## Aufgaben Serie 4 (2020/21)

**Aufgabe 4-1.** Bestimmen Sie die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

**Aufgabe 4-2.** Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form 2p + 1, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

**Aufgabe 4-3.** Bestimmen Sie alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

**Aufgabe 4-4**. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)=6\cdot xy-y^2$$

**Aufgabe 4-5A**

(a) Entscheiden Sie, ob die Zahl $x=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+.....+2020}}}$ rational oder irrational ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für beliebige natürliche Zahlen *x* und *y* sei $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$ . Zeigen Sie, dass es

- unendlich viele Paare (*x* ; *y*) gibt, so dass *z* rational ist.
- unendlich viele Paare (*x* ; *y*) gibt, so dass *z* irrational ist.

(c) Untersuchen Sie, ob es positive rationale Zahlen *t* gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen *t* gibt, geben Sie an, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen *t* gibt.

**Aufgabe 4-5B.** Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Zeigen Sie, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(b) Beweisen Sie: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt.

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt?