Thema 05: Quadratische Funktionen

Aufgabe 1 – MO600934. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 5a^2 - 12a$$

gegebene Funktionenschar mit reellem Parameter a.

a) Bestimmen Sie alle diejenigen Werte für a, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat.
b) Bestimmen Sie unter allen Werten für a, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat, diejenigen, für welche der Abstand dieser Nullstellen maximal ist.

Lösungshinweise: Da die Nullstellen zu untersuchen sind, wenden wir in naheliegender Weise die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an und finden:

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 5a^2 + 12a} = a \pm 2 \cdot \sqrt{3a - a^2}$$

Es existieren genau dann zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn die Diskriminante $D = a \cdot (3 - a)$ positiv ist. Dies ist für alle a mit $0 < a < 3$ der Fall. Für die Differenz beider Nullstellen gilt zudem $|x_1 - x_2| = 4 \cdot \sqrt{3a - a^2}$, wobei a aus dem Intervall $(0; 3)$ gewählt werden kann. Wegen

$$3a - a^2 = -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

ist die Diskriminante nicht größer als $\frac{9}{4}$ und das Maximum wird für $a = \frac{3}{2}$ angenommen. Somit betragen die gesuchten Nullstellen

$$x_1 = \frac{3}{2} + 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\,;\ x_2 = \frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{3}{2}$$

Der Abstand beider Nullstellen ist $x_1 - x_2 = \frac{9}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 6.$ ❑

Auch bei der folgenden Aufgabe führt die Diskussion der Diskriminante zur Lösung.

Aufgabe 2 – MO431023. Sei b eine ungerade ganze Zahl. Finden Sie alle ganzzahligen Werte von c in Abhängigkeit von b, für welche die Gleichung $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zwei verschiedene ganzzahlige Lösungen hat.

Lösungshinweise: Wir bestimmen die Diskriminante aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen in Normalform: $D = \frac{1}{4} \cdot (b^2 - 4 \cdot c)$. Wir erhalten genau dann zwei verschiedene ganzzahlige Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}$, wenn $b^2 - 4 \cdot c$ das Quadrat einer ungeraden Zahl ist. Setzen wir für eine ganze Zahl z

$$b^2 - 4 \cdot c = (2 \cdot z - 1)^2$$

so können wir diese Gleichung nach c auflösen:

$$c = -z^2 + z + \frac{b^2 - 1}{4}$$

Für eine ungerade Zahl b ist der Ausdruck $b^2 - 1 = (b - 1) \cdot (b + 1)$ stets durch 4 teilbar (weil der Vorgänger und der Nachfolger von b jeweils gerade Zahlen sind). Somit ist c für jede ganze Zahl z selbst eine ganze Zahl. Damit sind alle Lösungen der Aufgabe gefunden. ❑

Anstatt die Lösungen mit Hilfe der Lösungsformel zu analysieren, eignet sich auch die Anwendung des Wurzelsatzes von VIETA[1], der für quadratische Gleichungen in Normalform wie folgt lautet:

Sind x_1 und x_2 die reellen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + a \cdot x + b$, so gilt

$$x_1 + x_2 = -a \,;\; x_1 \cdot x_2 = b$$

Lösungsvariante: Mittels Wurzelsatz von VIETA finden wir für die Nullstelen x_1 und x_2 dieser Funktion die Zusammenhänge

$$x_1 + x_2 = -b \,;\; x_1 \cdot x_2 = c$$

also nach c umgeformt:

$$c = x_1 \cdot (-b - x_1) = -x_1^2 - b \cdot x_1$$

Wir erkennen: Ist die Nullstelle x_1 eine beliebige ganze Zahl n und ermitteln wir c über die Gleichung $c = -n^2 - b \cdot n$, so lauten die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + n^2 - bn = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + n^2 - nb} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - n\right)^2}$$

Ist b eine ungerade Zahl, so ist die Diskriminante größer als 0 und es gibt zwei verschiedene Nullstellen, die ganzzahlig sind. ❑

Aufgabe 3 – MO590944. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

[1] vergleiche Thema 03 – Gleichungssysteme (II)

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind für die genannten Nullstellen folgende Gleichungen erfüllt:

$$x_1 + x_2 = -a\,;\; x_1 \cdot x_2 = b$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2a - 1\,;\; \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1$$

Multiplizieren wir die beiden rechtsstehenden Gleichungen miteinander, so erhalten wir $1 = b(2b + 1)$, gleichbedeutend zu $2 \cdot b^2 + b - 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung ermitteln wir mit der bekannten Lösungsformel: $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Wenn es also Lösungen für *a* und *b* gibt, muss *b* einen dieser beiden Werte annehmen.

