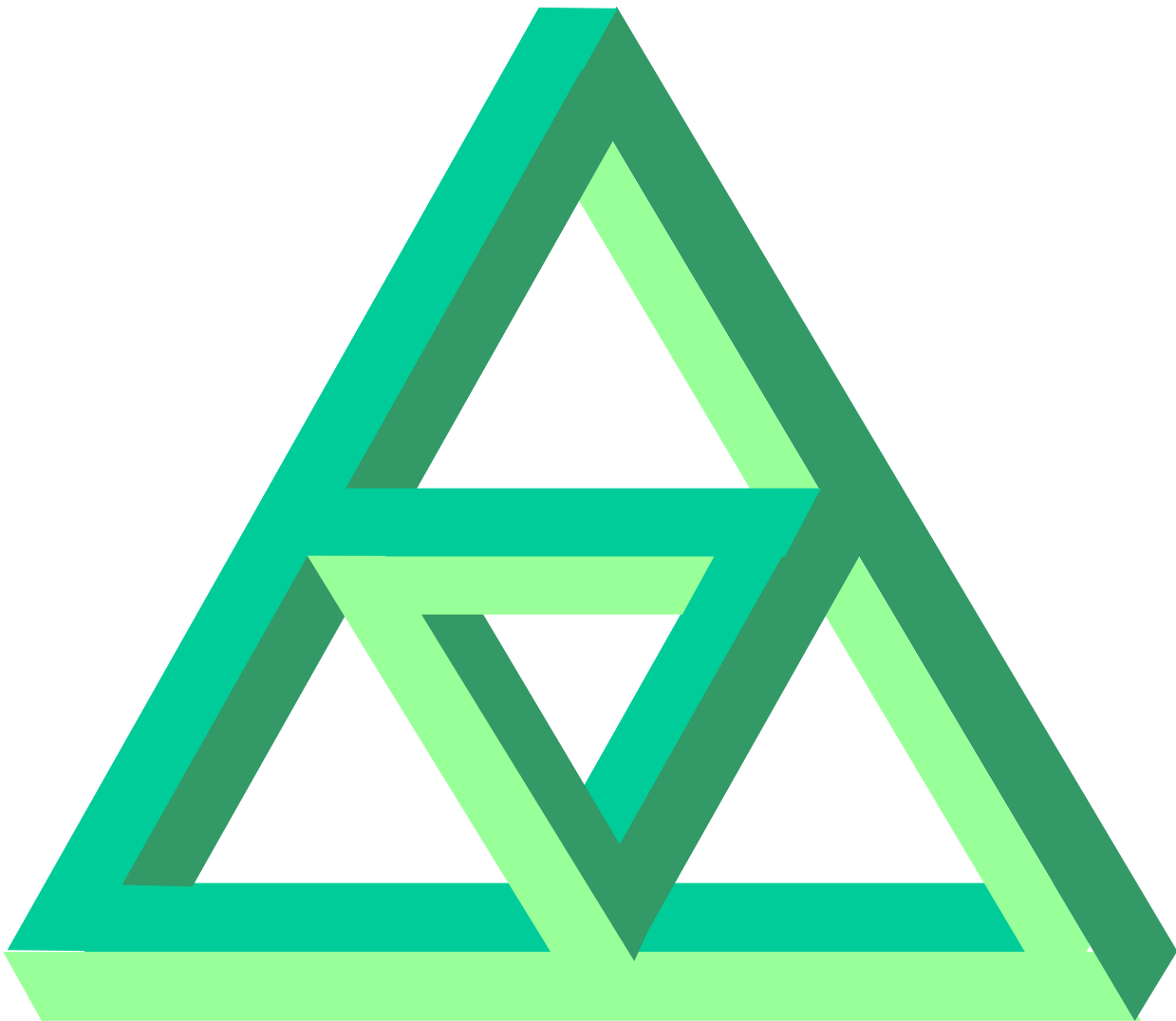


# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

---



## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben<sup>1</sup> thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10<sup>2</sup> haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Aufgaben **MO630933/MO631033** zeigt sich, dass die sehr ausführliche offizielle Lösungsdiskussion zur Thematik „Geometrische Örter“ (s. Heft 11/2023) nun eine Fortsetzung fand. Die Diskussion ähnlicher Aufgabenstellungen in der Nachbereitung der Aufgabe **MO631015** führte uns bereits auf die aktuelle Aufgabenstellung. Auch dieses Mal ist es bemerkenswert, wie vielfältig die Lösungsdiskussion geführt wird.

Auch für die Aufgaben **MO630936/MO631036** finden wir in den MO-Aufgabensammlungen vergleichbare Fragestellung, mit denen wir die Lösungsstrategien üben können. Interessant erscheint hierbei die Mischung von systematischem Probieren und allgemeinen Lösungsansatz für eine erfolgreiche Bearbeitung.

Aus der Vielfalt der mathematischen Wettbewerbe wird in diesem Heft die Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen (EGMO) vorgestellt.

---

<sup>1</sup> [www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de)

<sup>2</sup> [https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no\\_cache=1](https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1)

## Thema 26.2 – Geometrische Örter

**Aufgabe 26.7 – MO630933/MO631033.** In einer Ebene ist ein gleichseitiges Dreieck  $\triangle ABC$  mit Mittelpunkt  $M$  gegeben.

Bestimmen Sie alle Punkte  $P$  der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}|$$

minimal wird.

*Hinweis:* Im Heft 11 (November 2023) wurde in der Nachbereitung der 1. Runde der 63. MO folgende Aufgabe formuliert:

**Aufgabe 26.4.** Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck genau einen Punkt mit minimaler Abstandssumme zu den Eckpunkten des Dreiecks gibt.

In den Lösungshinweisen wurde der Mittelpunkt  $M$  (als Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks  $\triangle ABC$ ) als der gesuchte geometrische Ort nachgewiesen. Wegen

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}|$$

ergibt sich die aktuelle MO-Aufgabe als einfache Folgerung.

*Antwort zu Aufgabe 26.07:* Die Abstandssumme wird genau dann minimal, wenn  $P$  der Mittelpunkt  $M$  ist; in diesem Fall beträgt sie  $m = |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}|$ .

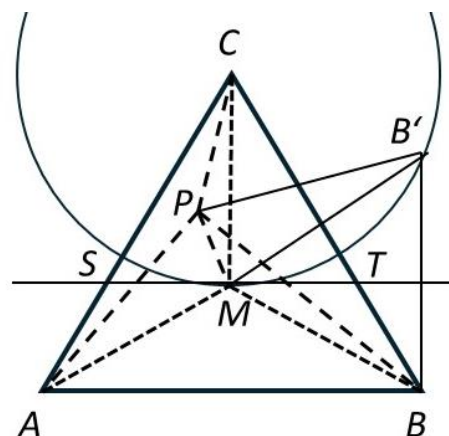
*Lösungshinweise – Variante 1:* Für diesen Beweis nehmen wir an, dass wir einen Punkt  $P$  gefunden haben, für den die Abstandssumme  $m$  nicht übersteigt, also

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \leq m.$$

Zunächst erkennen wir, dass eine der Ungleichungen  $|\overline{AP}| \leq |\overline{AM}|$ ,  $|\overline{BP}| \leq |\overline{BM}|$  oder  $|\overline{CP}| \leq |\overline{CM}|$  gelten muss, da ansonsten

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}| = m$$

im Widerspruch zur Annahme wäre. O.B.d.A., aufgrund der Symmetrie, gelte  $|\overline{CP}| \leq |\overline{CM}|$ . Dann liegt  $P$  im Inneren oder auf dem Rand des Kreises  $k$  um  $C$ , der durch  $M$  verläuft. Die Tangente an  $k$  im Punkt  $M$  sei  $t$ . Aufgrund der Symmetrie ist dann  $t$  parallel zur Geraden  $AB$ , wobei  $B$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $t$  liegen. Das Bild unter der Spiegelung von  $B$  an  $t$  sei  $B'$ . Da  $t$  die Mittelsenkrechte zur Strecke  $\overline{BB'}$  ist und  $P$  auf derselben Seite von  $t$  liegt wie  $B'$ , folgt  $|\overline{BP}| \geq |\overline{PB'}|$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $P$  auf  $t$  liegt, was nur für  $P = M$  der Fall ist. Wegen der Dreiecksungleichung im Dreieck  $\triangle AB'P$  folgt



$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{B'P}| > |\overline{AB'}|$$

Bezeichnen  $S$  und  $T$  den jeweiligen Schnittpunkt von  $t$  mit den Geraden  $AC$  und  $BC$ , so gilt wegen Symmetrie und Wechselwinkelsatz

$$|\angle SMA| = |\angle BAM| = 30^\circ = |\angle MBA| = |\angle BMT| = |\angle TMB'|$$

Da  $M$  zwischen  $S$  und  $T$  auf der Geraden  $ST$  liegt und  $|\angle SMA| = |\angle TMB'|$  gilt, liegt  $M$  auch zwischen  $A$  und  $B'$  auf der Geraden  $AB'$ . Mit (2) folgt

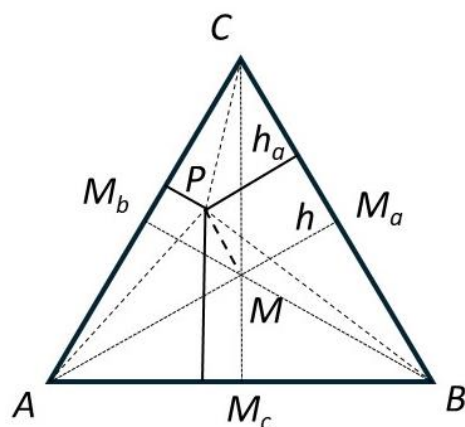
$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{B'P}| > |\overline{AB'}| = |\overline{AM}| + |\overline{B'M}| = |\overline{AM}| + |\overline{BM}|$$

Gleichheit gilt hier wieder genau im Fall  $P = M$ . Addieren wir zur Ungleichung (3) die Dreiecksungleichung  $|\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{CM}|$ , so erhalten wir

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AM}| + |\overline{BM}| + |\overline{CM}| = m$$

Gleichheit gilt genau für  $P = M$ . □

*Lösungshinweise – Variante 2:* Wir bezeichnen mit  $M_a, M_b$  und  $M_c$  jeweils den Mittelpunkt der Seite  $\overline{BC}, \overline{CA}$  bzw.  $\overline{AB}$  und mit  $h$  die Länge der drei gleich langen Höhen des gleichseitigen Dreiecks  $\triangle ABC$ . Weiter seien  $h_a, h_b$  und  $h_c$  die Abstände von  $P$  zu den jeweiligen Geraden  $BC, CA$  und  $AB$ . Offenbar gilt  $|\overline{AP}| + h_a \geq h$ , da die (einzige) kürzeste Verbindung von  $A$  zur Geraden  $BC$  die entsprechende Höhe  $\overline{AM_a}$  ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn  $P$  auf der Strecke  $\overline{AM_a}$  liegt.



Also gilt  $|\overline{AP}| \geq h - h_a$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $P$  auf der Strecke  $\overline{AM_a}$  liegt. Analog gilt  $|\overline{BP}| \geq h - h_b$  und  $|\overline{CP}| \geq h - h_c$ , wobei Gleichheit jeweils dann eintritt, wenn  $P$  auf der Strecke  $\overline{BM_b}$  bzw.  $\overline{CM_c}$  liegt. Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq 3 \cdot h - (h_a + h_b + h_c)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $P$  der Schnittpunkt der drei Höhen  $\overline{AM_a}, \overline{BM_b}$  und  $\overline{CM_c}$  ist, was  $P = M$  entspricht.

Wir betrachten zunächst Punkte  $P$ , die im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen. Es bezeichne  $s$  die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks  $\triangle ABC$  und  $F$  den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Da die Dreiecke  $\triangle BCP, \triangle CAP$  und  $\triangle ABP$  jeweils eine Seite  $\overline{BC}, \overline{CA}$  bzw.  $\overline{AB}$  der Länge  $s$  mit zugehöriger Höhe  $h_a, h_b$  bzw.  $h_c$  haben und diese Dreiecke das Dreieck  $\triangle ABC$  zerlegen, gilt

$$\frac{1}{2} \cdot (h_a + h_b + h_c) \cdot s = F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

und damit  $h_a + h_b + h_c = h$ . (Für Punkte  $P$  auf dem Rand des Dreiecks  $\Delta ABC$  entarten bis zu zwei dieser Dreiecke und die entsprechenden Höhen haben die Länge null.) Zusammen mit (4) ergibt sich die Ungleichungskette

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq 3 \cdot h - (h_a + h_b + h_c) = 2h = m$$

mit Gleichheit genau für  $P = M$ .

Sei nun  $P$  ein Punkt außerhalb des Dreiecks  $\Delta ABC$ . Das Dreieck  $\Delta ABC$  ergibt sich als Durchschnitt von drei Halbebenen, die von den Trägergeraden der drei Dreiecksseiten gebildet werden.  $P$  und das Dreieck liegen also auf verschiedenen Seiten von einer dieser Trägergeraden und wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $P$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AB$  liegen. Es ist  $M_c$  der Mittelpunkt von  $\overline{AB}$  und nach Dreiecksungleichung gilt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| > |\overline{AB}| = |\overline{AM_c}| + |\overline{BM_c}|$$

und  $|\overline{CP}| > |\overline{CM_c}|$ , da der Winkel bei  $M_c$  im Dreieck  $\Delta CM_cP$  stumpf ist und im Dreieck dem größeren Winkel die längere Dreiecksseite gegenüberliegt. Es gibt in diesem Fall also einen Punkt  $M_c$  auf dem Rand des Dreiecks  $\Delta ABC$ , für den

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| > |\overline{AM_c}| + |\overline{BM_c}| + |\overline{CM_c}| \geq m$$

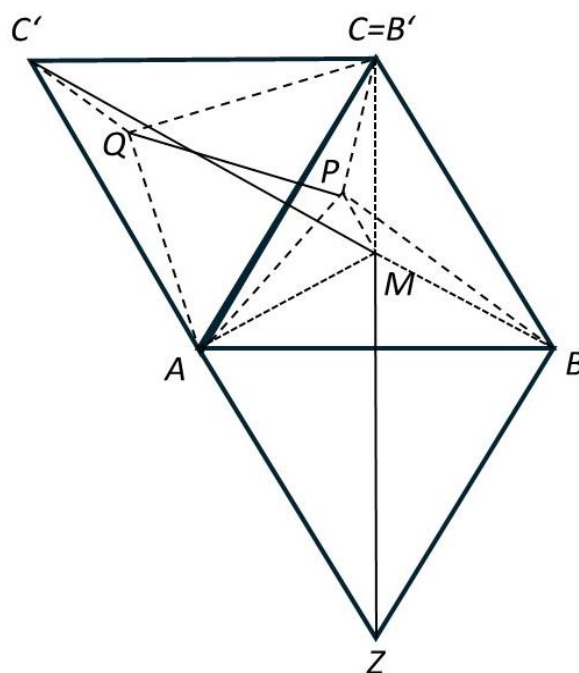
gilt. Der letzte Teil der Ungleichung folgt aus dem ersten Teil der Argumentation.

