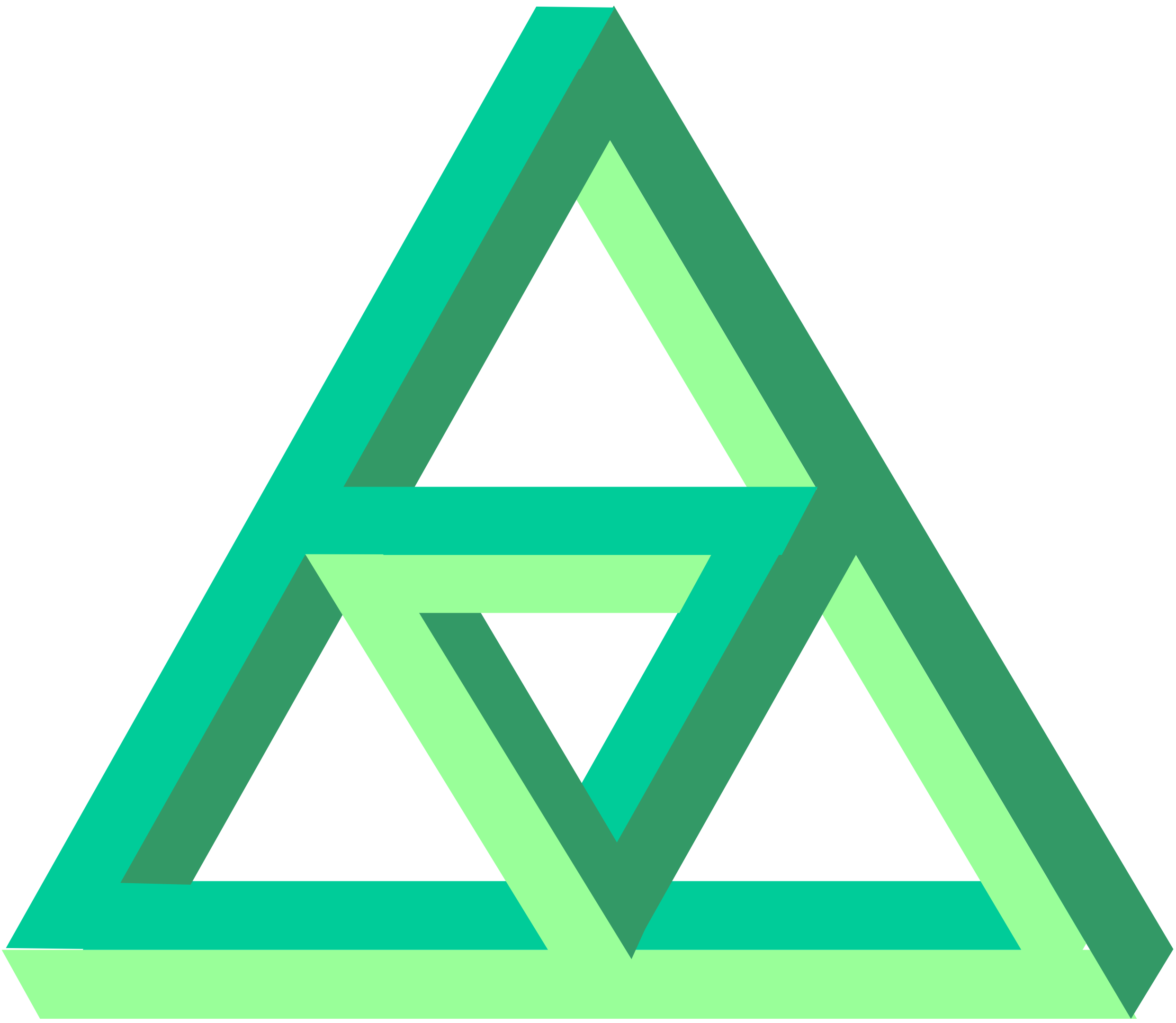
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2023 (November 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Im Rückblick auf die 1. Runde der 63. Mathematik-Olympiade greifen wir die Hinweise in der Einleitung zur Aufgabe **MO631014** auf und diskutieren Gleichungen mit Wurzelausdrücken. Wir konzentrieren uns besonders darauf, Beschränkungen der Lösungsmenge frühzeitig zu erkennen, um nur äquivalente Umformungen durchzuführen und somit Scheinlösungen zu umgehen.

Wir vertiefen die Aufgabe **MO631015** und erläutern Lösungsstrategien für geometrische Örter. Dabei ist die Lösungsfindung ein wichtiger Schritt, denn erst wenn wir die gesuchte Punktmenge gut beschreiben können, werden die erforderlichen Nachweise gelingen.

In Bezug zu den Aufgaben mit Wurzelausdrücken schauen wir in ein **Rechenbuch von 1550**, in dem das schriftliche Wurzelziehen an einem Beispiel erläutert wird.

Wir blicken auf das **2. Präsenzseminar** zurück, das am 28. Oktober 2023 an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz stattfand.

Zudem stellen wir mit **„Girls Tandem“** ein attraktives Angebot der Technischen Universität Chemnitz für Schülerinnen vor, sich mit Studienfach und -ort frühzeitig vertraut zu machen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariablen im Radikanden einer Wurzel vorkommen, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren. Zuvor sollten wir aber immer analysieren, ob aus der gegebenen Gleichung Einschränkungen für die Variablen abgeleitet werden können. Dabei beachten wir, dass ein Wurzelausdruck $\sqrt{a}$ nur für $a \geq 0$ definiert ist und stets $\sqrt{a} \geq 0$ gilt.

Für eine Gleichung wie $\sqrt{2 \cdot x + 1} = -7$ erkennen wir sofort, dass wegen der negativen rechten Seite keine Lösung existieren kann. Quadrieren wir dennoch (fälschlicherweise!), erhalten wir $2 \cdot x + 1 = 49$, also $x = 24$. Bei einer Probe stellen wir durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung (nicht in eine bereits abgeleitete Zwischengleichung!) fest, dass dies keine Lösung ergibt. Dieses Beispiel erinnert uns daran, dass Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist. Es kann zu Scheinlösungen führen, die durch eine Probe ausgeschlossen werden können.

