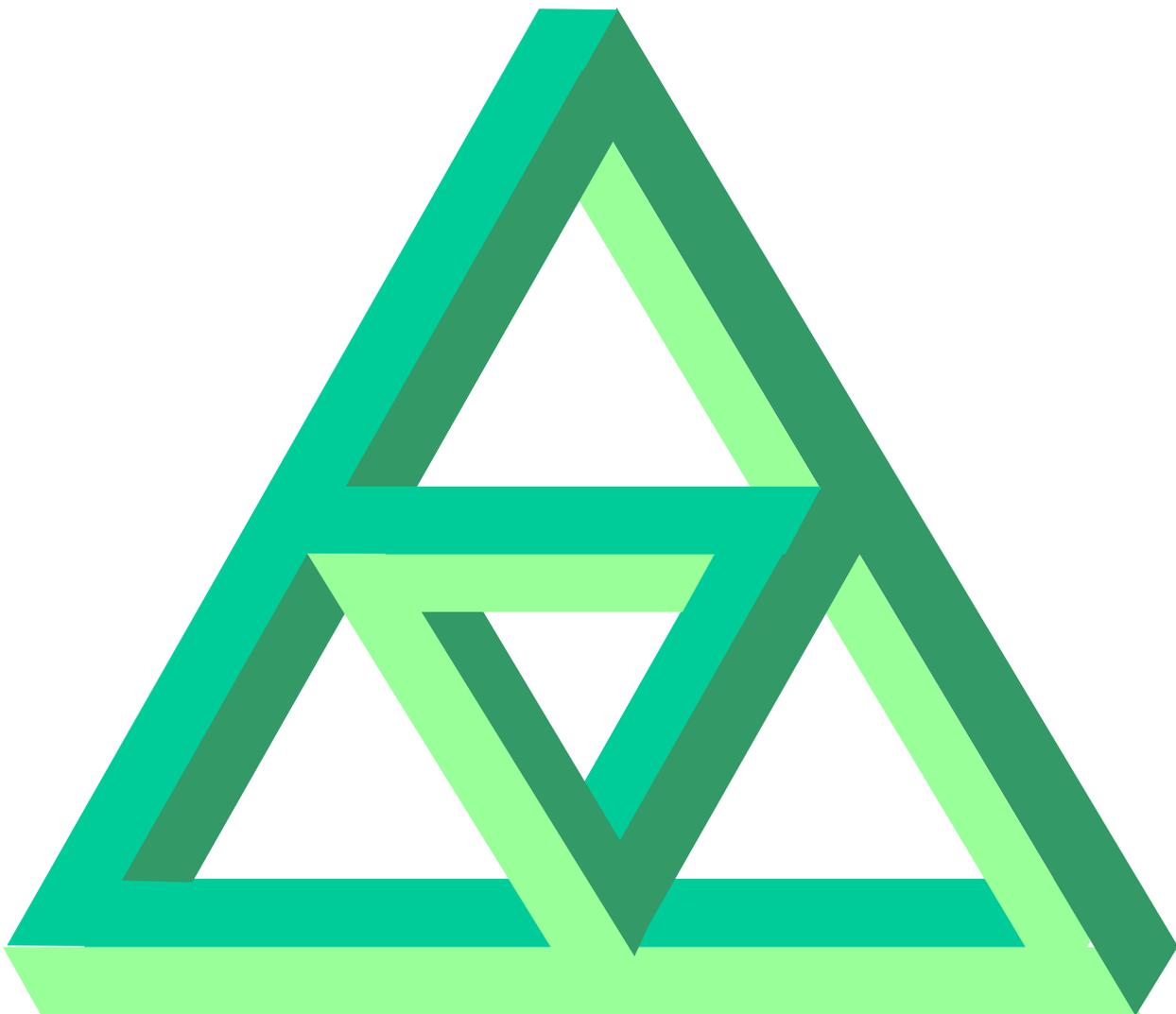


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir greifen im Zusammenhang mit der Aufgabe **MO630924** noch einmal die Teilung einer Figur in zwei flächengleiche Teile auf und untersuchen diese Fragestellung am Trapez. Dabei zeigen wir eine verblüffende Anwendung aus der zweiten Hälfte der altbabylonischen Epoche.

Angeregt durch die Aufgaben **MO630923/MO631023** untersuchen wir Teleskopsummen und -produkte, d.h., wir suchen nach Darstellungsformen für Summen und Produkte, so dass sich benachbarte Summanden und Faktoren aufheben.

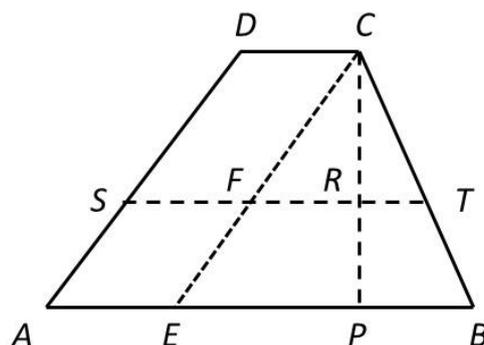
Wir blicken auf das Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ vom 20. Januar 2024 zurück und weisen auf den 6. Tag der Mathematik, hin, den die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am 23. März 2024 durchführen wird.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12.6 – Flächenhalbierung eines Trapezes

Aufgabe 12.20. Angeregt durch die Aufgabe **MO100935** suchen wir zunächst für ein Trapez $ABCD$ eine Flächenteilung durch eine Parallele ST zur Grundseite \overline{AB} . Wir markieren den Punkt E auf \overline{AB} mit der Eigenschaft $EC \parallel AD$. Den Schnittpunkt von EC mit ST bezeichnen wir mit F .



