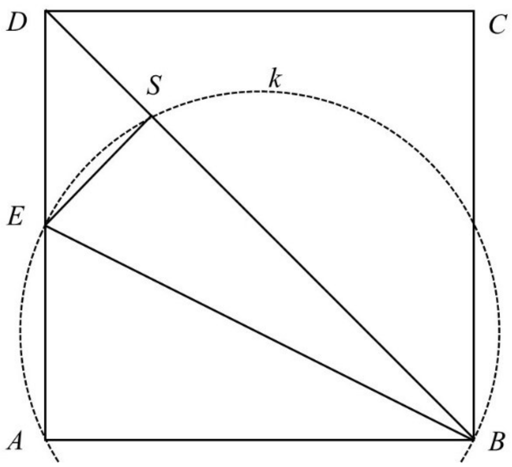
Thema 04: Flächenberechnung (III)

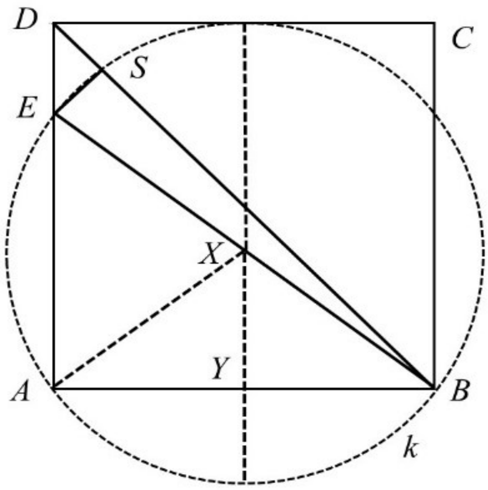
Vorbemerkungen: Ein wesentliches Motiv für eine intensive Nachbereitung aktueller MO-Aufgaben besteht darin, die Auswahl von Lösungsstrategien zu erhöhen oder zu festigen, um im Wettbewerb zielgerichtet geeignete Lösungsansätze verfügbar zu haben. Zudem gibt es immer wieder einmal Aufgaben, deren Aufgabenidee (in abgewandelter Form) erneut erscheint. Zur Landesrunde der 60. MO konnten wir dies wieder einmal beobachten:

Aufgabe MO601023. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es sei E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in S.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBS.



Aufgabe 1 – MO600932. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Ferner sei E ein Punkt auf der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ sei ein Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneide die Diagonale $\overline{BD}$ in einem von B verschiedenen Punkt S und berühre die Quadratseite $\overline{CD}$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AE}$ und den Flächeninhalt des Dreiecks EBS.



Lösungshinweise: Die Ähnlichkeit des Aufgabentextes und die der zugehörigen Skizzen lässt vermuten, dass auch der Lösungsansatz ähnlich sein wird. Tatsächlich werden wir die neue Aufgabe leicht lösen können, wenn wir die Länge der Strecke $\overline{ED}$ ermitteln (was durch die Aufgabenstellung explizit für die Strecke $\overline{AE}$ gefordert wird). Dann können wir die Argumentation aus der Aufgabe MO601032 übernehmen: Das Dreieck DES ist rechtwinklig-gleichschenklig und das Dreieck BSE ist wegen des THALES-Satzes rechtwinklig. Somit können wir die Längen $\overline{ES}$ und $\overline{BS}$ explizit bestimmen.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Kreises k mit X und den Mittelpunkt der Quadratseite $\overline{AB}$ mit Y. Wenden wir im rechtwinkligen Dreieck AYX den Satz des PYTHAGORAS mit der Hypotenuse $\overline{AX} = r$ und der Kathete $\overline{XY} = x$ an, so gilt

$r^2 - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Wegen $r + x = 1$ (Länge der Quadratseite) folgt daraus unmittelbar

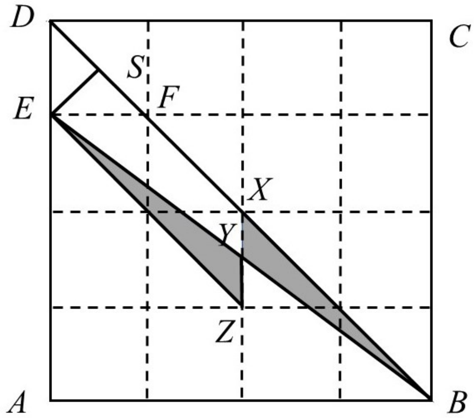
$$r^2 - x^2 = (r - x) \cdot (r + x) = r - x = \frac{1}{4}$$

Addieren wir auf beiden Seiten der rechten Gleichung r, so finden wir (wieder unter Verwendung von $r + x = 1$) $2r = \frac{5}{4}$. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS auf das rechtwinklige Dreieck ABE mit der Hypotenuse $\overline{BE} = 2r$ und der Kathete $|AB| = 1$ an, so erhalten wir

$$|AE| = \sqrt{4r^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \text{ also } |ED| = \frac{1}{4}.$$

