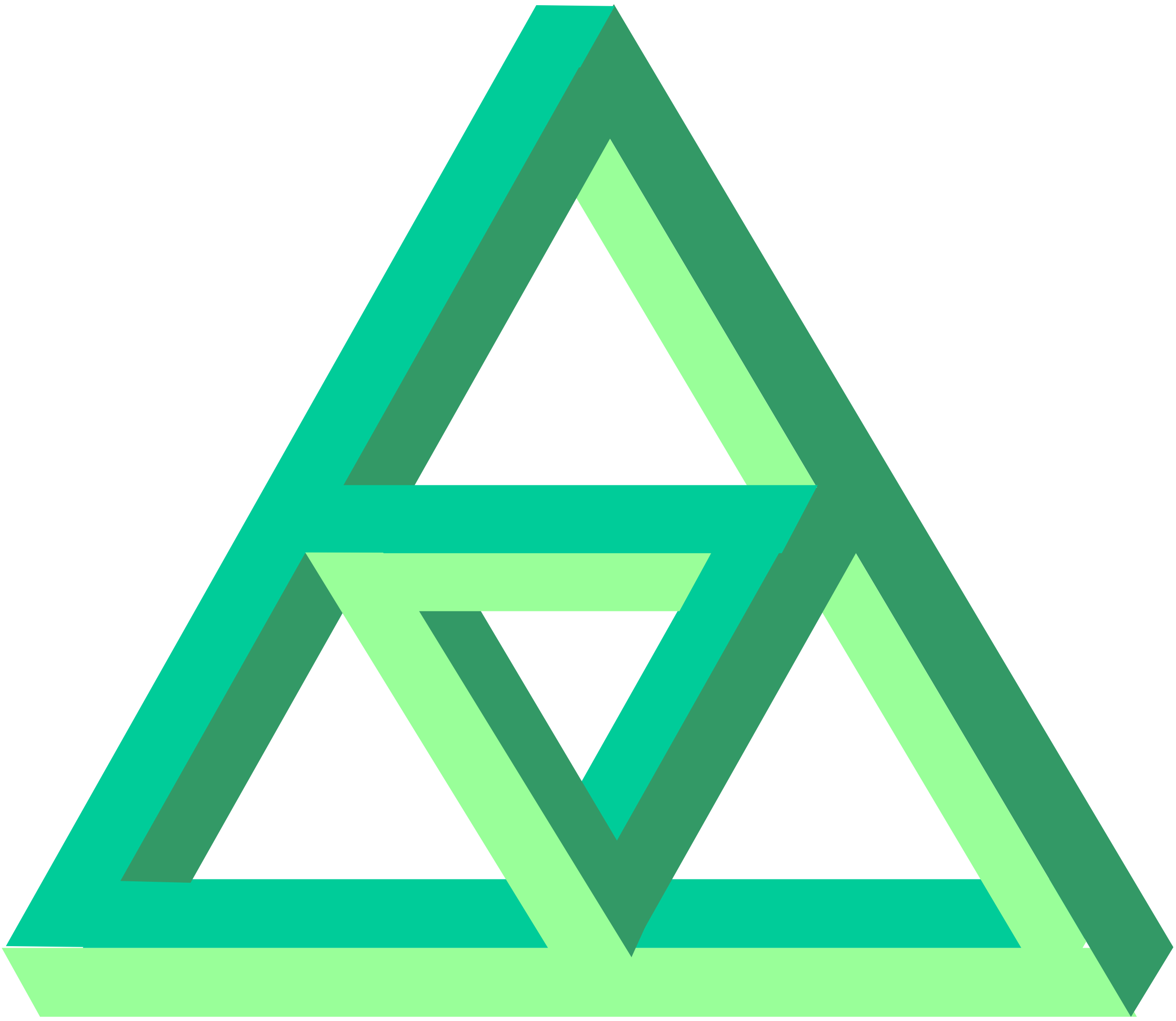
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 5/2023 (Mai 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Aufgaben wie **MO620936** finden wir eher in der Unterhaltungsmathematik. Werden jedoch alle möglichen Zahlenverteilungen oder die Anzahl aller möglichen Zahlenverteilungen gesucht, ist eine systematische Analyse erforderlich, die über geschicktes Probieren hinausreicht. Die gezeigten Beispiele können anregen, ähnliche Figuren unter derartigen Aspekten zu untersuchen.

Eine beliebte Sonderform solcher Zahlenverteilungen sind **Magische Quadrate**, die schon lange Zeit bekannt sind. Im historischen Rückblick zeigen wir, wie bereits im 16. Jh. die Lösung großer Magischer Quadrate erklärt wurde.