*Lösungshinweise – Variante 3:* Eine  $60^\circ$ -Drehung um den Punkt  $A$  überführt den Punkt  $B$  in den Punkt  $C$ . Es bezeichne  $D$  das Bild von  $C$  und  $Q$  das Bild von  $P$  unter dieser Drehung. Der Punkt  $Z$  sei so gewählt, dass er unter der  $60^\circ$ -Drehung auf  $B$  abgebildet wird.

Es gilt dann insbesondere  $|\overline{CP}| = |\overline{QD}|$ , und das Dreieck  $\Delta APQ$  ist gleichseitig mit  $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| &= \\ |\overline{BP}| + |\overline{PQ}| + |\overline{QD}| &\geq |\overline{BD}| \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $B, P, Q$  und  $D$  in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Beachten wir dabei, dass die  $60^\circ$ -Drehung um den Punkt  $A$  den Punkt



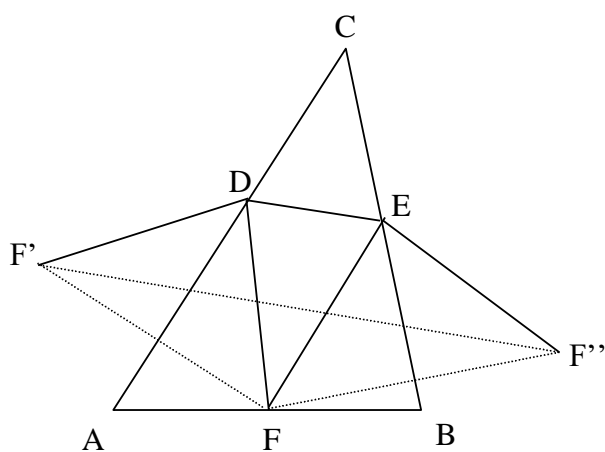
$P$  auf  $Q$  und die Strecke  $\overline{ZC}$  auf  $\overline{BD}$  abbildet, so folgt, dass  $Q$  genau dann auf der Strecke  $\overline{BD}$  liegt, wenn  $P$  auf der Strecke  $\overline{ZC}$  liegt. Gleichheit kann in (5) somit nur dann eintreten, wenn  $P$  der Schnittpunkt der Strecken  $\overline{ZC}$  und  $\overline{BD}$  ist. In diesem Fall liegt  $P$  im Inneren des Dreiecks  $\triangle ABC$  und  $Q$  im Inneren des Dreiecks  $\triangle ACD$ , womit die Punkte  $B, P, Q$  und  $D$  tatsächlich in der erforderlichen Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Aufgrund der  $60^\circ$ -Drehung sind die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ACD$  gleichseitig und kongruent. Das Viereck  $ABCD$  ist damit ein Rhombus und  $\overline{BD}$  ist die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{AC}$ .

Völlig analog ist  $\overline{ZC}$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{AB}$ . Gleichheit tritt in (5) somit genau dann ein, wenn  $P$  der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  ist, also wenn  $P = M$  gilt. Abschließend folgt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{MP}| \geq |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{BD}|,$$

wieder mit Gleichheit genau dann, wenn  $P = M$ . □

**Aufgabe 26.8 – Das Problem von Fagnano.** Im Jahre 1775 stellte GIOVANNI FAGNANO (1715 bis 1797):



Einem spitzwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$  ist ein Dreieck  $\triangle DEF$  mit minimalem Umfang einzubeschreiben, wobei auf jeder Dreiecksseite des Dreiecks  $\triangle ABC$  eine Ecke des Dreiecks  $\triangle DEF$  liegt.

*Lösungshinweise:* Wir legen einen Punkt  $F$  beliebig auf  $\overline{AB}$  fest und suchen Punkte  $D$  und  $E$  auf  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  so, dass das Dreieck  $\triangle DEF$  minimalen Umfang besitzt.

Zunächst wählen wir beliebige Punkte  $D$  und  $E$ . Den Umfang des Dreiecks  $\triangle DEF$  erhalten wir als Streckenzug  $F'DEF''$ , wobei  $F'$  und  $F''$  die Spiegelpunkte vom Punkt  $F$  an den Seiten  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  sind. Wir finden also zu einem fest auf der Seite  $\overline{AB}$  gewählten Punkt  $F$  ein Dreieck  $\triangle DEF$  mit minimalem Umfang, wenn die Punkte  $D$  und  $E$  auf der Strecke  $F'F''$  liegen.

Dafür verwenden wir, dass das Dreieck  $\triangle F'CF''$  unabhängig von der Lage des Punktes  $F$  gleichschenkelig mit dem Winkel  $\angle F'CF'' = 2 \cdot \angle ACB$  ist. Denn (da  $F'$  und  $F''$  die Spiegelpunkte von Punkt  $F$  an den Seiten  $\overline{AC}$  bzw.  $\overline{BC}$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  sind) folgt:  $|\overline{CF'}| = |\overline{CF}| = |\overline{CF''}|$  und  $\angle F'CA = \angle ACF$  sowie  $\angle FCB = \angle BCF''$ .

Der Umfang des Dreiecks  $\triangle DEF$  wird nun umso kleiner, je kleiner die Länge der Strecke  $\overline{F'F''}$  ist. Diese wiederum wird am kleinsten, wenn die Strecke  $\overline{FC}$  am kleinsten wird. Dies tritt ein, wenn  $F$  der Fußpunkt der Höhe  $h_c$  ist. Da diese

Überlegungen auch für einen Ausgangspunkt auf den Seiten  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$  gelten, folgt als Lösung des Problems von Fagnano: Das einem spitzwinkligen Dreieck einbeschriebene Dreieck mit kleinstem Umfang ist das Höhenfußpunktdreieck.  $\square$

**Aufgabe 26.9 – MO091233.** Gegeben sei in einer Ebene  $\varepsilon$  ein Kreis  $k$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $M$ . Ein Punkt  $P'$  der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punktes  $P$  ( $P \neq M$ ) bezüglich  $k$ , wenn  $P'$  auf dem von  $M$  ausgehenden und durch  $P$  verlaufenden Strahl liegt und  $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = r^2$  ist.

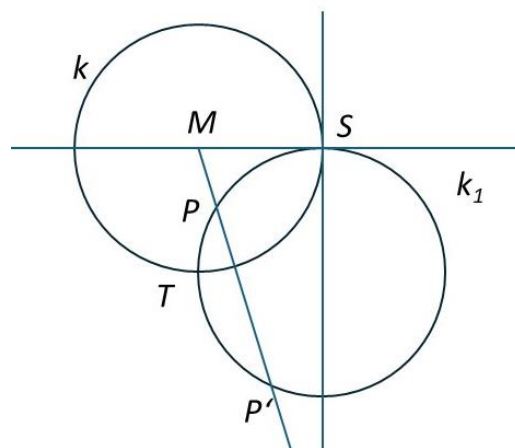
Es sei  $k_1$  ein Kreis der gleichen Ebene  $\varepsilon$ , der  $k$  orthogonal schneidet, d.h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.

Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf  $k_1$  gelegenen Punkte  $P$  bezüglich  $k$ ?

*Lösungshinweise:* Wir zeigen, dass  $k_1$  auf sich selbst abgebildet wird.

Es seien  $S$  und  $T$  die beiden Schnittpunkte von  $k$  und  $k_1$ . Dann gilt offensichtlich  $|\overline{MS}| \cdot |\overline{MS}| = r^2 = |\overline{MT}| \cdot |\overline{MT}|$ , sodass die Punkte  $S$  und  $T$  ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich  $k$  sind.

Sei nun  $P$  ein Punkt auf  $k_1$ , der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von  $M$  ausgehende Strahl durch  $P$  den Kreis  $k_1$  in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von  $M$  ausgehenden Tangenten an  $k_1$  durch  $S$  und  $T$  verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt  $P'$ . Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz<sup>3</sup> (bezogen auf  $k_1$ , die Sehne  $\overline{PP'}$  und die Tangente  $MS$ ) die Beziehung  $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MP'}| = |\overline{MS}|^2 = r^2$ , sodass jeder Punkt auf  $k_1$  wieder auf einen Punkt auf  $k_1$  abgebildet wird.



Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar: Wird sie zwei Mal angewendet, erhalten wir wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf  $k_1$  der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf  $k_1$  sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich  $k$  von Punkten auf  $k_1$  wieder genau  $k_1$  selbst ist.  $\square$

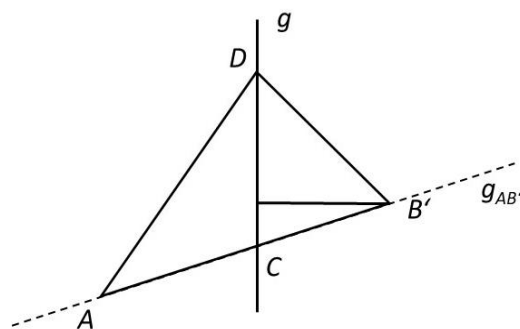
**Aufgabe 26.10 – MO091243.** Gegeben seien eine Gerade  $g$  und eine Strecke  $\overline{AB}$ , die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten  $C$  von  $g$  ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks  $\Delta ABC$  möglichst klein ist.

<sup>3</sup> s. Heft 07/2021, „Bekannte Sätze der Mathematik“, S. 20

*Lösungshinweise:* Wir betrachten die Ebene  $\varepsilon$ , in der die Gerade  $g$  und der Punkt  $A$  liegen. Wir drehen die Ebene, die  $g$  und  $B$  enthält, so um  $g$ , dass das Bild  $B'$  von  $B$  bei dieser Drehung in der Ebene  $\varepsilon$  liegt, und zwar so, dass  $B'$  und  $A$  nicht auf derselben Seite von  $g$  liegen.

Sei  $D$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $g$ . Dann gilt:  $\overline{DB} = \overline{DB'}$ . Daher gilt auch

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB'}$$



Nun ist aufgrund der Dreiecksgleichung stets  $\overline{AD} + \overline{DB'} \geq \overline{AC} + \overline{CB'}$  wobei das Gleichheitszeichen genau für  $D = C$  gilt. Damit ist der Schnittpunkt  $C$  der Strecke  $\overline{AB'}$  mit der Geraden  $g$  ein Punkt der geforderten Art und der einzige.  $\square$

## Thema 10.2 - Beschränkte und kürzbare Brüche

**Aufgabe 10.6 – MO630936/MO631036.** Wie viele rationale Zahlen  $r$  mit  $\frac{5}{2024} < r < \frac{6}{2024}$  lassen sich als Bruch mit einem positiven Nenner kleiner als 2024 darstellen?

*Lösungshinweise:* Jede positive rationale Zahl  $r$  lässt sich eindeutig als vollständig gekürzter Bruch  $r = \frac{z}{n}$  mit teilerfremden positiven ganzen Zahlen  $z$  und  $n$  darstellen, wobei dann  $n$  der kleinstmögliche positive Nenner einer Bruchdarstellung von  $r$  ist. Insbesondere lässt sich  $r$  damit genau dann als Bruch mit einem positiven Nenner kleiner als 2024 darstellen, wenn in dieser vollständig gekürzten Darstellung der Nenner  $n < 2024$  ist.

Es ist somit die Anzahl aller Paare  $(z, n)$  teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit

$$\frac{5}{2024} < \frac{z}{n} < \frac{6}{2024}$$

und  $n < 2024$  zu bestimmen. Die Ungleichungskette ist für positives  $n$  äquivalent zu  $5n < 2024z < 6n$  und damit zu

$$\frac{2024}{6}z < n < \frac{2024}{5}z$$

Daraus folgt mit  $n < 2024$  insbesondere

$$z < \frac{6}{2024}n < \frac{6}{2024} \cdot 2024 = 6$$

womit sich  $z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  als notwendige Bedingung ergibt.



Für  $z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  folgt andererseits aus den Ungleichungen

$$n < \frac{2024}{5} z \leq \frac{2024}{5} \cdot 5 = 2024$$

Es genügt somit, die Anzahl aller Paare  $(z, n)$  teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit  $z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  zu bestimmen, für die (2) erfüllt ist. Wir unterscheiden dazu die folgenden fünf Fälle.

*Fall 1:*  $z = 1$ . In diesem Fall sind laut (2) alle ganzen Zahlen  $n$  mit

$$337\frac{1}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 1 < n < \frac{2024}{5} \cdot 1 = 404\frac{4}{5}$$

also  $338 \leq n \leq 404$  zu zählen, was 67 Lösungspaare  $(1, n)$  ergibt. Wegen  $z = 1$  sind alle diese Lösungspaare teilerfremd.

*Fall 2:*  $z = 2$ . In diesem Fall sind laut (2) alle ungeraden Zahlen  $n$  mit

$$674\frac{2}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 2 < n < \frac{2024}{5} \cdot 2 = 809\frac{3}{5}$$

also  $675 \leq n \leq 809$  zu zählen. Dieses Intervall enthält 135 ganze Zahlen, von denen 67 gerade sind, was  $135 - 67 = 68$  teilerfremde Lösungspaare  $(2, n)$  ergibt.

*Fall 3:*  $z = 3$ . Es sind laut (2) alle nicht durch 3 teilbaren Zahlen  $n$  mit

$$1012 = \frac{2024}{6} \cdot 3 < n < \frac{2024}{5} \cdot 3 = 1214\frac{2}{5}$$

also  $1013 \leq n \leq 1214$  zu zählen. Dieses Intervall enthält 202 ganze Zahlen, von denen 67 durch 3 teilbar sind, was  $202 - 67 = 135$  teilerfremde Lösungspaare  $(3, n)$  ergibt.

*Fall 4:*  $z = 4$ . In diesem Fall sind alle ungeraden Zahlen  $n$  mit

$$1349\frac{1}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 4 < n < \frac{2024}{5} \cdot 4 = 1619\frac{1}{5}$$

also  $1350 \leq n \leq 1619$  zu zählen. Dieses Intervall enthält 270 ganze Zahlen, von denen 135 gerade sind, was  $270 - 135 = 135$  teilerfremde Lösungspaare  $(4, n)$  ergibt.