Für die Längen $|\overline{AB}| = a$, $|\overline{CD}| = c$ und $|\overline{ST}| = x$ und die Längen der Höhen $|\overline{PC}| = h$ (im Dreieck ΔPBC auf der Strecke \overline{PB}) bzw. $|\overline{RC}| = h_1$ (im Dreieck ΔRTC auf der Strecke \overline{RT}) finden wir über den Flächenvergleich

$$h_1 \cdot \frac{x + c}{2} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{a + c}{2}$$

In den ähnlichen Dreiecken ΔPBC und ΔRTC (nach WWW) gilt zudem

$$\frac{h_1}{|\overline{RT}|} = \frac{h}{|\overline{EB}|}$$

Die betrachteten Strecken können wir wegen $|\overline{AE}| = |\overline{CD}|$ durch a, c und x ausdrücken: $|\overline{RT}| = x - c$ und $|\overline{EB}| = a - c$. Setzen wir $h_1 = h \cdot \frac{x-c}{a-c}$ in die Gleichung des Flächenvergleiches ein, erhalten wir

$$h \cdot \frac{(x - c)(x + c)}{2 \cdot (a - c)} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{a + c}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - c^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 - c^2),$$

also

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Die Streckenlänge x ist gleich dem quadratischen Mittel³ von a und c . Aus der rechten Darstellung in dieser Gleichung erkennen wir, wie wir diese Streckenlänge konstruieren können:

- (1) Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Längen a und c , die Länge seiner Hypotenuse bezeichnen wir mit y .
- (2) Wir konstruieren ein Quadrat mit der Seitenlänge y und zeichnen dessen Diagonalen ein, die sich mit ihrem Schnittpunkt halbieren. Die halbe Diagonale hat die gesuchte Länge x .

³ s. Heft 12/2023

- (3) Wir konstruieren auf \overline{AB} den Punkt T' als Schnittpunkt des Kreises um A mit dem Radius x .
- (4) Wir konstruieren die Parallele zu AD durch T' . Ihren Schnittpunkt mit der Trapezseite \overline{BC} bezeichnen wir mit T .
- (5) Wir konstruieren die Parallele zu AB durch T . Ihren Schnittpunkt mit der Trapezseite \overline{AD} bezeichnen wir mit S .

Die Gerade \overline{ST} erfüllt die Aufgabenstellung und halbiert den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$. Die Argumentation der Analyse beinhaltet den Beweis, wenn wir ausgehend von der Gleichung $x^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + c^2)$ den Vergleich der Flächeninhalte und die Ähnlichkeit der betrachteten Dreiecke nachweisen. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Für $a \geq c > 0$ gilt nämlich wegen

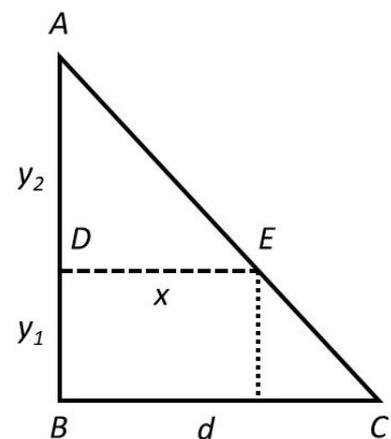
$$c = \frac{1}{2} \cdot 2c = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 \cdot c^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} = x,$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2 \cdot a^2} = \frac{1}{2} \cdot 2a = a,$$

also $c \leq x \leq a$, so dass der Punkt T' stets auf \overline{AB} liegt. □

Ein kurzer Ausflug in die Geschichte der Mathematik: Im Vorderasiatischen Museum Berlin werden Tontafeln aus der zweiten Hälfte der altbabylonischen Epoche aufbewahrt. Darunter auch die Tafel aus LARSA VAT 8512, auf der in Keilschrift folgende Aufgabe angegeben ist⁴.

Aufgabe 12.22. (Text angepasst; in Dezimalzahlen⁵) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten \overline{AB} und \overline{BC} ($|\overline{BC}| = d = 30$). Das Dreieck wird durch eine Gerade DE mit D auf \overline{AB} und E auf \overline{BC} in zwei Flächen geteilt, für die $F_{BCED} - F_{ADE} = 420$ gelte. Außerdem ist bekannt, dass $|\overline{AD}| - |\overline{BD}| = 20$ beträgt.



Man bestimme die Länge der Strecke \overline{DE} .

Lösungshinweise: Setzen wir zur Abkürzung der Schreibweise $|\overline{AD}| = y_2$ und $|\overline{BD}| = y_1$, so lässt sich einerseits die Aussage über die Flächeninhalte wie folgt formulieren:

⁴ Dietmar Herrmann. Mathematik im Vorderen Orient - Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien. Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019. (Kapitel 3, Abschnitt 3.7.10, Seite 310f)

⁵ Zu dieser Zeit wurden Zahlen im Hexagesimalsystem verwendet (Zahlensystem zur Basis 60). Wir verwenden nur die Zähler der 60-stel und beachten, dass der Flächenunterschied in ganzen Zahlen angegeben wurde und deshalb anzupassen ist. Da Missverständnisse auszuschließen sind, verwenden wir keine Längen- oder Flächeneinheiten.

$$\begin{aligned}
 F_{BCED} - F_{ADE} &= \frac{x+d}{2} \cdot y_1 - \frac{1}{2}x \cdot y_2 = \frac{1}{2}(x+30) \cdot y_1 - \frac{1}{2}x \cdot (y_1 + 20) \\
 &= 15y_1 - 10x = 420.
 \end{aligned}$$

und andererseits die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADE$ ausnutzen:

$$y_2 : y_1 = x : (30 - x) \Rightarrow (y_1 + 20)(30 - x) = x \cdot y_1.$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach y_1 auf und erhalten

$$y_1 = \frac{20x - 600}{30 - 2x}.$$

Substituieren wir damit y_1 in der Beziehung über die Flächeninhalte, finden wir eine quadratische Gleichung in x ,

$$15y_1 - 10x = 15 \cdot \frac{20x - 600}{30 - 2x} - 10x = 420$$

d.h.

$$20x^2 + 840x - 21600 = 0 \Rightarrow x^2 + 42x - 1080 = 0$$

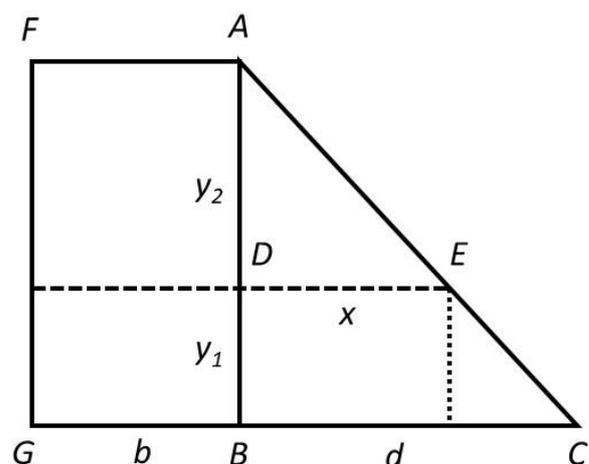
$$x_{1,2} = -21 \pm \sqrt{21^2 + 1080} = -21 \pm 39$$

Da hier nur die positive Nullstelle gesucht wird, erhalten wir für die Strecke \overline{DE} die Länge $x = 18$. \square

Historiker bezweifeln jedoch, dass damals bereits das algebraische Lösen von quadratischen Funktionen beherrscht wurde. Stattdessen gehen sie davon aus, dass es für diese Aufgabenstellung eine verblüffende geometrische Lösung gibt.

