentext wurde eine Skizze gezeigt. Wir ergänzen die Skizze, indem wir an der Strecke $\overline{AB}$ spiegeln. Dadurch wird h_1 zu einem Kreis k_1, h_2 zu einem Kreis k_2 und es kommt ein Kreis k_4 hinzu.

Die Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen Sie haben alle den Radius $r = 3$ und berühren jeweils k_1 von innen. Somit erkennen wir, dass die Mittelpunkte der Kreise k_2, k_3 und k_4 ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2 \cdot r = 6$ bilden. In diesem Dreieck beträgt der Radius seines Umkreises (also der Abstand des Mittelpunktes eines inneren Kreises zum Mittelpunkt M_1 des Kreises k_1) $\frac{2}{3}r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Damit finden wir den Zusammenhang: $r_1 - r_2 = 2r \cdot \sqrt{3}$.

Der Radius des Halbkreises h_1 beträgt also $\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm $\approx$ 6,46 cm. ❑

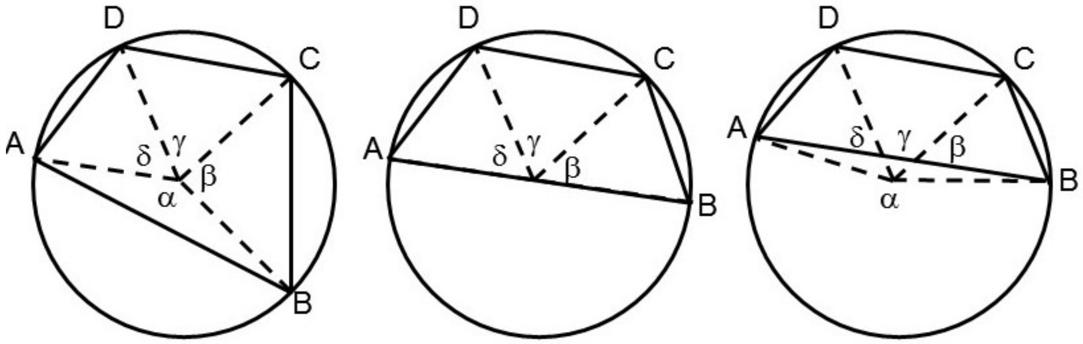
Hinweis: Wenn die Ausgangsmaße konkret mit einer Maßzahl und einer Maßeinheit angegeben werden, wird erwartet, dass auch das Ergebnis in Maßzahlen dieser Maßeinheit angegeben wird (also z.B. keine Wurzelausdrücke im Ergebnis stehen). Wir können die Rechnung ohne Taschenrechner wie folgt abschätzen:

Wegen $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,75 abschätzen, oder wegen $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 3{,}0276 = 1{,}74^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,73 abschätzen. Die Berechnung der Quadrate ist dabei ohne Taschenrechner möglich.

Aufgabe 3 – MO400943. Einem Kreis k sei ein Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit *a, b, c, d* bezeichnet. Ein zweites dem Kreis k einbeschriebenes Viereck $A'B'C'D'$ habe ebenfalls *a, b, c, d* als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'A'}$ unterscheiden kann).

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke *ABCD* und *A´B´C´D´* so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind!
b) Beweisen Sie, dass je zwei Vierecke, die die in a) genannten Voraussetzungen erfüllen, zueinander flächengleich sind!

Lösungshinweise: Teil a) wird als Aufgabe 06-7a (Thema_06_Aufgaben.pdf) gestellt. Teil b) Mit α, β, γ, δ bezeichnen wir die Zentriwinkelgrößen, die im Kreis k zu den Sehnenlängen gehören. Mit F_a, F_b, F_c und F_d bezeichnen wir die Flächeninhalte der jeweils in k von einer Sehne der Länge a, b, c und d und zwei Radien begrenzten Dreiecke. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:



(I) Alle vier Winkel sind kleiner als 180° und es gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_a + F_b + F_c + F_d$.

(II) Es sei $\alpha = 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta = 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d$.

(III) Es sei $\alpha > 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta < 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d - F_a$.

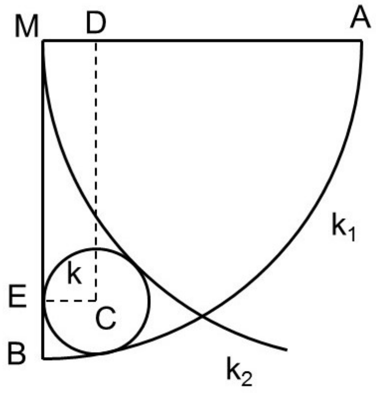
Nach Voraussetzung treten im Viereck *A´B´C´D´* dieselben Zentriwinkelgrößen auf wie in *ABCD*, nur möglicherweise in anderer Reihenfolge. Da aber die betrachteten drei Fälle nicht von der Reihenfolge der Winkel α, β, γ, δ abhängen, trifft für das Viereck *A´B´C´D´* derselbe Fall wie für das Viereck *ABCD* zu.