*Fall 5:*  $z = 5$ . Es sind alle nicht durch 5 teilbaren Zahlen  $n$  mit

$$1686\frac{2}{3} = \frac{2024}{6} \cdot 5 < n < \frac{2024}{5} \cdot 5 = 2024$$

also  $1687 \leq n \leq 2023$  zu zählen. Dieses Intervall enthält 337 ganze Zahlen, von denen 67 durch 5 teilbar sind, was  $337 - 67 = 270$  teilerfremde Lösungspaare  $(5, n)$  ergibt.

*Zusammenfassung:*  $67 + 68 + 135 + 135 + 270 = 675$  rationale Zahlen genügen der Aufgabenstellung. □

### Aufgabe 10.7 – MO500923.

- a) Der Bruch  $\frac{62}{63}$  soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die sowohl verschiedene Zähler als auch verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 63 sein.

Bestimmen Sie drei verschiedene solche Darstellungen. Dabei zählen zwei Darstellungen auch als gleich, wenn sie sich allein in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

- b) Der Bruch  $\frac{20}{21}$  soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 21 sein.

Bestimmen Sie alle solchen Darstellungen. Auch hier soll die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielen.

*Hinweis:* Ein Bruch  $b$  ist stets eine *positive* rationale Zahl. Die Darstellung  $b = \frac{p}{q}$  heißt *vollständig gekürzt*, wenn  $p > 0$  und  $q > 0$  gilt und  $p, q$  teilerfremd sind.

*Lösungshinweise zu Teil a):* Die Lösungen können wir erraten. Begründungen, wie wir auf diese gekommen sind, werden bei solcher Aufgabenstellung „Bestimmen Sie drei Beispiele ...“ nicht verlangt. Allerdings ist nachzuweisen bzw. darauf hinzuweisen, dass die Rechnungen aufgehen und die Brüche gekürzt sind.

Um Lösungen zu finden, versuchen wir, den Zähler so in eine Summe von zwei Summanden zu zerlegen  $62 = z_1 + z_2$ , dass sich jeder der Summanden mit 63 kürzen lässt. Dabei probieren wir, ob der zweite Summand  $ggT(z_2, 63) > 1$  erfüllt, wenn wir  $z_1$  mit  $ggT(z_1, 63) > 1$  wählen. Als größte gemeinsame Teiler können wegen der Primfaktorenzerlegung von 63 nur 21, 9, 7 und 3 in Frage kommen.

Diese Suche muss in der Lösungsdarstellung nicht angegeben werden, wir können sie also auf Konzeptpapier durchführen.

62 =	21+41	42+20						
62 =	9+53	18+44	<b>27+35</b>	36+26	45+17	54+8		
62 =	7+55	<b>14+48</b>	21+41	28+34	<b>35+27</b>	42+20	49+13	<b>56+6</b>

Die fettmarkierten Zerlegungen erfüllen die Anforderungen und wir haben damit drei verschiedene Beispiele gefunden:

$$\frac{62}{63} = \frac{3}{7} + \frac{5}{9} = \frac{2}{9} + \frac{16}{21} = \frac{5}{9} + \frac{3}{7} = \frac{8}{9} + \frac{3}{21}$$

Wir wollen hier die systematische Suche noch formalisieren: Wir suchen Zerlegungen in der Form  $\frac{62}{63} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ , wobei wir die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung mit ganzen Zahlen  $b'$  bzw.  $d'$  auf den Nenner 63 erweitern können, d.h. es gilt  $62 = b'a + d'c$  mit  $b \cdot b' = d \cdot d' = 63$ .

Aus Symmetriegründen können wir  $1 < b < d < 63$  voraussetzen. Weiterhin müssen  $b$  und  $d$  echte Teiler von 63, also aus der Menge  $M = \{3; 7; 9; 21\}$  sein. In diesem Fall ist  $62 = b'a + d'c$  eine lineare diophantische Gleichung, aus der wir  $a$  und  $c$  bestimmen können.

- *Fall 1:*  $b = 3, d = 7$ . Die Gleichung lautet  $62 = 21a + 9c$  und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall 2:*  $b = 3, d = 9$ . Die Gleichung lautet  $62 = 21a + 7c$  und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 7 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall 3:*  $b = 3, d = 21$ . Die Gleichung lautet  $62 = 21a + 3c$  und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall 4:*  $b = 7, d = 9$ . Die Gleichung lautet  $62 = 9a + 7c$  und hat die einzige positive ganzzahlige Lösung  $a = 3, c = 5$ . Dies liefert die Lösung  $\frac{62}{63} = \frac{3}{7} + \frac{5}{9}$ .
- *Fall 5:*  $b = 7, d = 21$ . Die Gleichung lautet  $62 = 9a + 3c$  und hat keine Lösung, weil die rechte Seite durch 3 teilbar ist, die linke aber nicht.
- *Fall 6:*  $b = 9, d = 21$ . Die Gleichung lautet  $62 = 7a + 3c$  und hat die positiven ganzzahligen Lösungen  $a = 2 + 3t, c = 16 - 7t, t \in \{0,1,2\}$ . Dies liefert die Zerlegungen

$$\frac{62}{63} = \frac{2}{9} + \frac{16}{21} = \frac{5}{9} + \frac{9}{21} = \frac{8}{9} + \frac{2}{21}$$

Von diesen enthält die zweite Zerlegung einen weiter kürzbaren Summanden (und führt dann auf die Lösung aus Fall 4), während die anderen beiden Zerlegungen auch Lösungen im Sinne der Aufgabenstellung sind.

*Lösungshinweise zu Teil b):* Wir wollen in Analogie zu Teil a) den Zähler so in eine Summe von zwei Summanden zerlegen  $20 = z_1 + z_2$ , dass sich jeder der Summanden mit 21 kürzen lässt. Dabei probieren wir, ob der zweite Summand  $ggT(z_2, 21) > 1$  erfüllt, wenn wir  $z_1$  mit  $ggT(z_1, 21) > 1$  wählen. Als größte gemeinsame Teiler können wegen der Primfaktorenzerlegung von 21 nur 7 und 3 in Frage kommen.

20 =	7 + 13	<b>14 + 6</b>				
20 =	3 + 17	<b>6 + 14</b>	9 + 11	12 + 8	15 + 5	18 + 2

Aus den fettmarkierten Zerlegungen finden wir folgende (bereits gekürzte) Brüche

$$\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{3}$$

Da die Zähler beider Summanden übereinstimmen, haben wir eine Lösung gefunden. Gleichzeitig vermuten wir, dass es keine weiteren Lösungen gibt, da unsere systematische Suche keine weiteren Zerlegungen ergab.

Ist  $\frac{20}{21} = \frac{z}{a} + \frac{z}{b}$  eine Zerlegung in der gesuchten Form, so folgt daraus die Gleichung  $21 \cdot z \cdot (a + b) = 20 \cdot a \cdot b$ . Folglich ist 21 ein Teiler von  $20 \cdot a \cdot b$  und da 20 und 21 teilerfremd sind, ist 21 auch ein Teiler von  $a \cdot b$ . Damit müssen  $a$  und  $b$  die Primfaktoren 3 und 7 enthalten. Wegen  $a < 21, b < 21$  kann keine der beiden Zahlen beide Primfaktoren enthalten.