Lösungsvariante: Wir erweitern das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ um ein Rechteck $AFGB$ mit der gemeinsamen Seite \overline{AB} und der Breite \overline{BG} mit der Länge b . Die Verlängerung der Transversalen DE teilt das Trapez $GCAF$ in zwei Teile. Wir wählen nun b so, dass diese beiden Teile flächengleich sind, also

$$\begin{aligned}
 F_{ADE} + b \cdot y_2 &= F_{BCED} + b \cdot y_1 \\
 \Rightarrow b &= \frac{F_{BCED} - F_{ADE}}{y_2 - y_1} = \frac{420}{20} = 21
 \end{aligned}$$



Wenden wir nun die Landvermesser-Formel⁶ für das Trapez $GCAF$ an, erhalten wir

⁶ s. Heft 01/2024, Abschnitt „In alten Mathe-Büchern geblättert“ (S. 14)

$$(x + b) = \sqrt{\frac{b^2 + (b + 30)^2}{2}}$$

und können den Zahlenwert bestimmen

$$x = \sqrt{\frac{21^2 + 51^2}{2}} - 21 = 39 - 21 = 18.$$

□

Aufgabe 12.23. Wir wollen die Trapezfläche mit einer Geraden halbieren, die jeweils durch das Innere der Strecken \overline{AB} und \overline{CD} verläuft. Wir denken dabei zuerst an die Gerade durch die Mittelpunkte von \overline{AB} und \overline{CD} . Bei Anwendung der Flächenformel für ein Trapez ist die Richtigkeit dieses Ansatzes sofort ersichtlich. Um diese Konstruktion zu verallgemeinern, suchen wir für einen fixierten Punkt X im Innern von \overline{CD} den Punkt Y im Innern von \overline{AB} , so dass die Flächengleichheit $F_{AYXD} = F_{YBCX}$ erfüllt ist. Offenbar muss für diesen Fall für $\overline{DX} = x$, $\overline{AY} = y$ und der Höhe h auf AB gelten

$$h \cdot \frac{x + y}{2} = h \cdot \frac{a - y + c - x}{2} \Rightarrow y = \frac{a + c - 2x}{2}.$$

Die Konstruktion der Streckenlänge y als Hälfte einer Summe bzw. Differenz von gegebenen Streckenlängen bereitet keine Schwierigkeit. □

Betrachten wir einige Spezialfälle: Aus $x = \frac{c}{2}$ folgt $y = \frac{a}{2}$ und wir erhalten die Flächenhalbierung durch die Verbindung beide Mittelpunkte von \overline{AB} und \overline{CD} .

Soll $y = x$ gelten (d.h. die Gerade XY verläuft parallel zu AD), so ist $x = \frac{a+c}{4}$. Jedoch liegt x nur dann im Innern von \overline{CD} , wenn die Ungleichung $x < c$ und damit $a < 3c$ erfüllt ist.

Soll $a - y = c - x$ gelten (d.h. die Gerade XY verläuft parallel zu BC), so ist

$$a - y = c - x = a - \frac{a + c - 2x}{2} = \frac{a - c + 2x}{2} \Rightarrow x = \frac{3c - a}{4}$$

Jedoch liegt x nur dann im Innern von \overline{CD} , wenn die Ungleichung $x < c$ und damit $a < 3c$ erfüllt ist⁷.

Aufgabe 12.24. Nun suchen wir für die Flächenhalbierung eines Trapezes $ABCD$ eine Teilungsgerade g , die durch den Punkt A verlaufen soll. Den Schnittpunkt mit einer

⁷ s. Heft 01/2024, Seite 6, Aufgabe 12.18 – MO291023.

Trapezseite bezeichnen wir mit X . Dieser Punkt liegt nicht auf \overline{CD} , denn wegen $c < a$ wäre in diesem Fall $F_{AXD} < \frac{1}{2} \cdot F_{ABCD}$. Also liegt X stets auf der Trapezseite \overline{BC} .

Für die Konstruktion des Punktes X sind mehrere Lösungsvarianten möglich:

(1) Da es genügt, die Höhe $\overline{YZ} = h$ des Dreiecks ΔABX zu ermitteln, können wir für die Dreieckshöhe h , die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = c$ die Gleichung über die Flächeninhalte

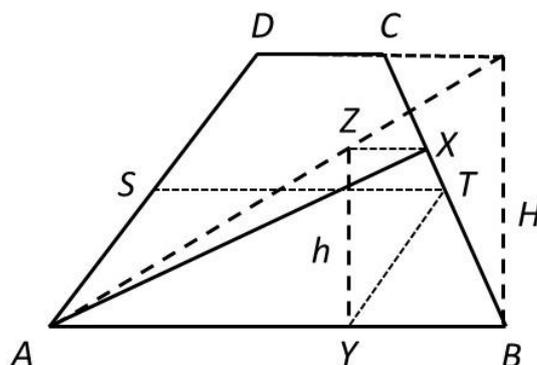
$$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+c}{2} \cdot H \right)$$

umformen zu

$$h : H = \frac{a+c}{2} : a$$

Diese Verhältnisgleichung kann unmittelbar in der Trapezfigur wiedergefunden werden. Dazu