Somit haben die beiden Vierecke jeweils den gleichen Flächeninhalt und wir haben die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe 4 – MO411032. Es sei *AB* ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit gegebenem Radius r und Mittelpunkt M. Ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis k einbeschrieben werden, d.h. er soll die Strecke $\overline{MB}$ berühren und den Kreis k_1 von innen sowie den Kreis k_2 von außen berühren.

a) Wie groß ist der Radius des Kreises k?
b) Konstruieren Sie den Kreis k nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise Teil a): Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei *C*, sein Radius *x*. Die Fußpunkte der Lote von *C* auf $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ nennen wir *D* bzw. *E*.



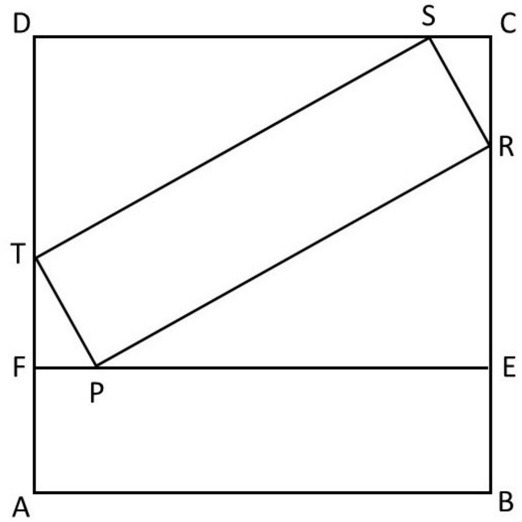
Dann ist *MDCE* ein Rechteck. *E* ist der Berührungspunkt von *k* mit $\overline{MB}$. Es gilt $|CE| = |DM| = x$, also $|AD| = r - x$.

Nun finden wir aufgrund der Verbindungslinien zwischen den Kreismittelpunkten $|AC| = r + x$ und $|MC| = r - x$.

Setzen wir für die Länge $|DC|$ zur Abkürzung der Schreibweise *y*, so folgt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck *ADC* mit rechtem Winkel am Punkt *D* bzw. im rechtwinkligen Dreieck *MCD* mit rechtem Winkel am Punkt *D*: $(r - x)^2 = x^2 + y^2$ und $(r + x)^2 = (r - x)^2 + y^2$. Nach dem wir y^2 eliminieren und die dabei entstehende Gleichung umstellen, erhalten wir $r^2 = 6 \cdot rx$, d.h. wegen r ≠ 0 finden wir $x = \frac{r}{6}$. ❑

Hinweis zu Teil b): Bei der Konstruktionsbeschreibung darf das Ergebnis aus Teil a) verwendet weren, d.h. es darf (mit geometrischen Mitteln, z.B. mittels Anwendung des Strahlensatzes) der sechste Teil des Radius konstruiert werden.

Aufgabe 5. Gegeben ist ein Quadrat, welches in zwei unterschiedliche Rechtecke geteilt ist, das kleinere Rechteck kann dabei dem größeren so einbeschrieben werden, dass auf jeder Seite des größeren Rechtecks genau ein Eckpunkt des kleineren liegt. In welchem Verhältnis wurde das Quadrat geteilt?



Lösungshinweise: Wir nehmen o.B.d.A.[2] an, dass die Kantenlänge des Quadrates 1 sei. Das kleinere Rechteck habe die Kantenlängen $|AF| = |TP| = x$ und $|AB| = |PR| = 1$. Bezeichnen wir die Längen $|FT| = y$, $|FP| = z$, $|PE| = a$ und $|ER| = |DT| = b$, so gelten aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke *FPT* und *PER* die Verhältnisse $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$ bzw. $\frac{z}{x} = \frac{b}{1}$.

Damit das kleine Rechteck *PRST* wie gefordert in das Rechteck *ECDF* passt, muss gelten: $z + a = 1$ und $y + b = 1 - x$. Dies können wir zusammenfassen zu

$$b \cdot (y + c) - a \cdot (c + a) = b \cdot (1 - x) - a$$

Aus dem $b^2 - a^2 = b - 1$ folgt. Mit $a^2 + b^2 = 1$ erhalten wir daraus $b = -\frac{1}{2}$ und schließlich $x = 2 - \sqrt{3}$. Das gesuchte Verhältnis beträgt somit $\frac{1-x}{x} = 1 + \sqrt{3}$. ❑

[2] o.B.d.A. – ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Eine solche Anmerkung ist ohne weitere Hinweise zulässig, wenn offensichtlich die vorgenommene Auswahl keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.