Wir können also o.B. d. A. annehmen, dass  $a = 3 \cdot a'$  und  $b = 7 \cdot b'$  gilt. Wegen  $1 < b < 21$  gilt  $1 \leq b' \leq 2$  und analog  $1 \leq a' \leq 6$ . Es bleibt zu untersuchen, für welche der Paare  $(a'; b')$  die Zahl  $z = \frac{20a'b'}{3a'+7b'}$  ganzzahlig ist. Für die 12 möglichen Fälle erhalten wir jeweils

	$a' = 1$	$a' = 2$	$a' = 3$	$a' = 4$	$a' = 5$	$a' = 6$
$b' = 1$	$z = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{10}}$	$z = \frac{40}{13}$	$z = \frac{60}{16}$	$z = \frac{80}{19}$	$z = \frac{100}{22}$	$z = \frac{120}{25}$
$b' = 2$	$z = \frac{40}{17}$	$z = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{20}}$	$z = \frac{120}{23}$	$z = \frac{160}{26}$	$z = \frac{200}{29}$	$z = \frac{240}{32}$

Wir stellen fest, dass  $z$  nur für  $(a', b') = (1; 1)$  oder  $(a', b') = (2; 2)$  ganzzahlig ist. Die Lösung  $a' = b' = 2$  führt jedoch auf die Zerlegung  $\frac{20}{21} = \frac{4}{6} + \frac{4}{14}$ , in der die Brüche nicht vollständig gekürzt sind.

Somit ist die oben gefundene Lösung die einzige Lösung der Aufgabenstellung.  $\square$

### Aufgabe 10.8 – MO490946.

- Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl  $y$ , für die es eine ganze Zahl  $x$  gibt, so dass die Ungleichungskette  $\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$  erfüllt ist.
- Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$  mit  $qr - ps = 1$  und  $p, q, r, s > 0$  gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl  $y$ , für die es eine ganze Zahl  $x$  gibt, so dass die Ungleichungskette  $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$  erfüllt ist.

*Lösungshinweise Teil a):* Im Thema 10.1 im Heft 10/2021 wurde – angeregt durch die Aufgabe MO611013 – ein geeigneter Bruch mit  $\frac{41}{2010} < \frac{41+1}{2010+49} = \frac{42}{2059} < \frac{1}{49}$  angegeben und gezeigt, dass stets  $y \geq 2059$  gelten muss.

*Lösungshinweise Teil b):* Analog zu Teil a) setzen wir  $t = qx - py$  und  $u = ry - sx$ . Für ganzzahlige  $p, q, x, y, r, s$  sind  $t, u$  ganzzahlig und die gegebene Ungleichungskette ist äquivalent zu  $t \geq 1$  und  $u \geq 1$ .

Wie im Teil a) lösen wir das System der zwei Gleichungen nach  $x, y$  auf, indem wir geeignete Kombinationen der beiden Gleichungen bilden. Wegen  $qr - ps = 1$  finden wir zwei besonders interessante Kombinationen:

$$\begin{aligned} rt + pu &= (rq - ps) \cdot x - (rp - pr) \cdot y = x, \\ st + qu &= (sq - qs) \cdot x - (sp - qr) \cdot y = y. \end{aligned}$$

Für jedes Paar  $(x; y)$ , für welches die Ungleichungskette gilt, ist  $u; t \geq 1$  und daher

$$\begin{aligned} y &= st + qu \geq s + q, \\ x &= rt + pu \geq r + p. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt für  $y = s + q$  und  $x = r + p$  die Ungleichungskette

$$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}.$$

Damit ist gezeigt, dass  $y = s + q$  der minimale Wert für  $y$  ist, für den die genannte Ungleichungskette erfüllt werden kann.  $\square$

**Aufgabe MO491046.** Zwei verschiedene, vollständig gekürzte Brüche  $p, q, r$  und  $s$  mit  $p, q, r, s > 0$  und  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$  seien so gewählt, dass sie folgende Eigenschaft besitzen:

Für jeden Bruch  $\frac{x}{y}$  mit  $x, y > 0$  und  $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$  gilt  $y > \max(q; s)$ , d.h. der Nenner  $y$  ist also sowohl größer als  $q$  als auch größer als  $s$ .

- Beweisen Sie, dass  $\frac{x}{y} = \frac{p+r}{q+s}$  ein Bruch mit kleinstmöglichem positiven Nenner ist, der die Ungleichung erfüllt.
- Beweisen Sie, dass für Brüche  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{r}{s}$  mit dieser Eigenschaft  $qr - ps = 1$  gilt.

*Vorbemerkung:* Für reelle Zahlen  $p, q, r, s > 0$  gilt stets  $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ , wie wir durch folgende Umformungen nachweisen können:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} < \frac{r}{s} &\Leftrightarrow ps < qr \Leftrightarrow ps + qp < qr + qp \Leftrightarrow p(q+s) < q(r+p) \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} \\ \frac{p}{q} < \frac{r}{s} &\Leftrightarrow ps < qr \Leftrightarrow ps + sr < qr + sr \Leftrightarrow s(p+r) < r(q+s) \Leftrightarrow \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} \end{aligned}$$

*Lösungshinweise zu Teil a):* Nach der Vorbemerkung erfüllt der angegebene Bruch  $\frac{p+r}{q+s}$  die Ungleichungskette. Aus ihr folgt aus der linken Ungleichung  $q \cdot x - p \cdot y > 0$ , und die rechte Ungleichung ist äquivalent zu  $r \cdot y - s \cdot x > 0$ .

Setzen wir  $t = q \cdot x - p \cdot y$  und  $u = r \cdot y - s \cdot x$ , so sind  $t$  und  $u$  positive ganze Zahlen mit  $t, u \geq 1$ . Stellen wir diese Gleichungen nach  $x$  und  $y$  um, erhalten wir aus

$$\begin{array}{ll} r \cdot t = r \cdot q \cdot x - r \cdot p \cdot y & s \cdot t = s \cdot q \cdot x - s \cdot p \cdot y \\ p \cdot u = r \cdot p \cdot y - p \cdot s \cdot x & q \cdot u = q \cdot r \cdot y - q \cdot s \cdot x \end{array}$$

Also  $x \cdot (r \cdot q - p \cdot s) = r \cdot t + p \cdot u$  bzw.  $y \cdot (q \cdot r - s \cdot p) = s \cdot t + q \cdot u$ . Gilt  $r \cdot q - p \cdot s = 1$ , so folgt daraus

$$x = r \cdot t + p \cdot u \geq r + p \qquad y = s \cdot t + q \cdot u \geq s + q$$

Weil Gleichheit für  $t = u = 1$  gilt, ist in diesem Fall stets  $y \geq q + s$ .

Wir müssen nun in Teil b) noch zeigen<sup>4</sup>, dass unter den gegebenen Voraussetzungen  $d = r \cdot q - p \cdot s$  nicht größer als 1 sein kann.

*Lösungshinweise zu Teil b):* Wir betrachten die Zahlen  $p, q, r, s$  mit  $d = r \cdot q - p \cdot s$  und  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ . Für teilerfremde Zahlen  $p$  und  $d$ , also  $\text{ggT}(p; d) = 1$ , gibt es stets positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $ad - bp = 1$ . Daraus folgt  $rbp + r = ard$ . Wir wählen nun die natürliche Zahl  $n$  mit  $nd \leq rb = nd + k < (n+1)d$  und können weiter umformen zu  $kp + r = (ar - np)d$ . Folglich ist  $d$  ein Teiler von  $kp + r$ . Dann ist aber  $d$  auch ein Teiler von

$$\begin{aligned} (kp + r)(q - s) &= kpq - kps + rq - rs = kpq + ps - kps - rs + rq - ps \\ &= p(kq + s) - \underbrace{s(kp + r)}_{\text{Vielfaches von } d} + \underbrace{rq - ps}_{=d}. \end{aligned}$$

Wegen  $\text{ggT}(p; d) = 1$  ist also auch  $d$  ein Teiler von  $kq + s$ .