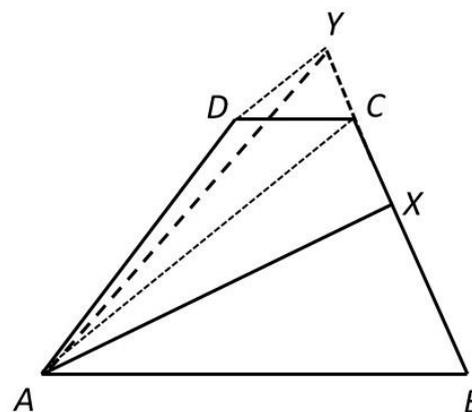
projizieren wir die Trapez-Mittellinie \overline{ST} (mit der Länge $\frac{a+c}{2}$) wie in der Skizze angedeutet auf die Grundseite mit $|\overline{AY}| = |\overline{ST}|$, konstruieren die Senkrechte im Punkt Y und die Trapezhöhe H im Punkt B . Gemäß dem Strahlensatz mit $\overline{YZ} \parallel H$ und den Strahlen durch A und Y sowie durch A und Z finden wir für h die geforderte Länge. Mittels Parallele zu AB durch Z erhalten wir den Schnittpunkt X mit der Trapezseite BC . Die Gerade AX teilt das Trapez in zwei flächengleiche Figuren.



(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ΔACD . Dazu konstruieren wir die Parallele zu AC durch D und bezeichnen deren Schnittpunkt mit der Verlängerung von BC über C hinaus mit Y . Weil die Dreiecke ΔACD und ΔACY die gleiche Grundseite \overline{AC} und wegen $AC \parallel DY$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Nun gilt

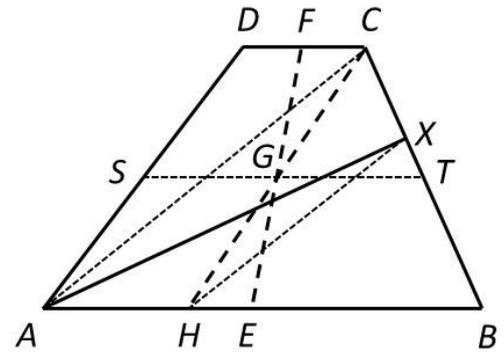
$$F_{ABCD} = F_{ABC} + F_{ACD} = F_{ABC} + F_{ACY} = F_{ABY}$$

Das Dreieck ΔABY ist also flächengleich zum Trapez $ABCD$. Somit zerlegt die Seitenhalbierende \overline{AX} das Trapez in zwei flächengleiche Figuren.



(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten \overline{AB} bzw. \overline{CD} . Den Schnittpunkt dieser Gerade mit der Mittellinie \overline{ST} bezeichnen wir mit G .

Wir drehen die Gerade EF um G , so dass die gedrehte Gerade durch C verläuft und dabei die Grundseite \overline{AB} in H schneidet. Nun sind die Dreiecke $\triangle HEG$ und $\triangle CFG$ nach WSW kongruent und somit flächengleich. Damit ist auch \overline{HC} eine Flächenhalbierende für das Trapez $ABCD$.

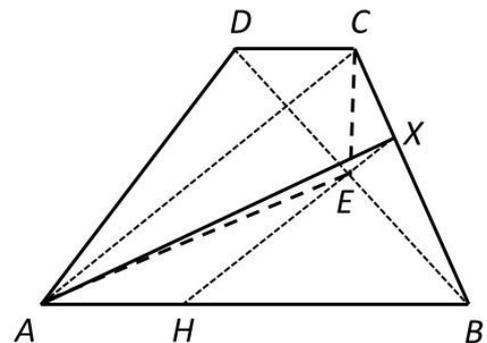


Wir konstruieren die Parallele zu AC durch H , deren Schnittpunkt mit der Trapezseite \overline{BC} bezeichnen wir mit X . Weil die Dreiecke $\triangle HXC$ und $\triangle HXA$ die gleiche Grundseite \overline{AC} und wegen $AC \parallel HX$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot F_{ABCD} = F_{HBC} = F_{HBX} + F_{HXC} = F_{HBX} + F_{AHX} = F_{ABX}$$

Somit teilt \overline{AX} die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks $\triangle AHX$ bzgl. \overline{HX} in das (flächengleiche) Dreieck $\triangle HXC$ ist der gesuchte Punkt X gefunden.

(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale \overline{BD} , dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$ jeweils halbiert werden. Nun konstruieren wir die Parallele zu AC durch E , deren Schnittpunkte mit \overline{AB} bzw. \overline{BC} bezeichnen wir mit H bzw. X .



Weil die Dreiecke $\triangle AEC$ und $\triangle AXC$ die gleiche Grundseite \overline{AC} und wegen $AC \parallel HX$ die gleiche Höhe haben, sind beide Dreiecke flächengleich (Scherung). Nun gilt

$$\frac{1}{2} \cdot F_{ABCD} = F_{ABCE} = F_{ABC} - F_{AEC} = F_{ABC} - F_{AXC} = F_{ABBX}$$

Somit teilt \overline{AX} die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. □

Teleskopieren von Summen und Produkten

Ähnlich wie in den Aufgaben **MO630923/MO631023** finden wir bei der folgenden Fragestellung den Lösungsansatz durch Analyse der Summen für kleine Werte für die Indexvariable n .

Aufgabe MO410944.

- (a) Berechnen Sie den Wert der Summe $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (-1)^n \cdot n$ in Abhängigkeit von n , wobei n eine natürliche Zahl mit $n > 0$ ist.
 (b) Bestimmen Sie $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2001} + S_{2002}$.

Lösungshinweise zu Teil a): Wir berechnen für kleine n die Summen S_n .

n	1	2	3	4	5
S_n	1	$1 - 2 = -1$	$1 - 2 + 3 = 2$	$1 - 2 + 3 - 4 = -2$	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$

Wir können bereits vermuten, dass für gerade n der Wert $S_n = -\frac{n}{2}$ und für ungerade n der Wert $S_n = \frac{n+1}{2}$ beträgt. Mit der Methode der vollständigen Induktion beweisen wir diese Vermutung.

Induktionsanfang: Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ haben wir die Richtigkeit bereits in der Wertetabelle gezeigt.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für gerade n beträgt der Wert $S_n = -\frac{n}{2}$ und für ungerade n beträgt der Wert $S_n = \frac{n+1}{2}$.