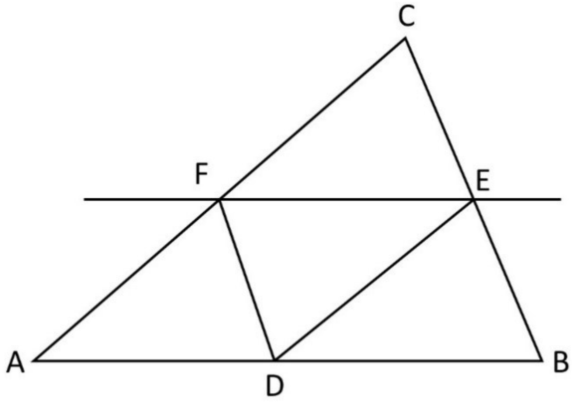
Aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck DES erhalten wir $|ES| = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ und $|BS| = |BD| - |SD| = |BD| - |ES| = \sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}$. Somit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks BSE:

$$A_{BSE} = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |ES| = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{64}$$ ❑



Lösungsvariante: Aber auch der Lösungsansatz über eine Flächenzerlegung[1] gelingt, wenn das Zwischenergebnis $|ED| = \frac{1}{4}$ bekannt ist. Dafür bietet sich ein 4 x 4 – Gitter an, in dem insgesamt 64 Teilflächen der Größe des Dreiecks *EFS* enthalten sind. Es fällt uns nun leicht, die Flächengleichheit der beiden grau hinterlegten Dreiecke *EZY* und *BXY* nachzuweisen. Dann überdeckt das Trapez *EZXS* insgesamt 7 solche Teilflächen – flächengleich zum Dreieck *BSE*. Also beträgt die gesuchte Fläche $\frac{7}{64}$. ❑

Solche Aufgaben-"Paare" finden wir in der MO-Geschichte immer wieder einmal, manchmal auch Jahre auseinander:



Aufgabe 2 – MO370946: Von einer Figur (s. Skizze) sei bekannt:

- Die Gerade durch E und F ist parallel zu der Geraden durch A und B.
- Der Flächeninhalt des Dreiecks FEC beträgt 40 cm², die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ADF und DBE beträgt 150 cm².

---

[1] vergleiche Thema 04 – Flächenberechnung, Teil II

Stellen Sie fest, ob aus diesen Angaben der Flächeninhalt des Dreiecks *DEF* eindeutig folgt und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Flächeninhalt.

Lösungshinweise: Weil die Gerade durch *A* und *B* parallel zur Geraden durch *E* und *F* ist, haben die Dreiecke *ADF*, *DBE* und *DEF* die gleiche Höhe. Der Flächeninhalt des Dreiecks *DEF* sei *x*. Dann gilt aufgrund der Flächenformel eines Dreiecks

$$x : 150 = |EF| : |AB|$$

Außerdem gilt (mit Bezug zur Höhe des Dreiecks *ABC* auf der Seite $\overline{AB}$)

$$(x+40) : (x+190) = |EF| : |AB|$$

also

$$x : 150 = (x+40) : (x+190)$$

bzw.

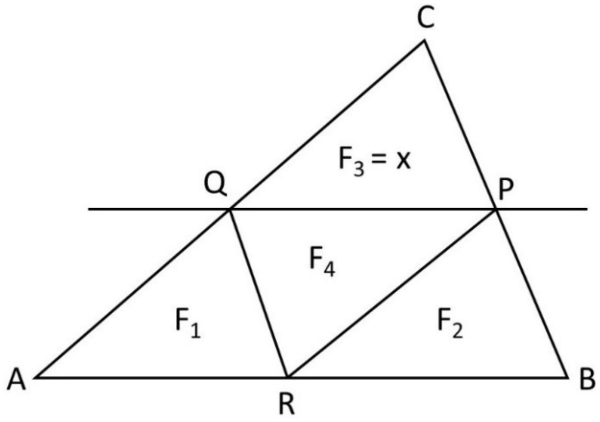
$$x^2 + 40 \cdot x - 6000 = 0$$

Diese quadratische Gleichung ist gleichbedeutend zu $(x+100)\cdot(x-60) = 0$. Somit finden wir $A_{DEF} = 60$ cm² (diesen Wert erhalten wir natürlich auch aus der quadratischen Gleichung unter Benutzung der Lösungsformel). ❑

Die entsprechende Aufgabe für die Klassenstufe 10 ist eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe, wurde aber ohne Skizze gestellt. Damit wird der Zusammenhang beider Aufgaben erst deutlich, wenn eine passende Skizze angefertigt wird.