Durch wiederholte Anwendung des Zusammenhangs aus der Vorbemerkung erhalten für jede ganze Zahl  $k$

$$\frac{p}{q} < \frac{kp + r}{kq + s} < \frac{r}{s}$$

Nun können wir den mittleren Bruch dieser Ungleichungskette mit  $d$  kürzen. Wir führen den Größenvergleich für die Nenner:

---

<sup>4</sup> Es ist nicht zulässig, mit Verweis auf die Aussage von Teil b) ohne Beweis (weil z.B. die Zeit dafür nicht ausreicht) den Beweis zu Teil a) zu beenden. Es könnte sein, dass der Beweis von Teil b) auf der Aussage von Teil a) basiert. Umgekehrt dürfen wir aber beim Beweis nachfolgender Aufgabenteile die Aussagen vorangehender Teile als bewiesen betrachten.

Für  $q < s$  folgt

$$\frac{kq + s}{d} \leq \frac{(d-1)q + s}{d} \leq \frac{(d-1)s + s}{d} = s \leq \max\{q; s\}$$

und für  $s \leq q$  folgt

$$\frac{kq + s}{d} \leq \frac{kq + q}{d} = \frac{(k+1)q}{d} \leq q \leq \max\{q; s\}.$$

In jedem Fall kann die Voraussetzung an die Ungleichungen nicht erfüllt werden, so dass  $d > 1$  nicht möglich ist.

Ist  $ggT(p; d) = t > 1$ , so finden wir wegen  $d = r \cdot q - p \cdot s$  und  $ggT(p; q) = 1$ , dass  $t$  auch Teiler von  $r$  ist, also  $r = t \cdot r'$ .

Wir betrachten nun die Zahlen  $p' = \frac{p}{t}, q, r' = \frac{r}{t}, s$  mit  $\frac{d}{t} = d' = r' \cdot q - p' \cdot s$  und  $\frac{p'}{q} < \frac{r'}{s}$  und folgen für  $t < d$  der obigen Argumentation. Für  $t = d$  zeigen wir direkt  $dI(p+r)$  und  $dI(q+s)$  und können den mittleren Bruch mit  $d$  kürzen.  $\square$

**Aufgabe MO361042.** Es seien 100 Brüche  $Q_i = \frac{a_i}{b_i}$  ( $i = 1, \dots, 100$ ) mit natürlichen Zahlen  $a_i$  und  $b_i$  beliebig gewählt, nur mit der Bedingung, dass mindestens ein Paar  $(i, j)$  mit  $Q_i \neq Q_j$  existiert.

Beweisen Sie, dass der Bruch  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{100}}$  größer als das Minimum der  $Q_i$  und kleiner als das Maximum der  $Q_i$  ist!

*Lösungshinweise:* Damit alle Brüche existieren, gilt  $b_i > 0$  für alle  $b_i$ . Es sei  $h$  ein Index, für den  $Q_h$  das Minimum der  $Q_i$  ist. Dann gelten für alle  $i = 1, \dots, 100$  die Ungleichungen  $\frac{a_h}{b_h} \leq \frac{a_i}{b_i}$  bzw. gleichbedeutend  $a_h \cdot b_i \leq b_h \cdot a_i$ . In einer dieser Ungleichungen gilt sogar die echte Ungleichung, weil andernfalls  $Q_h = Q_i$  für alle  $i = 1, \dots, 100$  gelten würde – im Widerspruch zur Voraussetzung. Ebenso können wegen dieser Voraussetzung nicht alle  $a_i$  gleich Null sein. Nach Addition der 100 Ungleichungen erhalten wir  $a_h \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{100}) < b_h \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{100})$ .

Da beide Klammerausdrücke positive Zahlen sind, folgt daraus wie behauptet

$$\frac{a_h}{b_h} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{100}}$$

Entsprechend gilt für das Maximum  $Q_k$  aller  $Q_i$  die zweite Behauptung

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{100}} < \frac{a_k}{b_k}$$

$\square$

### 13. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 11. bis 17. April 2024 fand in Tskaltubo (Georgien) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl's Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr (siehe [egmo2024@gmail.com](mailto:egmo2024@gmail.com)) stellten sich 54 Teams mit 212 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 148 aus 37 europäischen Ländern. Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben haben sich über das Auswahlverfahren zur IMO qualifiziert und nahmen als deutsche Delegation mit Erfolg teil – sie erreichten eine Gold- und zwei Silbermedaillen. Aus Sachsen trug MELIA HAASE (Kl. 12, Gymnasium Zschopau) mit einer Silbermedaille zum guten Abschneiden bei. Mit 32 von 42 möglichen Punkten verfehlte sie den Goldrang nur um einen Punkt.

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (je 4½ Stunden Arbeitszeit) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 104 Punkten nahm Deutschland den 7. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von den USA (151 Punkte, 4 Goldmedaillen) und Australien (143 Punkte, 4 Goldmedaillen), gefolgt von der Volksrepublik China (141 Punkte, 3 Gold-, 1 Silbermedaille). Die nächsten Plätze belegen die Ukraine, Rumänien und Türkei, so dass Deutschland den vierten Platz unter den europäischen Ländern schaffte.

Die 14. EGMO wird im April 2025 in Prishtina (Kosovo) stattfinden.

#### Aufgaben der 13. EGMO

*Hinweis* zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Während die Teams bei Aufgabe 1 im Mittel 16.1 Punkte (von 28 möglichen Punkten, Top 10: 25.6, D: 25) erreichten, waren es bei Aufgabe 6 im Durchschnitt lediglich 1.5 Punkte (Top 10: 4.4, D: 4).

**Aufgabe 1.** Zwei verschiedene ganze Zahlen  $u$  und  $v$  stehen an einer Tafel. Wir führen eine Reihe von Schritten durch. In jedem Schritt machen wir einen der folgenden beiden Züge:

- (i) Wenn zwei verschiedene Zahlen  $a$  und  $b$  an der Tafel stehen, dann können wir die Zahl  $a + b$  an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.



- (ii) Wenn drei paarweise verschiedene Zahlen  $a, b$  und  $c$  an der Tafel stehen, und eine ganze Zahl  $x$  die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  erfüllt, dann können wir die Zahl  $x$  an die Tafel schreiben, falls sie noch nicht dort steht.

Bestimme alle Paare von Startzahlen  $(u, v)$ , für die wir jede beliebige ganze Zahl nach einer endlichen Anzahl von Schritten irgendwann an die Tafel schreiben können.

**Aufgabe 2.** Sei  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Umkreis  $\Omega$  und Inkreismittelpunkt  $I$ , sodass  $|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$ . Der Inkreis von  $\triangle ABC$  berühre die Seiten  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  und  $\overline{AB}$  in den Punkten  $D, E$  und  $F$ . Sei  $X$  beziehungsweise  $Y$  ein Punkt auf dem kürzeren der beiden Bögen  $\widehat{DF}$  beziehungsweise  $\widehat{DE}$ , sodass  $\angle BXD = \angle DYC$ . Die Gerade  $XY$  schneide die Gerade  $BC$  in  $K$ . Sei  $T$  der Punkt auf  $\Omega$ , sodass  $KT$  den Kreis  $\Omega$  berührt und  $T$  auf derselben Seite der Geraden  $BC$  liegt wie  $A$ . Zeige, dass sich die Geraden  $TD$  und  $AI$  auf  $\Omega$  schneiden.