Induktionsbehauptung: Für gerade n beträgt der Wert $S_{n+2} = -\frac{n+2}{2}$ und für ungerade n beträgt der Wert $S_{n+2} = \frac{n+3}{2}$.

Induktionsbeweis:

Fall 1: Es sei n eine gerade Zahl. Dann ist auch $n + 2$ geradzahlig und es gilt

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (n - 1) - n + (n + 1) - (n + 2) \\ &= S_n - 1 = -\frac{n}{2} - 1 = -\frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

Fall 2: Es sei n eine ungerade Zahl. Dann ist auch $n + 2$ ungeradzahlig und es gilt

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n - 1) + n - (n + 1) + (n + 2) \\ &= S_n + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Aus den Aussagen des Induktionsanfangs und des Induktionsschritts folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n > 0$. □

Eine korrekte formale Darstellung der Methode der vollständigen Induktion wird bei der Lösungsdarstellung zu MO-Aufgaben in den Klassenstufen 9/10 nicht verlangt. Es ist ausreichend, ausgehend von den Beispielen für $n = 1, 2, \dots$ die Argumentation des Induktionsbeweises zu führen und mit einem Antwortsatz ähnlich zum Induktionsschluss zu vollenden.

Allerdings können wir den Beweis durch Zusammenfassen benachbarter Summanden wesentlich vereinfachen:

Fall 1: Für gerade Zahlen n gilt

$$S_n = \underbrace{(1-2)}_{=-1} + \underbrace{(3-4)}_{=-1} + \dots + \underbrace{((n-1)-n)}_{=-1} = \frac{n}{2} \cdot (-1) = -\frac{n}{2}.$$

Fall 2: Für ungerade Zahlen n gilt

$$S_n = 1 + \underbrace{(-2+3)}_{=1} + \underbrace{(-4+5)}_{=1} + \dots + \underbrace{((-n+1)+n)}_{=1} = 1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1 = \frac{n+1}{2}.$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wir setzen die in a) gefundenen Werte ein und finden leicht eine hilfreiche Zusammenfassung benachbarter Summanden:

$$S = \underbrace{\frac{1+1}{2} - \frac{2}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{3+1}{2} - \frac{4}{2}}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{2001+1}{2} - \frac{2002}{2}}_{=0} = 0$$

□

Während in Summen wie

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

oder

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

das Rationalmachen der Nenner unter Anwendung der 3. Binomischen Formel direkt zu Vereinfachungen führt (zu Teleskopsummen, bei denen je zwei Nachbarglieder, außer dem ersten und dem letzten, sich gegenseitig aufheben), ist in folgender Aufgabe erst eine geeignete Umformung zu finden.

Aufgabe MO371045. Beweisen Sie folgende Aussage.

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} < 1999.$$

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die zu untersuchende Summe mit S . Wir leiten zunächst für $n > 0$ Abschätzungen für $\frac{1}{\sqrt{n}}$ her.

$$4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2n + 1 \Rightarrow 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1 \Rightarrow 2\sqrt{n}\sqrt{n-1} < 2n - 1 \Rightarrow 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Nutzen wir diese Ungleichungskette und schreiben die mittleren Summanden für n untereinander, erkennen wir, wie eine Vereinfachung zur Lösung führt.

$$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$$

$$2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

...

$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{1.000.000} < \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} < 2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{999.999}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{2} + 1 < S < 2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{1} + 1.$$

Offenbar gilt

$$2\sqrt{1.000.001} - 2\sqrt{2} + 1 > 2\sqrt{1.000.000} - 2 \cdot 1.5 + 1 = 2000 - 2 = 1998$$

$$2\sqrt{1.000.000} - 2\sqrt{1} + 1 = 2000 - 1 = 1999$$

und folglich $1998 < S < 1999$. □

Aufgabe. Berechnen Sie den Wert der Summe

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{100}\right) + \dots + \left(\frac{98}{99} + \frac{98}{100}\right) + \frac{99}{100}.$$

Lösungshinweise: Um die Teilsummen der Reziproken zu berechnen, versuchen wir zunächst, die Abschätzungen wie oben anzuwenden, nämlich

$$2\sqrt{n^2+1} - 2\sqrt{n^2} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} < 2\sqrt{n^2} - 2\sqrt{n^2-1}.$$

Setzen wir jedoch die ersten konkreten Zahlen ein, erkennen wir, dass das Teleskopieren der Summanden misslingt, denn es gilt:

$$2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{2^2+1} - 2\sqrt{2^2} < \frac{1}{2} < 2\sqrt{2^2} - 2\sqrt{2^2-1} = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3},$$

$$2\sqrt{10} - 2\sqrt{9} = 2\sqrt{3^2+1} - 2\sqrt{3^2} < \frac{1}{3} < 2\sqrt{3^2} - 2\sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{8}.$$

Wir ordnen deshalb die Summanden anders an:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right).$$

Nun können wir in jeder Klammer die GAUßsche Summenformel⁸ $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ anwenden und die Summe wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{100} \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99) = \frac{1}{2} \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 2475, \end{aligned}$$

wobei wir auch in der zweiten Zeile noch einmal die Summenformel verwendeten. \square

Es fällt nicht schwer, das Produkt $P(n) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}$ (Teleskopprodukte) auszurechnen. Da wir benachbarte Faktoren kürzen können, verbleibt $P = \frac{1}{n+1}$. Dies wollen wir auch bei folgender Aufgabe anwenden.

Aufgabe (nach WURZEL 2020-56). Man zeige die folgenden Ungleichungen:

$$0.01 < x = \prod_{k=1}^{1012} \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2023}{2024} < 0.03.$$

Lösungshinweise: Da sich in diesem Produkt benachbarte Faktoren nicht kürzen lassen, betrachten wir ein ähnliches Produkt y der Form

$$y = \prod_{k=1}^{1012} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2024}{2025}.$$

Weil für jedes $k > 0$ die Ungleichung

$$(2k-1) \cdot (2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2 = 2k \cdot 2k$$

erfüllt ist, gilt auch $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$. Somit folgt aus dem paarweisen Vergleich der Faktoren von x die Relation $x^2 < x \cdot y$. Daraus können wir wie folgt schlussfolgern:

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2023}{2024} \cdot \frac{2024}{2025} = \frac{1}{2025} \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{2025}} = \frac{1}{45}.$$

⁸ Die GAUßsche Summenformel darf als bekannt vorausgesetzt werden, sollte aber immer mit Angabe der Formel zitiert werden.