Aufgabe 25.01. Betrachten wir die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 2}$. Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Beide Seiten sind offensichtlich nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 2$. Wieder sind beide Seiten positiv (da keiner der beiden Faktoren 0 sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6 \cdot x - 4 = 0$. Wir lösen sie mit der bekannten Lösungsformel und erhalten die Lösungen

$$x_1 = 3 - \sqrt{13} \text{ und } x_2 = 3 + \sqrt{13}\,.$$

Wegen $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13}$ finden wir $x_1 = 3 - \sqrt{13} < 0 < 6$ und können wegen obiger Einschränkung für Lösungen diesen Wert ausschließen – es handelt sich also um eine Scheinlösung.

Da wir darauf geachtet haben, dass alle Umformungen äquivalent waren, erhalten wir mit x_2 die Lösung der Gleichung. Dennoch ist es ratsam, eine Probe durchzuführen, um Ungenauigkeiten in den Umformungen auszuschließen. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von

$$\sqrt{\sqrt{13} + 3} + \sqrt{\sqrt{13} - 3} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{13} + 4}$$

zeigen lässt. Um die Gleichheit zu zeigen, quadrieren wir und erhalten die Beziehung

$$\left(\sqrt{\sqrt{13} + 3} + \sqrt{\sqrt{13} - 3}\right)^2 = 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{\left(\sqrt{13} + 3\right) \cdot \left(\sqrt{13} - 3\right)}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{\sqrt{13}^2 - 3^2} = 2 \cdot \sqrt{13} + 4$$

Da für zwei Zahlen $A, B > 0$ mit $A = B$ auch $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ gilt, haben wir x_2 als Lösung bestätigt. ❑

Aufgabe 25.02 – MO631014.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 14}.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}.$$

Lösungshinweise zu Teil a): Da die gegebene Gleichung sehr ähnlich zum zweiten Beispiel im Einleitungstext erscheint, können wir die dargestellte Lösungsidee übernehmen. In der Gleichung $\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 14}$ muss $x \geq 7$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus $x > x - 6$ auch $\sqrt{x} > \sqrt{x-6}$. Beide Seiten sind deshalb nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten

$$x - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} + x - 6 = 2 \cdot x - 14 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 4.$$

Wieder sind beide Seiten positiv (da für positive x keiner der beiden Faktoren negativ sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6 \cdot x - 16 = 0$. Wir lösen sie mit der bekannten Lösungsformel und erhalten

$$x_1 = 3 - \sqrt{25} = -2 \text{ und } x_2 = 3 + \sqrt{25} = 8\,.$$

Wir erkennen $x_1 = -2 < 7$ und können wegen obiger Einschränkungen für Lösungen diesen Wert ausschließen – es handelt sich also um eine Scheinlösung.

Da wir darauf geachtet haben, dass alle Umformungen äquivalent waren, erhalten wir mit x_2 die Lösung der Gleichung. Dennoch führen wir eine Probe durch und bestätigen x_2 als Lösung:

$$\sqrt{8} - \sqrt{8-6} = 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 8 - 14}$$

Wir haben also x_2 als Lösung bestätigt.

Lösungshinweise zu Teil b): Nur für $x \geq 7$ sind alle Radikanten nichtnegativ, so dass alle Wurzelausdrücke definiert sind. Zudem sind alle Werte der Wurzel nicht negativ, so dass wir mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen äquivalent umformen können. Wir erhalten

$$x+5+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-2}+x-2=x+14+2\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}+x-7$$
$$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-2}=2+\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$

Wieder sind beide Seiten nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen weiter äquivalent umformen:

$$(x+5)\cdot(x-2)=4+4\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}+(x+14)\cdot(x-7)$$
$$x^2+3x-10=x^2+7x-94+4\cdot\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$
$$-x+21=\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x-7}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung stets nichtnegativ ist, legen wir die zusätzliche Einschränkung $x\leq 21$ fest. Dann können wir wieder mit Quadrieren und anschließendem Zusammenfassen weiter äquivalent umformen:

$$x^2-42\cdot x+441=x^2+7\cdot x-98$$
$$49\cdot x-539=0$$
$$x=11$$

Obwohl wir äquivalent umgeformt haben und alle Einschränkungen berücksichtigten, führen wir die Probe durch:

$$\sqrt{11+5}+\sqrt{11-2}=4+3=5+2=\sqrt{11+14}+\sqrt{11-7}$$

Wir können also $x=11$ als Lösung bestätigen. ❑

Aufgabe 25.03 – MO5541035. Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen x, für welche die Gleichung $\sqrt{x+1}-\sqrt{2\cdot x-4}=2$ erfüllt ist.

Hinweis: Damit die Gleichung gelten kann, müssen insbesondere alle Wurzeln definiert sein.

Lösungshinweise: Nach einigen Versuchen zur Lösungsfindung stellen wir fest, dass die gesuchte Menge leer ist. Entsprechend dem Hinweis zum Aufgabentext finden wir vorab die Einschränkung $x\geq 2$, damit die Wurzeln definiert sind. In

$$\sqrt{x+1}=2+\sqrt{2\cdot x-4}$$

sind beide Seiten der Gleichung nicht negativ. Quadrieren und Zusammenfassen dieser Gleichung sind also äquivalente Umformungen und liefert nacheinander

$$x+1=4+4\cdot\sqrt{2\cdot x-4}+2\cdot x-4$$
$$-x+1=4\cdot\sqrt{2\cdot x-4}$$

Wegen der Einschränkung $x\geq 2$ ist aber $-x+1\leq -1$, d.h. der Wurzelausdruck müsste negativ sein. Dies widerspricht der Wurzeldefinition, somit kann es kein x geben, dass die geforderte Gleichung erfüllt. ❑

Hinweis: Erkennen wir die Unlösbarkeit an dieser Stelle nicht, würden wir wie üblich quadrieren und erhalten die quadratische Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$. Wir ermitteln mit der bekannten Lösungsformel die Lösungen

$$x_{1/2} = 17 \pm \sqrt{17^2 - 65} = 17 \pm \sqrt{224} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}$$