Außerdem erhalten wir aus den Gleichungen zu den Nullstellen:

$$-(2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-a}{b}$$

Es sei nun $b = \frac{1}{2}$, dann folgt daraus $-(2a + 1) = -2a$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Es sei deshalb $b = -1$, also $-(2a + 1) = a$. Diese Gleichung ist nur für $a = -\frac{1}{3}$ erfüllt.

Nun müssen wir mit diesen Parametern für die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Nullstellen ermitteln und prüfen, dass diese zueinander wie in der behaupteten Beziehung stehen:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{37}}{6}$$
$$g(x) = x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{3,4} = -\frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Wir überzeugen uns noch, dass x_3 der reziproke Wert von x_1 ist:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1 - \sqrt{37}}{6}} = \frac{6 \cdot \left(1 + \sqrt{37}\right)}{\left(1 - \sqrt{37}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{37}\right)} = \frac{6 \cdot \left(1 + \sqrt{37}\right)}{-36} = -\frac{1 + \sqrt{37}}{6} = x_3$$

In gleicher Weise können wir zeigen, dass auch x_4 der reziproke Wert von x_2 ist.
❑

Aufgabe 4 – MO551014.

a) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$. Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1), p(2), p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

Die Teilaufgabe (a) lädt dazu ein, sich mit der gegebenen quadratischen Funktion auseinanderzusetzen und erfolgreich erste Bewertungspunkte zu erhalten. Auch wenn die Aufgabe insgesamt schwierig erscheinen sollte – diesen einführenden Teil sollte man immer bearbeiten!

Lösungshinweise zu Teil a) Mit $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ gilt

$$p(x) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + (2{,}5 + 0{,}5) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 3.$$

Damit ergeben sich durch Einsetzen der geforderten Argumente jeweils die ganzzahligen Werte: $p(1) = 6,\ p(2) = 14,\ p(3) = 27$ und $p(11) = 311$.

Teil b) Aus den beiden Bedingungen ergibt sich (indem wir die Argumente 0 bzw. –1 einsetzen), dass sowohl $a + b = p(0)$ als auch $2 \cdot a = p(-1)$ ganze Zahlen sind.

Ist a selbst eine ganze Zahl, so ist wegen der ersten Bedingung auch b eine ganze Zahl und die Behauptung folgt unmittelbar.

Ist a keine ganze Zahl, so können wir eine ganze Zahl a' mit $a = a' + ½$ wählen. Werten wir noch einmal die erste Bedingung aus, so gibt es auch eine ganze Zahl b' mit $b = b' – ½$. In diesem Fall gilt

$$p(x) = a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b') + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x).$$

Für eine ganze Zahl x ist aber $a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b')$ eine ganze Zahl. Zudem ist $x^2 - x = x \cdot (x - 1)$ eine gerade ganze Zahl, also ist auch der letzte Summand von $p(x)$ eine ganze Zahl und die Behauptung folgt auch hier unmittelbar. ❑

Aufgabe 5. Man bestimme alle quadratischen Funktionen $f(x) = x^2 - px + q$ mit Primzahlen p und q, die eine Primzahl als Nullstelle haben.

Lösungshinweise: Sind x_1 und x_2 die Nullstellen von $f(x)$, so gilt nach dem Wurzelsatz von VIETA $x_1 \cdot x_2 = q$. Somit erhalten wir unmittelbar $x_1 = q$ und $x_2 = 1$. Also finden wir wegen $x_1 + x_2 = p$ die Gleichung $q + 1 = p$. Diese ist aber nur für $q = 2$ und $p = 3$ erfüllbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabenstellung lässt sich auf Polynome $P(x) = x^n - px + q$ mit natürlichen Zahlen $n > 0$ verallgemeinern.