Wegen $\frac{1}{45} < \frac{1}{40} = 0.025 < 0.03$ ist die rechte Seite der Ungleichung bewiesen.

Nun betrachten wir die Zahl $x^* = 2 \cdot x \cdot \frac{2025}{2026}$. Schreiben wir die Faktoren aus, also

$$x^* = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2025}{2026},$$

so können wir wieder die Faktoren von x^* mit denen von y vergleichen. Es gilt für alle $k > 0$

$$2k \cdot (2k+2) = 4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \Rightarrow \frac{2k}{2k+1} < \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Daraus können wir schlussfolgern:

$$x^{*2} > x^*y = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2024}{2025} \cdot \frac{2025}{2026} = \frac{2}{2026} \Rightarrow x^* > \frac{1}{\sqrt{1013}}.$$

Aus der Bildungsvorschrift für x^* können wir nun auch x abschätzen

$$x = \frac{2026}{2025 \cdot 2} \cdot x^* > \frac{1013}{2025} \cdot \frac{1}{\sqrt{1013}} = \frac{\sqrt{1013}}{2025} > \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 45} > 0.7 \cdot 0.02 = 0.014 > 0.01.$$

Somit ist auch die linke Seite der Ungleichung bewiesen. □

Aufgabe. Für natürliche Zahlen $n > 0$ sei $T(n) = \frac{n^3-1}{n^3+1}$. Zeigen Sie

$$\prod_{k=2}^{100} T(k) = T(2) \cdot T(3) \cdot \dots \cdot T(100) < \frac{2}{3}.$$

Lösungshinweise: Wenn wir einige Faktoren als Zahlenwerte aufschreiben, also

$$\prod_{k=2}^{100} T(k) = \frac{7}{9} \cdot \frac{26}{28} \cdot \frac{63}{65} \cdot \frac{124}{126} \cdot \dots \cdot T(100),$$

erkennen wir erst durch Faktorisierung das Potenzial für ein Kürzen benachbarter Faktoren

$$\prod_{k=2}^{100} T(k) = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 13}{4 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 13} \cdot \frac{4 \cdot 31}{6 \cdot 21} \cdot \dots \cdot T(100).$$

Wir schreiben für $n > 0$

$$T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n - 1)(n^2 + n + 1)}{(n + 1)(n^2 - n + 1)}$$

und verwenden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_n &= n - 1 & ; & & b_n &= n^2 + n + 1 \\ c_n &= n + 1 & ; & & d_n &= n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

Wir finden die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (n + 2) - 1 = n + 1 = c_n \\ d_{n+1} &= (n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1 = b_n \end{aligned}$$

Somit können wir in

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{a_2 b_2}{c_2 d_2} \cdot \frac{a_3 b_3}{c_3 d_3} \cdot \frac{a_4 b_4}{c_4 d_4} \cdot \frac{a_5 b_5}{c_5 d_5} \cdot \dots \cdot \frac{a_{100} b_{100}}{c_{100} d_{100}}$$

a_4 mit c_2 , a_5 mit c_3 , ..., a_{100} mit c_{98} sowie b_2 mit d_3 , b_3 mit d_4 , ..., b_{99} mit d_{100} kürzen. Übrig bleiben die Faktoren $a_2, a_3, c_{99}, c_{100}, b_{100}$ und d_2 . Somit vereinfacht sich das gesuchte Produkt zu

$$\prod_{k=2}^{100} T(n) = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot b_{100}}{c_{99} \cdot c_{100} \cdot d_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (100^2 + 100 + 1)}{100 \cdot 101 \cdot (2^2 - 2 + 1)} = \frac{2 \cdot 10101}{3 \cdot 10100} > \frac{2}{3},$$

wobei wir $\frac{10101}{10100} > 1$ verwendeten. □

Bekannte Sätze der Mathematik

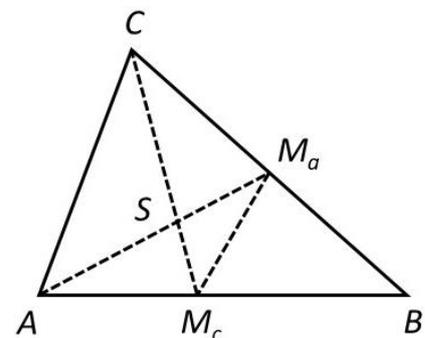
Satz. Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1 : 2.

Beweis: Wir betrachten ein Dreieck $\triangle ABC$ und verbinden die Seitenmittelpunkte M_a (bzgl. Seite \overline{BC}) und M_c (bzgl. Seite \overline{AB}). Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle M_a M_c B$ gilt

$$|\overline{AB}| : |\overline{M_c B}| = 2 : 1 \text{ und } |\overline{CB}| : |\overline{M_a B}| = 2 : 1.$$

Damit sind die beiden Strecken $\overline{M_a M_c}$ und \overline{AC} parallel.

Gemäß Strahlensatz mit diesen Parallelen und den Strahlen durch B und A sowie durch B und C folgt daraus auch $|\overline{AC}| : |\overline{M_a M_b}| = 2 : 1$.



Für die beiden Seitenhalbierenden $\overline{AM_a}$ und $\overline{CM_c}$ lässt sich daraus – wieder auf der Grundlage des Strahlensatzes mit den Parallelen $\overline{AC} \parallel \overline{M_aM_c}$ und den Strahlen durch A und M_a sowie durch C und M_c (deren Schnittpunkt wir mit S bezeichnen) – ableiten:

$$\begin{aligned} |\overline{AS}| : |\overline{SM_a}| &= |\overline{AC}| : |\overline{M_aM_c}| = 2 : 1 \\ |\overline{CS}| : |\overline{SM_c}| &= |\overline{AC}| : |\overline{M_aM_c}| = 2 : 1 \end{aligned}$$

Mit gleicher Argumentation, angewandt auf die ähnlichen Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle M_bM_aC$ (mit M_b als Seitenmittelpunkt der Seite \overline{AC}), erhalten wir auch

$$|\overline{BS}| : |\overline{SM_b}| = |\overline{AB}| : |\overline{M_aM_b}| = 2 : 1$$

□

Folgerung. Nicht jede Gerade durch den Schwerpunkt teilt die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teilfiguren.