Verwenden wir „heimlich" einen Taschenrechner, finden wir

$$x_1 > x_2 = 17 - 4 \cdot \sqrt{14} > 17 - 14.96663 > 2$$

Beide Werte sind also im zulässigen Bereich. Nun müssen wir noch die zeitaufwendige Probe durchführen, um zu erkennen, dass beide Werte Scheinlösungen sind und die geforderte Gleichung nicht erfüllen.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2 \cdot x - 4} = 2$$
$$\sqrt{18 \pm 4 \cdot \sqrt{14}} - \sqrt{30 \pm 8 \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\left(2 \pm \sqrt{14}\right)^2} - \sqrt{\left(4 \pm \sqrt{14}\right)^2}$$
$$\left|2 \pm \sqrt{14}\right| - \left|4 \pm \sqrt{14}\right| = \sqrt{14} \pm 2 - 4 \mp \sqrt{14} \neq 2$$

❑

Aufgabe 25.04 – MO601024.

a) Ermitteln Sie alle Paare positiver Zahlen (x, y), für welche die Gleichung

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = x + y$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen x und y die Ungleichung

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} \geq x + y$$

gilt.

Lösungshinweise zu Teil a): Wir führen nacheinander die folgenden Umformungsschritte durch:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = x + y & \mid \text{quadrieren} \\
(x^2+1) \cdot (y^2+1) = x^2 + 2 \cdot xy + y^2 & \mid \text{ausmultiplizieren} \\
x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = x^2 + 2 \cdot xy + y^2 & \mid -x^2 - 2 \cdot xy - y^2 \\
x^2y^2 - 2 \cdot xy + 1 = 0 & \mid \text{binomische Formel} \\
(xy - 1)^2 = 0 & \\
xy = 1 &
\end{array}$$

Eine notwendige Bedingung für ein Paar (x, y) positiver Zahlen, Lösung der Gleichung zu sein, ist also $y = \frac{1}{x}$.

Jedes solche Paar $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ mit $x > 0$ ist aber auch Lösung, denn für ein solches Paar gilt[3]:

$$\sqrt{(x^2+1)\,(y^2+1)} = \sqrt{(x^2+1)\,\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \sqrt{(x^2+1)\,\cdot\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2+1}{x}$$

Wegen $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + y$ sind die Lösungen also genau alle Paare (x, y) der Form $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ mit $x > 0$.

Lösungshinweise zu Teil b)[4]: Stets gilt $(xy-1)^2 \geq 0$. Daraus folgt nach Ausmultiplizieren $x^2y^2 - 2\cdot xy + 1 \geq 0$. Beidseitige Addition von $x^2 + 2\cdot xy + y^2$ liefert

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + 2\cdot xy + y^2 \text{ bzw. } (x^2+1)\cdot(y^2+1) \geq (x+y)^2$$

Da das Wurzelziehen die Ordnungsrelation unverändert lässt und sowohl x als auch y positiv sind, finden wir schließlich

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} \geq \sqrt{(x+y)^2} = x + y.$$ ❑

Aufgabe 25.05 – MO561032. Bestimmen Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \sqrt{y^2+3} = 3$$
$$y + \sqrt{x^2+6} = 6$$

Lösungshinweise: Da die Ausdrücke unter den Wurzeln positiv sind (sogar mindestens 3 bzw. 6), sind die Wurzelausdrücke definiert. Da die Wurzelausdrücke stets nichtnegativ sind, finden wir die Einschränkungen $x \leq 3$ und $y \leq 6$. Durch äquivalentes Umformen und anschließendes Quadrieren erhalten wir:

$$\sqrt{y^2+3} = 3 - x \quad \Rightarrow \quad y^2 + 3 = 9 - 6\cdot x + x^2 \qquad (1)$$

bzw.

$$\sqrt{x^2+6} = 6 - y \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6 = 36 - 12\cdot y + y^2 \qquad (2)$$

Die Addition beider Gleichungen führt zu

[3] In den offiziellen Lösungshinweise wird darauf hingewiesen, dass die Probe entfallen kann, wenn ausdrücklich formuliert wird, dass alle Umformungen äquivalent waren. Es ist jedoch zu empfehlen, stets die Probe zu führen, um auch fehlerhafte Umformungen auszuschließen.

[4] In den offiziellen Lösungshinweise wird darauf hingewiesen, dass Ungleichungen stets von einer wahren Aussage aus abgeleitet werden müssen. Für die Lösungsfindung werden wir aber meist zunächst von der Behauptung aus schließen, bis wir eine offensichtlich wahre Aussage finden. Im Teil a) haben wir diese Schlussweise bereits ausgeführt. Wir müssen nur prüfen, ob wir in jeder Zeile das Gleichheitszeichen durch das Relationszeichen ersetzen können.

$$x^2 + y^2 + 9 = 45 - 6 \cdot x - 12 \cdot y + x^2 + y^2$$

also

$$6 \cdot x + 12 \cdot y = 36 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2 \cdot y \tag{3}$$

Setzen wir dies in (2) ein, erhalten wir eine quadratische Gleichung in y:

$$36 - 24 \cdot y + 4 \cdot y^2 + 6 = 36 - 12 \cdot y + y^2$$

d.h.

$$y^2 - 4 \cdot y + 2 = 0$$

Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden wir die Lösungen

$$y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Setzen wir diese Werte in 3 ein, führt dies zu

$$x_1 = 6 - 4 - 2 \cdot \sqrt{2} = 2 - 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$x_2 = 6 - 4 + 2 \cdot \sqrt{2} = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} > 2 + 2 \cdot 1 = 4 > 3$$

Die zweite Lösung entfällt aufgrund der eingangs gefundenen Einschränkungen. Als Lösungskandidat kommt also nur das Paar $\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}; 2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ in Frage. Wir wollen diese noch mittels Probe bestätigen.

$$(1) \quad 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + 3} = 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9 + 4 \cdot \sqrt{2}} =$$
$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{\left(1 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 3$$
$$(2) \quad 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 6} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{18 - 8 \cdot \sqrt{2}} =$$
$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{\left(4 - \sqrt{2}\right)^2} = 6$$

Somit haben wir das Paar $\left(2 - 2 \cdot \sqrt{2}; 2 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ als Lösung bestätigt. ❑

Aufgabe 25.06. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die

$$\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} > 2\sqrt[8]{a^2 - x^2}$$

gilt, wobei a ein beliebiger reeller Parameter sei.