Aufgabe – MO371046. Axel zeichnet ein Dreieck *ABC* und eine zu *AB* parallele Gerade, die *AC* in *F* und *BC* in *E* schneidet, auf *AB* legt er einen Punkt *D* fest. Er beginnt, die Flächeninhalte der Dreiecke *ADF*, *DBE*, *DEF* und *FEC* auszumessen. Ingrid behauptet, dass sie den Flächeninhalt des Dreiecks *DEF* eindeutig durch Berechnung ermitteln könne, wenn ihr die Flächeninhalte der Dreiecke *ADF*, *DBE* und *FEC* bekannt seien. Wie könnte Ingrid vorgehen? Welche Begründung müsste sie für ihr Vorgehen angeben?

Aufgabe 3 - MO530945. Im Dreieck *ABC* sind im Inneren der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt *P*, im Inneren der Seite $\overline{AC}$ ein Punkt *Q* und im Inneren der Seite $\overline{AB}$ ein Punkt *R* so gegeben, dass die Gerade *PQ* parallel zur Geraden *AB* verläuft. Weiter führen wir die Bezeichnungen $F(ARQ) = F_1$, $F(BPR) = F_2$ und $F(CQP) = F_3 = x$ für die Flächeninhalte dieser Teildreiecke ein.



Bestimmen Sie eine Formel für $F = F(ABC)$ in Abhängigkeit von *x*, wenn bekannt ist, dass $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ gilt.

Lösungshinweise: Fertigen wir die zur Aufgabe passende Skizze an, erkennen wir den Zusammenhang zur vorigen Aufgabe. Natürlich lässt sich die Aufgabe auch ohne den speziellen Lösungsansatzes des Vorgängers lösen, doch wenn wir die Gleichung $x : 150 = (x + 40) : (x + 190)$ auf die nun gegebenen Größen anwenden, erhalten wir

$$F_4 : (F_1 + F_2) = (F_4 + F_3) : (F_4 + F_1 + F_2 + F_3)$$

Dies Gleichung vereinfacht sich, wenn wir die Voraussetzung $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ einsetzen

$$F_4 : (6 \cdot F_3) = (F_4 + F_3) : (F_4 + 7 \cdot F_3)$$

Substituieren wir zur Vereinfachung der Schreibweise $F_4 = y$, so können wir die Gleichung umformen zu $y^2 + x \cdot y - 6 \cdot x^2 = 0$. Entweder aus der Lösungsformel für die quadratische Gleichung für die Variable y oder aus der Zerlegung in Linearfaktoren $(y - 2 \cdot x) \cdot (y + 3 \cdot x) = 0$ finden wir $y = 2 \cdot x$. Dann gilt aber

$$F(ABC) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 6 \cdot F_3 + F_3 + 2 \cdot F_3 = 9 \cdot F_3 = 9 \cdot x \quad \square$$

Zwischenzeitlich kehrte dieser Aufgabentyp etwas abgewandelt bereits zurück. Auch hier geht es um die Zerlegung der Dreiecksfläche in vier Teilflächen:

Aufgabe MO470933. Gegeben sind ein Dreieck *ABC* sowie eine Parallele *g* zur Seite $\overline{AB}$, welche die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Inneren in den Punkten *G* bzw. *F* schneidet. Weiter schneide die Parallele zu $\overline{AC}$ durch *F* die Seite $\overline{AB}$ in *E* und die Parallele zu $\overline{BC}$ durch *G* die Seite $\overline{AB}$ in *D*. Dabei möge *g* so gewählt sein, dass *D* auf der Strecke $\overline{AE}$ liegt.

a) Wie muss man *g* wählen, damit die Dreiecke *ADG*, *BFE* und *CGF* flächengleich sind?
b) Wie muss man *g* wählen, damit die Fläche des Vierecks *DEFG* maximal wird?

Abschließend vergleichen wir das folgende Aufgaben-Paar:

Aufgabe – MO580923. Auf ein Quadrat *JKLM* mit der Seitenlänge *a* wird ein kleineres Quadrat *MNOP* mit der Seitenlänge *b* aufgesetzt, wobei *N* auf der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es gelte $|LN| = 16$ cm und $|JP| = 80$ cm. Die Strecken $\overline{JO}$ und $\overline{MN}$ schneiden sich in einem Punkt *S*.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen *a* und *b*.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *JSP*.
c) Zeigen Sie, dass *S* auf der Strecke $\overline{KP}$ liegt.

Aufgabe – MO580946. Auf ein Quadrat *JKLM* wird ein kleineres Quadrat *MNOP* so außen aufgesetzt, dass der Punkt *N* im Inneren der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es sei *H* der Schnittpunkt der Geraden *KO* und *ML*.
Zeigen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf ist.