Beweis: Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a (und dem Flächeninhalt $F = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$) und wählen als Schnittgerade eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch den Schwerpunkt. Dann beträgt der Flächeninhalt des „abgeschnittenen“ Dreiecks $\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \cdot \sqrt{3}$, also $\frac{4}{9} \cdot F$ und somit kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks. □

Einladung zum 6. Tag der Mathematik der TU Chemnitz

Am 23. März 2024 findet der nunmehr 6. Tag der Mathematik im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude der TU Chemnitz („Orangerie“, Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz) statt (Registrierung ab 09:30 Uhr). Ausführliche inhaltliche Informationen und organisatorische Hinweise sind verfügbar unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tm/2024/index.php>

Im Mittelpunkt stehen ab 11:00 Uhr wieder die Teamwettbewerbe (jeweils 3 bis 5 Teilnehmende pro Team) in den Klassenstufen 8/9 und 10-12. Natürlich gibt es für die erfolgreichsten Teams wieder Preise. Es ist eine online-Anmeldung erforderlich!

Lehrerinnen, Lehrer, Begleitpersonen und alle Mathematik-Interessierten können an zwei Fortbildungsvorträgen teilnehmen

- 11:00 bis 12:00 Uhr: Frau ANJA KLUGE (CAC ENGINEERING GmbH Chemnitz, Abiturientin der TUC): "Die Rolle der Mathematik im internationalen Anlagenbau"
- 12:00 bis 13:00 Uhr: Frau Prof. Dr. IMMA VALENTINA CURATO (Professur Statistik): "Die Superkräfte einer Mathematikausbildung, um künstliche Intelligenz zu beherrschen".

(*Hinweis:* Ebenfalls bitte online anmelden. Das Landesamt für Schule und Bildung (LASUB) wird für Lehrkräfte, die mit Einverständnis ihrer Schulleitung einen

Fortbildungsreiseantrag beim LASUB stellen, die Teilnahme am Tag der Mathematik ggf. als Fortbildung anerkennen.)

Nach der Mittagspause wird ab 13:30 Uhr Herr Dr. FRANK GÖRING zur Diskussion über "Die Fakultät für Mathematik als außerschulischer Lernort" einladen. Ab 14:00 Uhr hält Herr Prof. Dr. SEBASTIAN NEUMAYER (Professur Inverse Probleme) den Plenarvortrag mit dem Thema „Wie viel Information steckt eigentlich in einem Bild?“.

Die Veranstaltung schließt mit der Preisverleihung (ca. 16:00 bis 16:30 Uhr).

Präsenzseminar am 20. Januar 2024 (Rückblick)

Am Samstag, dem 20. Januar 2024, fand das 2. Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ statt. Wir waren zu Gast beim Öffentlich bestellten Vermessungsingenieur Detlef Wuttke (www.wuttke-vermessung.de) und der Wuttke Ingenieure GmbH (www.wuttke-ingenieure.de) in Chemnitz. Gemäß der Seminar-Thematik „Aufgabenanalyse in der Nachbereitung der Regionalrunde zur Vorbereitung des Landesausscheids der 63. MO“ ergänzten wir die Lösungshinweise der MO-Aufgabenkommission durch Lösungsvarianten und blickten auf Aufgaben mit ähnlichen Lösungsstrategien aus vergangenen MO-Jahrgängen⁹.

Unter den Olympiade-Aufgaben finden wir einen Aufgabentyp, bei dem erst durch geschicktes Anordnen oder Umformen geeignete Term-Pärchen gebildet werden können, die die geforderten Berechnungen deutlich vereinfachen. Dies war für die Lösungsfindung bei den Aufgaben **MO630923/MO631023** hilfreich. Mittels Rationalmachen von Brüchen wie $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ lässt sich die Summe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ drastisch vereinfachen. Ebenso kann in Aufgabe **MO301024** die erforderliche Berechnung gelingen. Im Aufgabenpaar **MO370945** und **MO380943** basiert der Lösungsansatz auf der bekannten (bzw. leicht beweisbaren) Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für positive reelle Zahlen. Zugleich sind sie ein Beispiel für die Idee des Seminars, sich durch Nachbereitung aktueller Aufgaben auf mögliche Fortsetzung der Thematik vorzubereiten.

Mit Bezug zu den Aufgaben **MO630922/MO631022** konzentrierten wir uns bei der Lösungsdarstellung auf Untersuchungen des Monotonieverhaltens von Folgen. Mit diesem Ansatz lassen sich auch solche Ungleichungen wie in **MO410945** lösen. Auch für die Diskussion zur Existenz von Nullstellen von Polynomen eignet sich diese Methode. Im Allgemeinen ist es bei diesem Aufgabentyp erforderlich, mit Hilfe einer Wertetabelle zunächst eine Vermutung über die Extremwerte zu formulieren und nach der Monotoniebetrachtung diese Extremwerte explizit anzugeben.

⁹ Auf Anfrage ist eine Zusammenfassung dieser Aufgabendiskussion als Zusatz zu Heft 02/2024 erhältlich.

Zur Vorstellung des Gastgebers stellte TONI WÜSTENHAGEN das Berufsbild eines Vermessers vor. Aus seinen Schilderungen über die vielfältigen Aufgaben war die Begeisterung für seinen Traumberuf greifbar. Am Beispiel eines Tachymeters und eines GNSS (System zur Positionsbestimmung via Satellit) demonstrierte er die Datenerfassung. Anschließend zeigte NICO CASPAR eindrucksvolle Anwendungen von digitalen Raumdaten. Wir konnten den Weg von der Datenerfassung über die Generierung von Modellen aus den messtechnisch erfassten Punktwolken bis zur digitalen Vermessung vielfältiger Größen am Objekt verfolgen. Das Leistungspotenzial basiert auf *Building Information Modeling (BIM)* als digitales Gebäudemodell, das sich über den gesamten Lebenszyklus eines Bauwerks – also von der ersten Idee, über die Planung und Ausführung bis zur Bewirtschaftung und schließlich zum Rückbau – erstreckt. Herzlichen Dank an MANJA REICHEL und Team für die Unterstützung für das Seminar in so angenehmen Rahmenbedingungen!