Lösungshinweise: Der Definitionsbereich D (Gültigkeitsbereich für die Wurzelausdrücke) wird durch die Ungleichungen $a + x \geq 0$, $a - x \geq 0$ und $a^2 - x^2 \geq 0$ bestimmt. Nach Addition der ersten beiden Ungleichungen erhalten wir sofort $a \geq 0$.

Für nichtnegative a liefert die dritte Ungleichung $x \in [-a; a]$. Für x aus diesem Intervall sind auch die ersten beiden Ungleichungen erfüllt. Damit ist:

$$D = \begin{cases} \emptyset & falls \quad a < 0 \\ \{0\} & falls \quad a = 0 \\ [-a; a] & falls \quad a > 0 \end{cases}$$

Im Definitionsbereich lässt sich die Ungleichung dreimal quadrieren (dabei gleiche Wurzeln zusammenfassen). Dies ergibt nacheinander nach Quadrieren

$$\sqrt{a+x} + 2 \cdot \sqrt[4]{a+x} \cdot \sqrt[4]{a-x} + \sqrt{a-x} > 4 \cdot \sqrt[4]{a^2 - x^2}$$
$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > 2 \cdot \sqrt[4]{a^2 - x^2}$$

erneutem Quadrieren

$$a + x + 2 \cdot \sqrt{a+x} \cdot \sqrt{a-x} + a - x = 4 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$a > \sqrt{a^2 - x^2}$$

und erneutem Quadrieren

$$a^2 > a^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

Für $a = 0$ ist die Lösungsmenge wegen $0 \neq x$ ebenfalls leer. Unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches ist die Lösungsmenge

$$L = \begin{cases} \emptyset & falls \quad a \leq 0 \\ [-a; a] - \{0\} & falls \quad a > 0 \end{cases}$$ ❑

Thema 26 – Geometrischer Ort

In der Elementargeometrie bezeichnet geometrischer Ort (Plural: geometrische Örter) eine Menge von Punkten, die eine bestimmte, gegebene (definierende) Eigenschaft haben.

Der geometrische Ort aller Punkte, …

… die von einem gegebenen Punkt M einen festen Abstand r haben, ist der Kreis um M mit dem Radius r.
… die von einer gegebenen Geraden g einen festen Abstand d haben, ist das Paar von Parallelen zu g im Abstand d.
… die von zwei gegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte über der Strecke $\overline{AB}$.
… die von zwei gegebenen sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, ist das Paar von Winkelhalbierenden zu g und h.
… die von zwei gegebenen parallelen Geraden g und h den gleichen Abstand haben, ist die Mittelparallele zu g und h.

Um einen geometrischen Ort zu bestimmen, sind prinzipiell die Punktmenge eindeutig zu beschreiben und zwei Nachweise zu führen:

(1) Jeder Punkt des geometrischen Ortes besitzt die definierende Eigenschaft.
(2) Jeder Punkt, der nicht dem geometrischen Ort angehört, besitzt die definierende Eigenschaft nicht.

Aufgabe 26.01 – MO631015.

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände $|\overline{AP}| + |\overline{BP}|$ des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.
b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}|$ minimal wird.

Lösungshinweise zu Teil a): Die gesuchte Menge sind alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ einschließlich der Randpunkte A und B. Der minimale Wert der Summe der Abstände ist die Länge $|\overline{AB}| = c$.

(1) Für jeden Punkt P der Strecke $\overline{AB}$ gilt $\overline{|AP|} + \overline{|BP|} = |\overline{AB}| = c$.

(2) Für jeden Punkt P auf der Geraden AB links von A gilt:

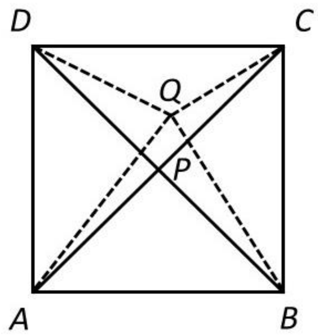
$$\overline{|AP|} + \overline{|BP|} = |\overline{AP}| + \overline{|AP|} + \overline{|BP|} = \overline{|AP|} + \overline{|AB|} = |\overline{AP}| + c > c.$$

Für jeden Punkt P auf der Geraden AB rechts von B gilt:

$$\overline{|AP|} + \overline{|BP|} = |\overline{AP}| + \overline{|BP|} + \overline{|BP|} = \overline{|AB|} + \overline{|BP|} = |\overline{BP}| + c > c.$$

Für jeden Punkt P außerhalb der Geraden AB spannen die drei Punkte ABP ein (nicht-entartetes) Dreieck auf. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt in jedem dieser Dreiecke $\overline{|AP|} + \overline{|BP|} > \overline{|AB|} = c$.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir vermuten, dass der Schnittpunkt der Diagonalen den geometrischen Ort mit der minimalen Abstandssumme zu den Eckpunkten darstellt. Dies leiten wir aus der Teilaufgabe a) ab, indem wir für die Diagonale $\overline{AC}$ und für die Diagonale $\overline{BD}$ die Abstandssummen minimieren. Nur für den Schnittpunkt der Diagonalen werden beide Teilsummen gleichzeitig minimiert.