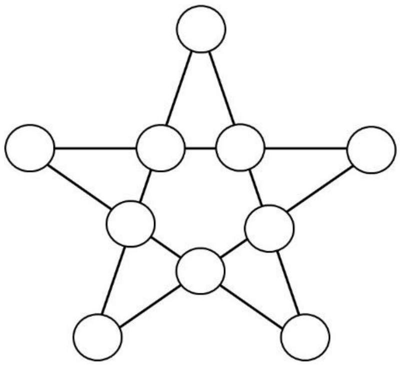
Angeregt durch den 5. Tag der Mathematik und den Abschluss der 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik blicken wir auf **Vorträge für die Schule** zurück und verweisen auf entsprechende Angebote der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz.

In Vorbereitung eines Beitrags zur Lösung von Gleichungssystemen mit Bezug zur Aufgabe **KZM 6-3** wiederholen wir den Satz von VIETA.

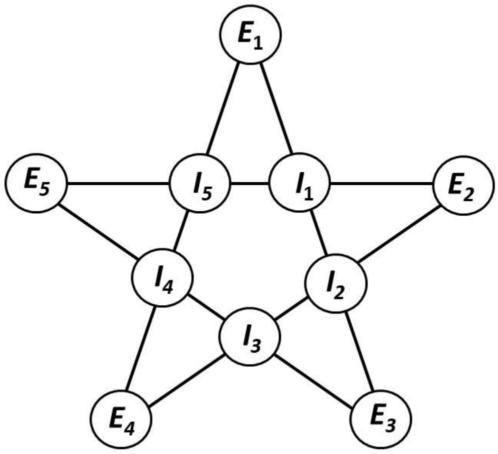
[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 22 – Zahlenverteilungen auf ebenen Figuren

Aufgabe 22.01 – MO620936. Im abgebildeten Pentagramm ist jeder der zehn eingezeichneten Kreise mit einer der Zahlen $1,2,\ldots,n$ derart zu beschriften, dass auf jeder der fünf definierenden Geraden (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) vier verschiedene Zahlen stehen. Für jede positive ganze Zahl n sei A_n die Anzahl derartiger Beschriftungen. Hierbei sollen zwei Beschriftungen auch dann als verschieden gelten, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.



a) Beweisen Sie, dass $A_4 = 0$ gilt.
b) Bestimmen Sie A_5.



Vorbemerkung: Wir nummerieren die „Eck"-Kreise mit $E_1, \ldots, E_5$ und die „inneren" Kreise mit $I_1, \ldots, I_5$ wie in der Abbildung ersichtlich. Wir verwenden v, w, x, y und z als Platzhalter für die späteren Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5. Für eine zulässige Beschriftung ist erforderlich, dass auf jeder der fünf definierenden Geraden vier verschiedene Buchstaben aus v, w, x, y und z stehen, wobei gleiche Buchstaben für dieselbe Zahl und verschiedene Buchstaben für verschiedene Zahlen stehen sollen.

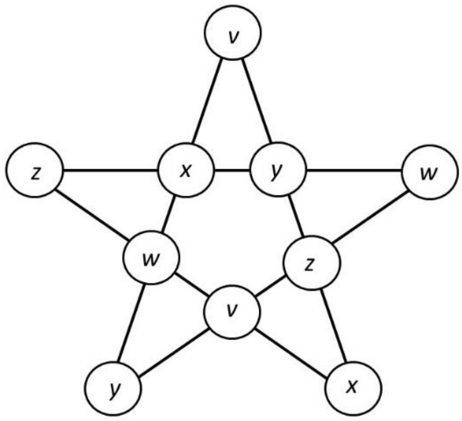
Lösungshinweise Teil a) Allgemein stellen wir fest, dass bei jeder zulässigen Beschriftung des Pentagramms mit den Zahlen $1,2,\ldots,n$ keine dieser Zahlen mehr als zweimal verwendet werden. Denn wenn wir o.B.d.A.[3] den äußeren Kreis E_1 mit x beschriften, stehen nur noch die Kreise E_2, E_5, I_3 für Beschriftungen mit x zur Verfügung. Da aber diese drei Kreise paarweise auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann nur ein weiterer Kreis mit x beschriftet werden. Wenn wir dagegen beim inneren Kreis I_1 mit der Beschriftung beginnen, stehen nur noch die Kreise I_3, I_4, E_4 für Beschriftungen mit x zur Verfügung. Da auch diese drei Kreise paarweise auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann nur ein weiterer Kreis mit x beschriftet werden.

Wenn aber jede Zahl nicht mehr als zweimal verwendet werden kann, können mit den vier Zahlen 1, 2, 3 und 4 maximal acht der zehn Kreise des Pentagramms beschriftet werden. Daraus folgt $A_4 = 0$.

[3] ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Wir können die Figur immer so drehen, dass die erste Beschriftung am oberen Eckkreis beginnt. Dann können die Bezeichnungen entsprechend angepasst werden.

