Aufgaben Serie 6 (2020/21)

Aufgabe 6-1. Gesucht sind alle echt vierstelligen natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von n durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen a und b entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von a und b gleich n.

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt „echt n-stellig“, wenn die erste (linke) Ziffer in der n-stelligen Dezimaldarstellung ungleich Null ist.

Aufgabe 6-2. Beweisen sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.

Aufgabe 6-3. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27.$$

Aufgabe 6-4. Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a, b, c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Aufgabe 6-5A. Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 2$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

Aufgabe 6-5B. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.