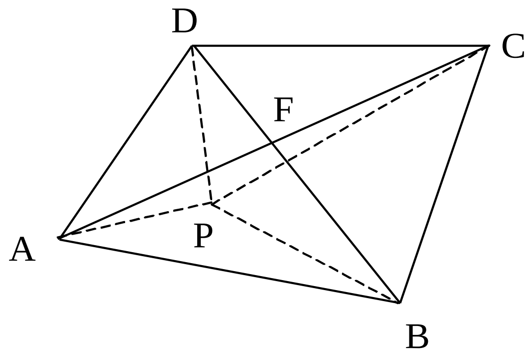


Zur Übung wollen den Nachweis explizit ausführen. Dafür verwenden wir aber den Lösungsansatz aus Teilaufgabe a). Für den Schnittpunkt P der Diagonalen finden wir bei einer Seitenlänge a die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}| = 2a\sqrt{2}.$$

Betrachten wir nun einen von P verschiedenen Punkt Q, so gelten in den Dreiecken ACQ und BQD die Dreiecksungleichungen $|\overline{AQ}| + |\overline{QC}| \geq |\overline{AC}| = |\overline{AP}| + |\overline{PC}|$ bzw. $|\overline{BQ}| + |\overline{QD}| \geq |\overline{BD}| = |\overline{BP}| + |\overline{PD}|$. Gilt $P \neq Q$, so ist in mindestens einer dieser Ungleichungen die Gleichheit nicht erfüllt, so dass die Abstandssumme von Q zu den Eckpunkten stets echt größer als von P aus ist. ❑

Folgerung 26.02. In einem konvexen Viereck realisiert der Schnittpunkt der Diagonalen den geometrischen Ort aller Punkte mit minimaler Abstandsumme zu den Eckpunkten.



Hinweis: Ein Viereck ist konvex, wenn der Schnittpunkt der Diagonalen im Innern des Vierecks liegt.

Lösungshinweise: Bei der Beweisführung für das Quadrat $ABCD$ wurden Eigenschaften des Quadrates (bis auf die Berechnung der Abstandssumme) nicht ausgenutzt. Deshalb gelingt der Nachweis auch bei einem beliebigen Viereck. Es sei F der Schnittpunkt der Diagonalen und P ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken APC bzw. DPB:

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| \geq \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FC}\right|$$
$$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PD}\right| \geq \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{FD}\right|$$

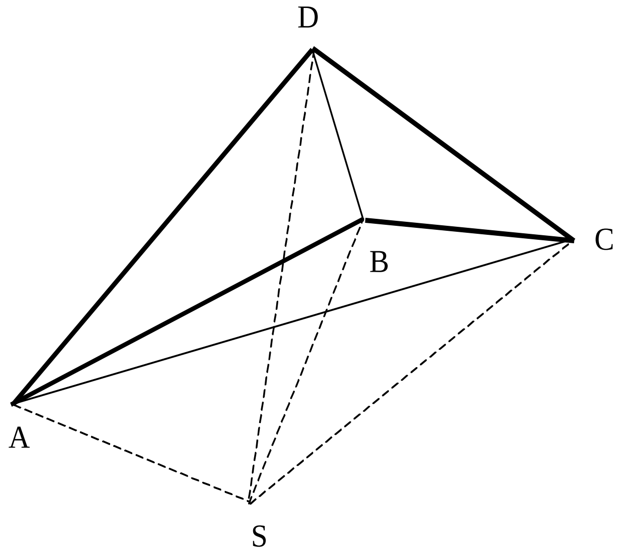
Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von P zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalen-Schnittpunkts zu allen Eckpunkten. ❑

Hinweis: Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

Aufgabe 26.03. Man finde in einem konkaven Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Innenwinkel größer als 180°) die Menge aller Punkte mit minimaler Abstandssumme zu den Eckpunkten.

Lösungshinweise: Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (o.B.d.A wie in der Skizze B) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist B der gesuchte geometrische Ort.

Es sei S ein beliebiger, von B verschiedener Punkt der Ebene. Die drei Dreiecke ASC, CSD und DAS überdecken das Dreieck ACD und somit das konkave Viereck $ABCD$. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt B. In der skizzierten Konstellation ist dies das Dreieck SCD. Damit liegt der Streckenzug CBD vollständig innerhalb des Dreiecks SCD und somit gilt:



$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

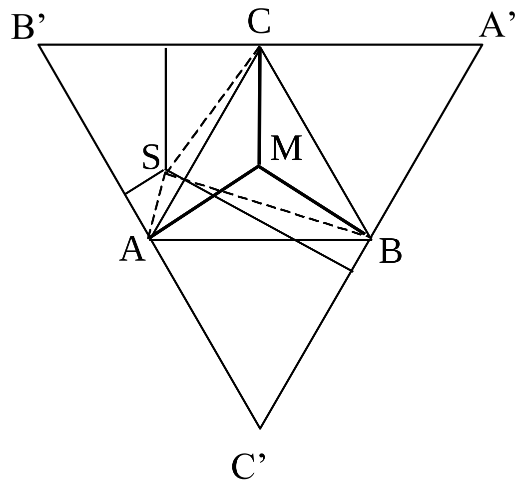
(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.) Im Dreieck ABS gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls S auf der Geraden zwischen $\overline{AB}$ liegt.) Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von S zu allen vier Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von B zu den Eckpunkten A, C und D. Der gesuchte geometrische Ort besteht somit nur aus dem Punkt B. ❑

Aufgabe 26.04. Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck genau einen Punkt mit minimaler Abstandsumme zu den Eckpunkten des Dreiecks gibt.

Lösungshinweise: Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der gesuchte geometrische Ort. Betrachten wir das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$, das aus ABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$.



Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$ ist nach dem Satz von VIVIANI[5] die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des Dreiecks $A'B'C'$. Der Beweis dieser Aussage ist einfach: Wir betrachten die Dreiecke

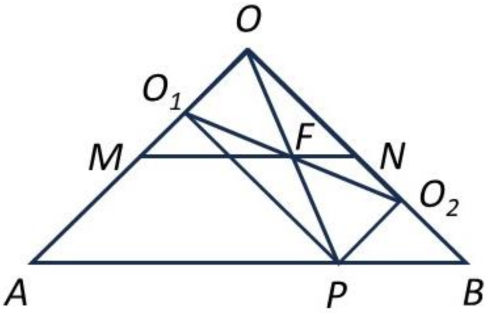
[5] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

$A'B'S$, $B'C'S$ und $A'C'S$. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

Für M stimmt die gesuchte Abstandssumme mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein. Die Abstände von S zu den Eckpunkten A, B und C können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten des Dreiecks sein $A'B'C'$. Liegt dagegen S außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von M aus. ❑

Aufgabe 26.05 – MO410946/MO411046. Es sei P ein innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen AP bzw. BP, die beide auf derselben Seite der Geraden AB liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn P die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.



