Aufgaben zum Thema 04 – Flächenberechnung (III)

Aufgabe 04-1a – MO371046. Axel zeichnet ein Dreieck ABC und eine zu AB parallele Gerade, die AC in F und BC in E schneidet, auf AB legt er einen Punkt D fest. Er beginnt, die Flächeninhalte der Dreiecke ADF, DBE, DEF und FEC auszumessen. Ingrid behauptet, dass sie den Flächeninhalt des Dreiecks DEF eindeutig durch Berechnung ermitteln könne, wenn ihr die Flächeninhalte der Dreiecke ADF, DBE und FEC bekannt seien.

Wie könnte Ingrid vorgehen? Welche Begründung müsste sie für ihr Vorgehen angeben?

Aufgabe 04-2a - MO530945. Im Dreieck ABC sind im Inneren der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt P, im Inneren der Seite $\overline{AC}$ ein Punkt Q und im Inneren der Seite $\overline{AB}$ ein Punkt R so gegeben, dass die Gerade PQ parallel zur Geraden AB verläuft. Weiter führen wir die Bezeichnungen $F(ARQ) = F_1$, $F(BPR) = F_2$ und $F(CQP) = F_3 = x$ für die Flächeninhalte dieser Teildreiecke ein.

Bestimmen Sie eine Formel für $F = F(ABC)$ in Abhängigkeit von x, wenn bekannt ist, dass $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ gilt (ohne auf die in den Lösungshinweisen zur Aufgabe MO370923 angegebenen Formel direkt zuzugreifen).

Aufgabe 04-3a – MO470933. Gegeben sind ein Dreieck ABC sowie eine Parallele g zur Seite $\overline{AB}$, welche die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Inneren in den Punkten G bzw. F schneidet. Weiter schneide die Parallele zu $\overline{AC}$ durch F die Seite $\overline{AB}$ in E und die Parallele zu $\overline{BC}$ durch G die Seite $\overline{AB}$ in D. Dabei möge g so gewählt sein, dass D auf der Strecke $\overline{AE}$ liegt.

a) Wie muss man g wählen, damit die Dreiecke ADG, BFE und CGF flächengleich sind?
b) Wie muss man g wählen, damit die Fläche des Vierecks $DEFG$ maximal wird?

Aufgabe 04-4a – MO580923. Auf ein Quadrat $JKLM$ mit der Seitenlänge a wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ mit der Seitenlänge b aufgesetzt, wobei N auf der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es gelte $|LN| = 16$ cm und $|JP| = 80$ cm. Die Strecken $\overline{JO}$ und $\overline{MN}$ schneiden sich in einem Punkt S.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen a und b.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks JSP.
c) Zeigen Sie, dass S auf der Strecke $\overline{KP}$ liegt.

Aufgabe 04-5a – MO580946. Auf ein Quadrat $JKLM$ wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ so außen aufgesetzt, dass der Punkt N im Inneren der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es sei H der Schnittpunkt der Geraden KO und ML.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf ist.

Aufgaben zum Thema 05 – Quadratische Funktionen

Aufgabe 05-1a – MO470934. Eine quadratische Funktion f sei durch die Funktionsvorschrift $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gegeben, wobei a, b, c reelle Zahlen sind und $a \neq 0$ gilt. Außerdem habe f die Eigenschaft

$$f(1) \cdot f(-1) \leq (a-c)^2 \qquad (1)$$

Beweisen Sie:

a) Bedingung (1) ist äquivalent zu $0 \leq b^2 - 4ac$.

b) Bedingung (1) gilt genau dann, wenn die Summe $ax^2 + bx + c$ als ein Produkt $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit noch zu bestimmenden reellen Zahlen x_1 und x_2 geschrieben werden kann.

Hinweis: Die Formulierungen lassen auf den Zusammenhang zwischen der Diskriminante und den Nullstellen schließen.

Aufgabe 05-2a – MO490944. Bestimmen Sie alle Paare $(a;\ b)$ positiver ganzer Zahlen mit $a < b$, für welche die quadratischen Terme $x^2 + ax + b$ und $x^2 + bx + a$ beide als Produkte linearer Terme mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden können.

Hinweis: Der Term $3x + \frac{1}{2}$ ist linear, aber nicht alle seine Koeffizienten sind ganzzahlig.

Aufgabe 05-3a – MO501043. Es sei M die Menge der ganzen Zahlen z mit $2011 < z < 501043$. Drei Zahlen a, b und c werden unabhängig voneinander zufällig aus der Menge M gewählt. Bei jeder dieser drei Wahlen seien alle Elemente von M gleich wahrscheinlich. Dadurch kann natürlich auch zwei- oder dreimal das gleiche Element von M gewählt werden. Wir betrachten die Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (1)$$

und bezeichnen mit P, Q und R die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass diese Gleichung keine, genau eine bzw. zwei verschiedene reelle Lösungen hat.

Beweisen Sie, dass $Q < P < R$ gilt.

Hinweis: Da die Existenz der Lösungen von der Diskriminante abhängt, in der alle drei Koeffizienten auftreten, ist deren Untersuchung ein erfolgsversprechender Lösungsansatz.

Aufgabe 05-4a – MO510934. Finden Sie alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen, für die gilt: $x^2 - 2 \cdot x - y^2 + 46 = 0$.

Hinweis: Suchen wir die Lösungen der quadratische Gleichung für x genügt es offenbar, die zugehörige Diskriminante auf ganzzahlige Werte zu untersuchen.