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2023

Aufgabe T-1 (Teamwettbewerb) der 10. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade (Vöcklabruck/Österreich, 2016). Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^2 + ab + c = 0 \quad ; \quad b^2 + bc + a = 0 \quad ; \quad c^2 + ca + b = 0.$$

Lösungshinweise: Die Lösungsmenge ist $(a; b; c) = \left\{ (0; 0; 0), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}$.

Wegen $0^2 + 0 \cdot 0 + 0 = 0$ bzw. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ sind beide Tripel tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems. Wir zeigen nun, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Ist eine der Zahlen a, b oder c gleich Null, so finden wir unmittelbar die Lösung $(0; 0; 0)$.

Wir nehmen nun an, dass alle Zahlen von Null verschieden sind, und führen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Wären alle Zahlen positiv, so wären die linken Seiten der Gleichungen ebenfalls positiv, im Widerspruch zu den rechten Seiten.

Fall 2: Es sind genau zwei der drei Zahlen positiv und die dritte Zahl ist negativ. O.B.d.A. nehmen wir an, es gelte $a, b > 0$ und $c < 0$.

Aus der zweiten Gleichung finden wir $b \cdot (b + c) = -a < 0$ und folglich $b + c < 0$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $c \cdot (c + a) = -b < 0$ und folglich $c + a > 0$. Addieren wir zur ersten Gleichung $a + b$, so können wir umformen:

$$\begin{aligned} a^2 + ba + a + b + c &= a + b \\ a + b + c &= a + b - a^2 - ba = (1 - a)(a + b) \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir aus der zweiten bzw. dritten Gleichung

$$a + b + c = (1 - b)(b + c) \quad ; \quad a + b + c = (1 - c)(c + a)$$

Nun ist aber wegen $c < 0$ und $c + a > 0$ das Produkt in der letzten Gleichung positiv. Somit sind auch die Produkte der anderen beiden Gleichungen positiv und es gelten deshalb die Ungleichungen $1 - a > 0$ (d.h. $a < 1$) und $1 - b < 0$ (d.h. $1 < b$). Nun können wir folgende Ungleichungskette aufstellen:

$$0 < a + c < 1 + c < b + c < 0$$

Dies ist aber ein Widerspruch, so dass es in diesem Fall keine Lösung geben kann.

Fall 3: Nehmen wir an, genau eine der drei Zahlen a, b und c sei positiv (o.B.d.A. sei dies a), dann folgt aus der zweiten Gleichung $b^2 + b \cdot c + a > 0$, was aber ebenfalls im Widerspruch zum Gleichungssystem steht.

Fall 4: Alle drei Zahlen sind negativ. Wir substituieren $a = -x, b = -y, c = -z$ mit positiven Zahlen x, y und z . Dann lässt sich das Gleichungssystem schreiben als:

$$x^2 + xy = z \quad ; \quad y^2 + yz = x \quad ; \quad z^2 + zx = y$$

Da die Gleichungen durch zyklisches Vertauschen der Variablen auseinander hervorgehen, können wir o.B.d.A. $x \leq y \leq z$ annehmen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + xy = z \geq x &\Rightarrow x + y \geq 1 \\ y^2 + yz = x \leq y &\Rightarrow y + z \leq 1 \end{aligned}$$

Die letzten beiden Ungleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$y + z \leq 1 \leq x + y \Rightarrow z \leq x$$

Wegen $x \leq y \leq z$ finden wir deshalb $x = y = z$. Setzen wir dies in eine der Gleichungen des Gleichungssystems ein, führt dies zur quadratischen Gleichung $x^2 + x \cdot x - x = 0$. Wegen $x \neq 0$ ist dies gleichbedeutend zu $x = -\frac{1}{2}$ und damit zu $a = b = c = -\frac{1}{2}$.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es keine weiteren Lösungen geben. \square

Monatsaufgabe 2/2024¹⁰

Seien $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Strecke \overline{BC} . Die Punkte E und F liegen derart in der von der Geraden BC bestimmten Halbebene, die A enthält, dass DE senkrecht auf BE steht und DE eine Tangente an den Umkreis

¹⁰ Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.03.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

von $\triangle ACD$ ist, während DF senkrecht auf CF steht und DF eine Tangente an den Umkreis von $\triangle ABD$ ist.

Man zeige, dass die Punkte A, D, E und F auf einem Kreis liegen.

Termine

Landesrunden der 63. Mathematik-Olympiade

24./25.02.2024

Regionalwettbewerbe „Jugend forscht/Schüler experimentieren“ (Sachsen)

29.02.2024: Region Nordwestsachsen – Universität Leipzig Zentrum für Lehrerbildung und Schulforschung

01./02.03.2024: Region Südwestsachsen – solaris Förderzentrum für Jugend und Umwelt gGmbH Sachsen

02.03.2024: Region Ostsachsen - KLA-Tencor GmbH, SachsenEnergie AG, Wandelbots GmbH

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html

08.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

6. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.

23.03.2024, 09:30 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter

www.tu-chemnitz.de/mathematik/tm/2024/index.php

10.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

Landeswettbewerb „Jugend forscht/Schüler experimentieren“

23.03.2024: Land Sachsen - BGH Edelstahlwerke GmbH, DAS Environmental Expert GmbH, GLOBALFOUNDRIES Management Services LLC & Co. KG

www.jugend-forscht-sachsen.de

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Nachtrag zur 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm ab Anfang März unter

www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).

13.04.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast bei ICM - Institut Chemnitzer Maschinen- und Anlagenbau e.V. (Otto-Schmerbach-Straße 19, Hochhaus 6. 09117 Chemnitz)

Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Inhalt

Vorwort.....	2
Thema 12.6 – Flächenhalbierung eines Trapezes	3
Teleskopieren von Summen und Produkten.....	8
Bekannte Sätze der Mathematik	14
Einladung zum 6. Tag der Mathematik der TU Chemnitz.....	15
Präsenzseminar am 20. Januar 2024 (Rückblick)	16
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2023	17
Monatsaufgabe 2/2024.....	18
Termine.....	19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe ¹¹	Nr.	Thema	Aufgabe
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹¹ Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.