Lösungshinweise: Wir untersuchen zunächst einige Grenzfälle, um den geometrischen Ort zu beschreiben. Gilt $P = A$, so entsteht über $\overline{AB}$ ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (dessen dritten Eckpunkt wir O nennen). Dann folgt $A = O_1$ und $O = O_2$ und der gesuchte Punkt ist in diesem Fall der Mittelpunkt M von $\overline{AO}$. Setzen wir $P = B$, so entsteht über $\overline{AB}$ das gleiche rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ABO. Nun wird $B = O_2$ und $O = O_1$ und der gesuchte Punkt ist in diesem Fall der Mittelpunkt N von $\overline{BO}$. Halbiert der Punkt P die Strecke $\overline{AB}$, so erkennen wir, dass der gesuchte Punkt auf der Verbindungsgeraden $\overline{MN}$ liegt. Wir vermuten deshalb, dass der geometrische Ort die Dreiecksmittellinie $\overline{MN}$ ist. (Die drei Beispiele genügen selbstverständlich nicht als Beweis!)

Für den Beweis stellen wir zuerst fest, dass die Geraden AO_1 und BO_2 sich in dem schon genannten Punkt O schneiden. Wegen $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OBA| = 45°$ ist das Dreieck ABO ebenfalls rechtwinklig-gleichschenklig.

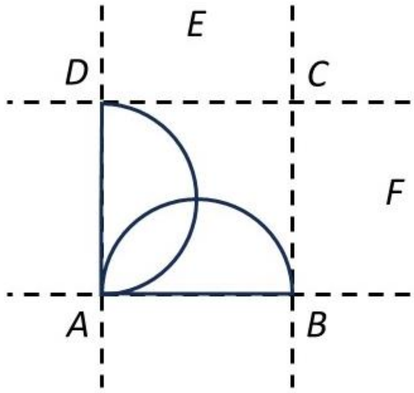
Für einen gegebenen Punkt P auf $\overline{AB}$ ist der Mittelpunkt F von $\overline{O_1O_2}$ der Diagonalenschnittpunkt im Rechteck PO_2OO_1 und somit auch Mittelpunkt der Strecke $\overline{PO}$. F liegt also im Inneren der Strecke $\overline{MN}$, die parallel zu $\overline{AB}$ verläuft.

Umgekehrt können wir zu einem gegebenen inneren Punkt F dieser Mittellinie einen Punkt P als Schnittpunkt von OF und AB konstruieren, so dass F der Schnittpunkt der entsprechenden Strecke $\overline{O_1O_2}$ ist.

Der gesuchte geometrische Ort besteht also genau aus den inneren Punkten derjenigen Mittellinie des Dreiecks ABO, die parallel zu $\overline{AB}$ verläuft. ❑

Aufgabe 26.04 - MO420924. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck ABP als auch das Dreieck ADP spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

a) Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6$ cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt $F(M)$ in Abhängigkeit von a.
b) Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M.
c) Beschreiben Sie die Menge M_0 aller Punkte Q, für die sowohl das Dreieck ABQ als auch das Dreieck ADQ stumpfwinklig ist.



Lösungshinweise zu Teil a): Die Fläche M ist in dem Quadrat $ABCD$ erkennbar und besteht aus einem vollständigen Quadratviertel mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ und aus zwei Quadratviertel mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$, aus denen ein Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$ herausgeschnitten wurde. Deshalb gilt für den Flächeninhalt von M:

$$F(M) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot a^2 \approx 0.3573 \cdot a^2 .$$

Lösungshinweise zu Teil b): Liegt ein Punkt R außerhalb des Streifens E, der durch die Geraden AD und BC gebildet wird, so ist das Dreieck ABR stumpfwinklig. Liegt ein Punkt R auf den Geraden AD oder BC, so ist das Dreieck ABR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens E liegen.

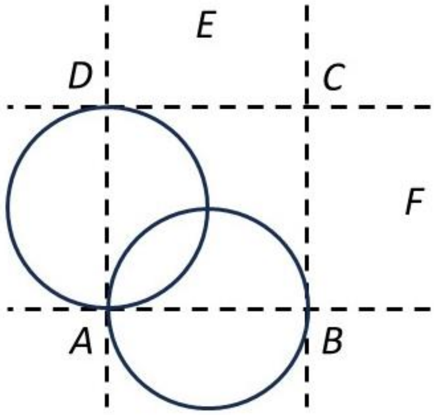
Mit analoger Argumentation: Liegt ein Punkt R außerhalb des Streifens F, der durch die Geraden AB und CD gebildet wird, so ist das Dreieck ADR stumpfwinklig. Liegt ein Punkt R auf den Geraden AB oder CD, so ist das Dreieck ADR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens F liegen.

Als Durchschnitt beider Schnittmengen ergibt sich damit die Menge der inneren Punkte des Quadrates $ABCD$. Davon entfallen aber auch noch die inneren Punkte und die Randpunkte der THALES-Kreise über den Durchmessern $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AD}$, da sonst die Dreiecke ABP bzw. ADP stumpf- oder rechtwinklig wären.

Damit verbleibt für die Menge M die beschriebene und in der Abbildung gezeigte Punktmenge übrig.

Lösungshinweise zu c): Anknüpfend an die Überlegungen zu Teil b) gehören zur Menge M' genau die Punkte, die

- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AB}$ und im Innern des THALES-Kreise über $\overline{AD}$ liegen,
- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AB}$ und außerhalb des Streifens F liegen, liegen,
- im Innern des THALES-Kreises über $\overline{AD}$ und außerhalb des Streifens E liegen, liegen,
- außerhalb des Streifens F liegen und außerhalb des Streifens E liegen.