**Aufgabe 3.** Eine positive ganze Zahl  $n$  heiße *eigenartig*, falls für jeden positiven Teiler  $d$  von  $n$  gilt, dass  $d(d + 1)$  ein Teiler von  $n(n + 1)$  ist.

Zeige, dass für vier paarweise verschiedene eigenartige positive ganze Zahlen  $A, B, C$  und  $D$  gilt:  $ggT(A, B, C, D) = 1$ .

*Anmerkung:*  $ggT(A, B, C, D)$  bezeichne die größte positive ganze Zahl, die alle vier Zahlen  $A, B, C$  und  $D$  teilt.

**Aufgabe 4.** Für eine Folge  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  von ganzen Zahlen heiße ein Paar  $(a_i, a_j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  *interessant*, falls es ein Paar  $(a_k, a_l)$  mit  $1 \leq k < l \leq n$  gibt, sodass  $\frac{a_l - a_k}{a_j - a_i} = 2$ .

Bestimme für jedes  $n \geq 3$  die größtmögliche Anzahl interessanter Paare in einer Folge der Länge  $n$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $N$  die Menge der positiven ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen  $f: N \rightarrow N$ , sodass für alle Paare  $(x, y)$  positiver ganzer Zahlen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $x$  und  $f(x)$  haben die gleiche Anzahl von positiven Teilern.  
(ii) Falls  $y$  nicht durch  $x$  teilbar ist und  $x$  nicht durch  $y$  teilbar ist, dann gilt  $ggT(f(x), f(y)) > f(ggT(x, y))$ .

*Anmerkung:*  $ggT(m, n)$  bezeichne die größte positive ganze Zahl, die  $m$  und  $n$  teilt.

**Aufgabe 6.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $d$ , für die es ein Polynom  $P$  von Grad  $d$  mit reellen Koeffizienten gibt, sodass unter  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  höchstens  $d$  verschiedene Werte sind.

## Termine

**59. Bundeswettbewerb „Jugend forscht“**, 30. Mai. bis 2. Juni 2024, Science Center experimenta in Heilbronn (Baden-Württemberg). Informationen unter <https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2024.html>

**63. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde**. 6. bis 9. Juni 2024, Flensburg (Schleswig-Holstein). Informationen unter <https://mo2024.de/>.

## Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/2024

**Aufgabe I-1** (Individual-Wettbewerb, 7. MeMO, 2013, Veszprem/Ungarn) Es seien  $a, b, c$  positive reelle Zahlen mit  $a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ . Man zeige, dass

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}$$

gilt. Man finde alle Tripel  $(a, b, c)$ , für die Gleichheit gilt.

*Lösungshinweise:* Basierend auf der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel erhalten wir

$$\sqrt[3]{7a^2b + 1} = 2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot a \cdot \left(\frac{7b}{8} + \frac{1}{8a^2}\right)} \leq \frac{2}{3} \cdot \left(a + a + \frac{7b}{8} + \frac{1}{8a^2}\right)$$

Verwenden wir für  $\sqrt[3]{7b^2c + 1}$  und  $\sqrt[3]{7c^2a + 1}$  entsprechende Abschätzungen und addieren die drei Terme, erhalten wir

$$\sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1} \leq \frac{2}{3} \left( \frac{23(a + b + c)}{8} + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right)$$

Setzen wir nun auf der rechten Seite die Voraussetzung über  $a, b, c$  ein, führt dies zu

$$\sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1} \leq 2(a + b + c)$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn bei Anwendung der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel die Gleichheit erfüllt ist, also im Fall von

$$a = \frac{7b}{8} + \frac{1}{8a^2}, \quad b = \frac{7c}{8} + \frac{1}{8b^2}, \quad c = \frac{7a}{8} + \frac{1}{8c^2}$$

Wir definieren die Funktion  $f(x) = \frac{7}{8} \left( x - \frac{1}{8x^2} \right)$ . Damit können wir die drei Gleichungen schreiben als  $b = f(a), c = f(b), a = f(c)$ .

Wir stellen fest, dass diese Funktion  $f$  nicht fallend ist. Nehmen wir zwei reelle Zahlen  $u \geq v$ , dann finden wir nämlich:

$$f(u) - f(v) = \frac{8}{7} \left( (u - v) + \frac{1}{8v^2} - \frac{1}{8u^2} \right) = \frac{8}{7} \left( (u - v) + \frac{u^2 - v^2}{8u^2v^2} \right)$$

also

$$f(u) - f(v) = \frac{8}{7} \left( (u - v) + \frac{(u - v)(u + v)}{8u^2v^2} \right) = \frac{8}{7} (u - v) \left( 1 + \frac{u + v}{8u^2v^2} \right) \geq 0$$

Weil das Gleichungssystem symmetrisch ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $a = \max\{a, b, c\}$  gelte. Dann finden wir wegen  $a \geq b$  und der Monotonie von  $f$  auch  $b = f(a) \geq f(b) = c$  sowie  $c = f(b) \geq f(c) = a$ , also insgesamt  $c \geq a \geq b \geq c$ , woraus  $a = b = c$  folgt.

Wir suchen nun alle Zahlen  $a$  mit  $f(a) = a$ , also

$$a = \frac{8}{7} \left( a - \frac{1}{8a^2} \right) \Rightarrow 7a = 8a - \frac{1}{a^2} \Rightarrow a = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^3 = 1$$

Somit ist die Gleichheit erfüllt, wenn  $a = b = c = 1$  gilt, was durch eine Probe

## Monatsaufgabe 5/2024<sup>5</sup>

Seien  $\triangle ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $AB \neq AC$  und  $O$  sein Umkreismittelpunkt. Die Gerade  $AO$  schneide den Umkreis  $I$  von  $\triangle ABC$  ein weiteres Mal im Punkt  $D$  und die Gerade  $BC$  im Punkt  $E$ . Der Umkreis von  $\triangle CDE$  schneide die Gerade  $CA$  ein weiteres Mal im Punkt  $P$ . Die Gerade  $PE$  schneide die Gerade  $AB$  im Punkt  $Q$ . Die Gerade durch  $O$  parallel zu  $PE$  schneide die Höhe im Dreieck  $\triangle ABC$  durch  $A$  im Punkt  $F$ .

Zeige  $|\overline{FP}| = |\overline{FQ}|$ .

## Inhalt

Vorwort .....	2
Thema 26.2 – Geometrische Örter.....	3
Thema 10.2 - Beschränkte und kürzbare Brüche.....	8
13. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen .....	16
Termine .....	18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/2024 .....	18
Monatsaufgabe 5/2024 .....	19

<sup>5</sup> Lösungseinsendungen an [bino@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bino@hrz.tu-chemnitz.de) sind bis 30.06.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

### Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe <sup>6</sup>	Nr.	Thema	Aufgabe
05/2024 (Mai)	Thema 10.2	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO630936 MO631036
05/2024 (Mai)	Thema 26.2	Geometrischer Ort	MO630933 MO631033
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26.1	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

#### Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich  
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz  
 E-Mail: [bin0@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bin0@hrz.tu-chemnitz.de)  
[www.kzm-sachsen.de](http://www.kzm-sachsen.de)  
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

<sup>6</sup> Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage ([norman.bitterlich@t-online.de](mailto:norman.bitterlich@t-online.de)) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.