Thema 06 – Einbeschriebene Figuren und Körper (Aufgaben)

Aufgabe 06-1a – MO221043B. Fünf Kugeln K_1, ..., K_5 mit gleichem Radius r seien so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte M_1, ..., M_5 ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden. Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berührt jede der fünf Kugeln K_1, ..., K_5.

Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch M_1, ..., M_5 schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Aufgabe 06-2a. Es seinen n Kugeln K_1, ..., K_n ($n = 3, 4, 6$ oder 7) mit gleichem Radius r so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte M_1, ..., M_n ein ebenes regelmäßiges n-Eck bilden. Eine $(n + 1)$-te Kugel K_{n+1} mit dem Radius r berührt jede der n Kugeln K_1, ..., K_{n}.

Untersuchen Sie, ob K_{n+1} die Ebene durch M_1, ..., M_n schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Aufgabe 06-3a – MO331024. Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, dass keine über den Rand hinausragt!

Aufgabe 06-4a – MO511045. Beim Pool-Billard werden 16 gleich große Kugeln mit dem Radius R benötigt. Eine der Kugeln ist weiß. Eine flache Schachtel mit quadratischer Grundfläche ist gerade so lang, breit und hoch, dass die Kugeln in vier Reihen zu je vier Kugeln lückenlos hineinpassen. Wird die Schachtel mit ihrem Deckel verschlossen, so berührt dieser ebenfalls alle 16 Kugeln.

a) Eine weitere kleinere Kugel K_a mit dem Radius r_a soll in der gefüllten Schachtel Platz finden, so dass der Deckel noch immer schließt. Ermitteln Sie die maximale Größe von r_a in Abhängigkeit von R.

b) Alle Kugeln mit Ausnahme der weißen werden vor dem Anstoß mit Hilfe eines Rahmens in Form eines gleichseitigen Dreiecks positioniert. Der Rahmen ist so eng, dass sich auch hier die Kugeln gegenseitig berühren. Eine kleinere Kugel K_b wird in dieser Anordnung aufgelegt. Sie berührt die drei unter ihr liegenden größeren Kugeln K_1, K_2 und K_3. Die jeweils höchsten Kugelpunkte der kleinen und jeder großen Kugel liegen in einer Ebene. Ermitteln Sie auch hier den Radius r_b der kleinen Kugel K_b in Abhängigkeit von R.

Aufgabe 06-5a – MO350942/351042. Alex und Beate beschäftigen sich mit folgendem Problem: In einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge a sollen n kongruente, möglichst große Kreise so einbeschrieben werden, dass keine zwei Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben und dass kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt.

Für $n = 6$ zeichnet Alex die Kreise in der Anordnung wie in Abbildung (a), Beate wie in der Abbildung (b). Wer hat die größeren Kreise gezeichnet?

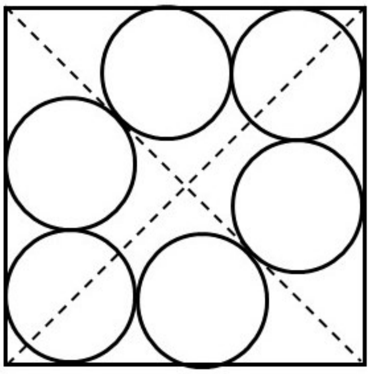

Abbildung a)

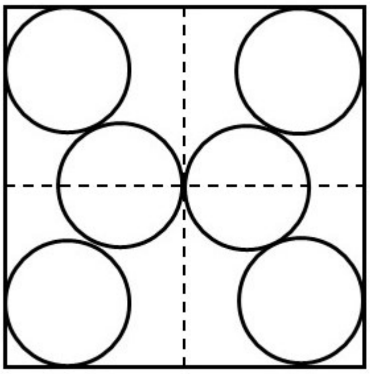

Abbildung b)

Aufgabe 06-6a. Finden Sie eine Anordnung von 5 Kreisen mit möglichst großem Radius entsprechend der Aufgabe 06-5a und weisen Sie nach, dass es keine Anordnung von 5 Kreisen mit größerem Radius gibt. Untersuchen Sie, ob es in Aufgabe 06-5a eine Anordnung von 6 Kreisen mit größerem Radius als in den angegebenen Anordnungen gibt.

Aufgabe 06-7a – MO400943. Einem Kreis k sei ein Viereck ABCD einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit *a, b, c, d* bezeichnet. Ein zweites dem Kreis *k* einbeschriebenes Viereck A´B´C´D´ habe ebenfalls *a, b, c, d* als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'A'}$ unterscheiden kann).

Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke *ABCD* und *A´B´C´D´* so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind!

Aufgabe 06-8a. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Im Innern dieses Quadrates werden

- ein Quadrat *A´B´C´D´* mit der Seitenlänge *x* so eingezeichnet, dass *A* und *A´* zusammenfallen und *B´* auf der Seite $\overline{AB}$, *D´* auf der Seite $\overline{AD}$ und *C´* im Innern von ABCD liegt
- sowie ein Kreis eingezeichnet, der die Seiten von $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ berührt und durch den Eckpunkt *D´* geht.

Untersuchen Sie, ob bei geeigneter Wahl von $|A'B'| = x$, $(0 \leq x \leq 1)$ die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrates *A´B´C´D´* einen minimalen Wert annimmt und geben Sie gegebenenfalls diesen Wert *x* und den minimalen Flächeninhalt an.