❑

2. Präsenzseminar (Rückblick)

Am Samstag, dem 28. Oktober 2023, fand das 2. Präsenzseminar der „Mathematischen Kostproben“ statt. Wir waren zu Gast an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz.

Im ersten Teil des Seminars demonstrierten wir anhand ausgewählter Aufgabenpaare vergangener Mathematik-Olympiaden das Grundprinzip, durch intensive Nachbereitung der zurückliegenden Runde die Vorbereitung für den Fortgang des Wettbewerbs zu unterstützen[6].

So fanden wir in der Aufgabe **MO601024** in Teilaufgabe c) eine Ungleichung, die in Aufgabe **MO610936** wieder aufgenommen wurde. Damit war ein erfolgversprechender Lösungsansatz unmittelbar bekannt und es blieb Klausurzeit, um den erhöhten Schwierigkeitsgrad durch einen variablen Faktor anstelle eines festen Faktors zu bewältigen.

Im Aufgabenpaar **MO601011** und **MO601041** ging es jeweils um das kombinatorische Problem, die Anzahl voneinander verschiedener Euro-Beträge aus einer gegebenen Menge von verschiedenen Münzen zu bestimmen. Die Frage in der 1. Runde wäre noch tabellarisch lösbar gewesen. Die Nachbereitung anhand der offiziellen Lösungshinweise ließ aber die Lösungsdarstellung so strukturieren, dass diese Erkenntnisse auf die komplexere Fragestellung der 4. Runde übertragen werden konnte.

Die Aufgabe **MO631011** hat in der Aufgabe **MO621041** einen inhaltlichen Vorgänger. Auch wenn wir das Ergebnis des Vorjahres nicht zwingend zur Lösung der aktuellen

[6] Auf Anfrage ist eine Zusammenfassung dieser Aufgabendiskussion als Zusatz zu Heft 11/2023 erhältlich.

Aufgabe benötigten (weil wir die Lösung auch durch neue Überlegungen finden konnten), wäre damit eine elegante Lösungsdarstellung möglich gewesen.

Mit Blick auf die Aufgabe **MO631013** diskutierten wir die Situation, aus der Angabe von einzelnen Beispielen zu unendlich vielen passenden Beispielen bzw. zu Beispielen mit modifizierter Fragestellung zu gelangen. Auch wenn in der Hausarbeit der Einsatz von Rechentechnik zur Lösungsfindung zugelassen ist – die Lösungsdarstellung muss so gelingen, dass zu deren Verständnis nicht selbst Rechentechnik erforderlich ist.

Im Teil 2 und 3 des Seminares wurden die Aufgaben zu den Themen 25 und 26 wie in diesem Heft zusammengefasst diskutiert.

Girls‘ Tandem – MINTeinander ins Studium!

> *„Du interessierst dich für Naturwissenschaft und Technik?*
> *Du willst wissen, welches Studium zu dir passt?“*

Die Technische Universität Chemnitz bietet mit dem Mentoringprojekt „Girls‘ Tandem“ naturwissenschaftlich-technisch interessierten Schülerinnen aus Chemnitz und dem Umland die Möglichkeit, Uni-Luft zu schnuppern.

Jede Teilnehmerin bekommt eine Studentin der MINT-Fächer als Mentorin zur Seite gestellt (MINT steht für Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik), die erste **Einblicke in das Leben als Studentin** gibt, aber auch **auf fachlicher Ebene** berät. So kann die Zeit des Girls‘ Tandem genutzt werden, um eigene **Stärken zu erkennen**, sich hinsichtlich der **Studienfachwahl zu orientieren** und mit gleichgesinnten Schülerinnen **auszutauschen**. Es lassen sich erste Kontakte knüpfen, die für ein späteres Studium oder Praktikum hilfreich sein können.

Das Girls‘ Tandem-Mentoring dauert **ein halbes Jahr**, kann aber auch auf ein Jahr verlängert werden.

Die persönliche Beziehung zur Mentorin kann **ganz individuell** gestaltet werden: Kontakte per Telefon oder über Internet halten, sich an der Uni oder im Café treffen und die Häufigkeit der Treffen festlegen (z.B. Teilnahme an Vorlesungen, Seminaren und Übungen, Besichtigung der Wohnheime, Mittagessen in der Mensa, Hilfe bei der Wahl des Studienfachs…).

Besondere Höhepunkte sind aller 6 bis 8 Wochen die **gemeinsamen Veranstaltungen** mit den anderen Schülerinnen-Studentinnen-Tandems (Workshops, Experimente, Exkursionen…).

Die Anmeldung ist jederzeit möglich! Die Teilnahme ist kostenfrei.

In einem Video unter https://www.tu-chemnitz.de/gleichstellung/projekte/GiTa/videos/GiTa_stellt_sich_vor_1080p.mp4 werden weitere Informationen zu Girls' Tandem gegeben.

Kontaktdaten/Projektkoordination: Nicole Dietrich
E-Mail: gita@tu-chemnitz.de; www.tu-chemnitz.de/girlstandem

In alten Mathe-Büchern geblättert

ADAM RIES (1496 – 1559) beschreibt in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) die Konstruktion und Anwendung von Visierstäben zur Inhaltsmessung von Fässern. Dafür ist die Fähigkeit, Wurzeln aus ganzen Zahlen zu ziehen (zu radizieren) von grundlegender Bedeutung. Deshalb erklärt er diese Operation an einem Beispiel[7].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder.
Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones /
Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des visierens.

Durch Adam Riesen
im 1550. jar.

Viesier Steeb oder Ru-

eten / auff jede ohm zu machen /
vnd damit zu viesieren

In volgenden worten will ich dich leren / wie du eine rechte / gewiesse / vnd gantz geordente Ruth aussem Quadraten mache solt / must vor allem dingen / den Radix Quadrata einer jeden zal auff das geneheste wissen zu vinden / ...

	•		•		•
4	5	9	6	8	4

Sovil punct vorhanden/sovil wirstu figuren im radix haben / vnder dem letzten punct such eine zahl / die in sich multiplicirt vnd auff das geneheste von den 45 kan genomen werden / als 6 mal 6 dan 7 mal 7 nicht genomen werden / Nim 36 von 45 bleiben 9 setz vber die 5

Alsdan dublir die gefundene figur 6 die wirt 12 die setz hinder das folgende punct / sihe wie offt du nehmen magst / vnd so offt du nehmen magst / setz nach den 6 den gleichen setz dieselbe figur vnder das punct / darunder du suchen sollst.

	9		•		•			
~~4~~	~~5~~	9	6	8	4	|	6	7
	1	2	7					

Die 12 kondestu von 99 wol acht mal nehmen / aber acht mal 8 kondestu vom bleibenden nicht nemen / derhalben nim 7 mal bleibet also

---

[7] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

1
~~9~~ 7
~~4~~ ~~5~~ ~~9~~ ~~6~~ ~~8~~ 4 | 6 7
~~1~~ ~~2~~ ~~7~~ 4
1 3

Duplir 67 wirt 134 ſetz hinder das forder punct wie hi vorzeichnet / Gibt wie offt du nehmen kanſt /mag 8 mal ſein die ſetz nemlich 8 zum radix des gleichen 8 vnder 4 die erſte figur multiplicir vnd nim ſter alſo.

~~1~~
~~9~~ ~~7~~
~~4~~ ~~5~~ ~~9~~ ~~6~~ ~~8~~ ~~4~~ | 6 7 8
~~1~~ ~~2~~ ~~7~~ ~~4~~ ~~8~~
~~1~~ ~~3~~

Iſt alſo radix quadrata auſ gemelter zahl 678 wirt ſolcher radix in ſich multiplicirt wirt wider der quadrat.

Es haben alle zaln nicht gar radicem ſondern es bleibt etwas vberig / ſuch iren radix auff geneheſte alſo / multiplicir die ſelbe zal mit 1000000 als dan extrahir radicem komen dir eitel tauſent teil von ein ganzen / Aus 19 ſoltu den Radix ſuchen / ſetz darfur ſechs 0 wirt 19000000 darauſ ſuch radix wie geſagt.

~~7~~ 8
~~3~~ ~~5~~ ~~1~~ ~~7~~ ~~5~~ 3 8
~~1~~ ~~9~~ 0 0 0 0 0 0 | ~~4~~ 3 5 8 | 4 ganze
~~8~~ ~~3~~ ~~6~~ ~~5~~ 0 ~~8~~ 1 0 0 0
~~8~~ ~~8~~ ~~7~~

Iſt alſo Radix quadrata 4 ganze vnd 358 tauſent teil / das vberig tregt wenig auff dan wan ein linihen vngeferlich einer ſpannen lang als hirinnen der diameter nicht ſo langk / in 1000 zu teiln kompt wenig auff ein teil.

[Es folgt eine Tabelle der Quadartwurzeln aus ganzen Zahlen.]

Nöſel	Radix	Nöſel	Radix	Nöſel	Radix
1	1000	31	5567	61	7816
2	1414	32	5657	62	7874
3	1732	33	5744	63	7937

Diese Tabelle der Quadratwurzel wurde bis 206 … 14352 fortgesetzt. Da ein Dezimalpunkt zur damaligen Zeit noch nicht verwendet wurde, sind die Wurzeln als Ganze und Teile zu verstehen, also $\sqrt{206}$ ergeben 14 Ganze und 352 Teile.

In Anlehnung an die Anweisung von Adam Ries wollen wir $\sqrt{459684}$ ermitteln. Wir wissen, dass die Lösung drei Ziffern haben wird. Wir suchen also Ziffern a, b und c mit

$$\begin{aligned}(100a + 10b + c)^2 &= 10000a^2 + 2000ab + 100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac \\ &= 459684\end{aligned}$$

Wir wählen zunächst $a = 6$, weil $6^2 < 45$, aber $7^2 > 45$ gilt. Wir können damit den ersten Summanden verarbeiten und es verbleibt:

$$2000ab + 100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac = 99684$$

Nun suchen wir einen geeigneten Wert für b. Setzen wir $b = 8$, erhalten wir zwar im nunmehr ersten Summanden $96000 < 99684$, aber wir können den zweiten Summanden $100 \cdot b^2 = 6400$ nicht mehr subtrahieren. Also wählen wir $b = 7$ und finden

$$100b^2 + 20bc + c^2 + 200ac = 15684$$

Verlassen wir nun den historischen Rechenweg und setzen abkürzend nunmehr die Werte von a und b in die verbleibende Gleichung ein, dann erhalten wir die quadratische Gleichung $c^2 + 1340c - 10784 = 0$ mit der positiven Lösung $c = 8$.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 9/23.

Von einer fünfstelligen ganzen Zahl wird eine bestimmte Ziffer gestrichen, so dass eine vierstellige Zahl übrig bleibt. Die fünfstellige und die neue vierstellige Zahl werden addiert und ergeben die Summe 52713.

Wie groß ist die Quersumme der ursprünglichen fünfstelligen Zahl?

Lösungshinweise: Wenn von der fünfstelligen Zahl X nicht die Einerstelle E gestrichen würde, sondern eine der vorderen vier Stellen, um die vierstellige Zahl Y zu erhalten, dann würden X und Y beide auf der Einerstelle mit der Ziffer E enden. Folglich müsste ihre Summe $X + Y$ geradzahlig sein. Da aber die Summe $X + Y = 52713$ ungerade ist, wird von der fünfstelligen Zahl die Einerstelle gestrichen.

Somit gilt $X = 10Y + E$. Setzen wir dies in die Summe ein, erhalten wir $10Y + E + Y = 52713$, gleichbedeutend zu $y = (52713 - E)/11$. Nur wenn die Ziffer $E = 1$ ist, erhalten wir einen ganzzahligen Wert für Y. Er beträgt $Y = 4792$. Somit ist $X = 47921$. Die Zahl X hat die Quersumme $Q(X) = 23$. ❑

Monatsaufgabe[8] 10/23.

Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 = e^2 = const$ annimmt.

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.12.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.