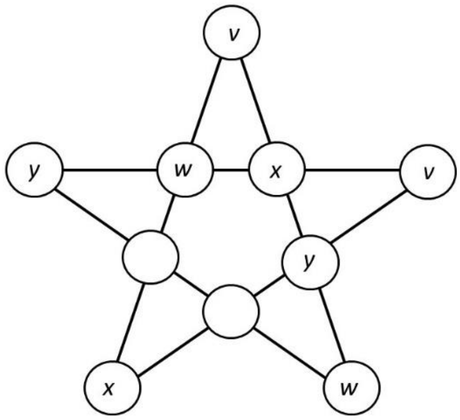
Lösungshinweise Teil b) Nach Teil a erfordert eine zulässige Beschriftung des Pentagramms mit den fünf Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5, dass jede Zahl genau zweimal verwendet wird. Wir führen eine Fallunterscheidung anhand der Beschriftung auf den Eckkreisen.

Fall 1: Auf den fünf Eckkreisen stehen fünf paarweise verschiedene Zahlen.



Aus der Argumentation im Teil a) wissen wir, dass für jeden Platzhalter die Position der zweiten dieser Zahl eindeutig bestimmt ist, weil alle Eckkreise bereits besetzt sind. Für die Belegung der Platzhalter mit den fünf Zahlen gibt es deshalb $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten.

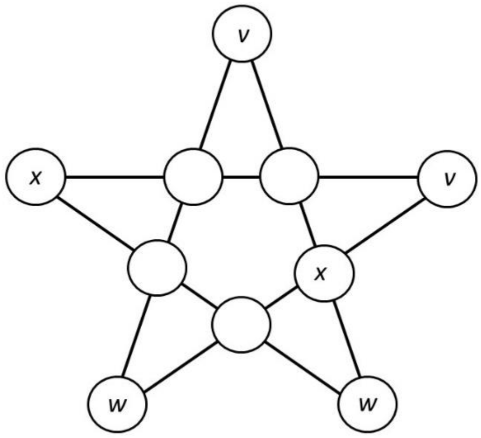
Fall 2: Auf den fünf Eckkreisen stehen vier verschiedene Zahlen.



Die zweifach verwendeten Zahlen (in der Abbildung v) müssen auf benachbarten Eckkreisen (o.B.d.A. auf E_1 und E_2) stehen.

Wieder mit der Argumentation zu Teil a) sind die Positionen der anderen Zahlen der Eckkreise eindeutig bestimmt. Die verbleibenden zwei zu beschriftenden Kreise liegen jedoch auf einer Linie (hier I_3 und I_4), so dass dieser Fall zu einer unzulässigen Beschriftung führt.

Fall 3: Auf den fünf Eckkreisen stehen drei verschiedene Zahlen.



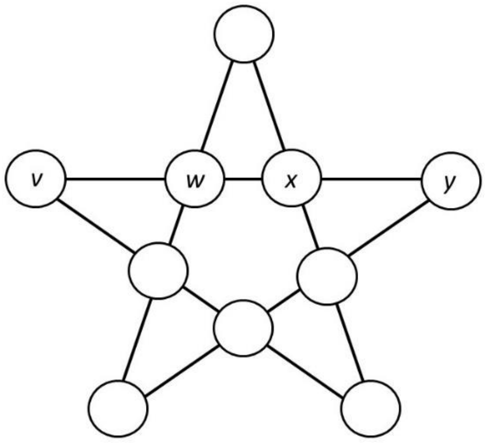
Die zweifach verwendeten Zahlen (in der Abbildung v und w) müssen auf benachbarten Eckkreisen (o.B.d.A. auf E_1 und E_2 bzw. E_3 und E_4) stehen. Da die Position I_2 eindeutig mit x beschriftet werden muss, gibt es nur zwei Möglichkeiten, die verbleibenden vier zu beschriftenden Kreis auszufüllen:

y auf I_3 und I_5 sowie z auf I_1 und I_4
oder z auf I_3 und I_5 sowie y auf I_1 und I_4.

Da es fünf Möglichkeiten gibt, die nur einmal verwendete Zahl auf einem der Eckkreise zu platzieren, gibt es insgesamt $5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 5! = 600$ Möglichkeiten.

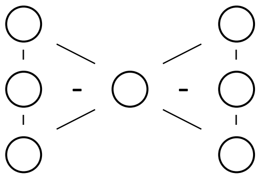
Die Fallunterscheidung ist vollständig, insgesamt gibt es also $120 + 600 = 720$ Möglichkeiten. ❑

Lösungsvariante zu Teil b) Bei einer zulässigen Beschriftung befinden sich auf den vier Kreisen einer jeden Linie vier paarweise verschiedene Zahlen. Wir wählen beispielsweise die Linie $E_5 - I_5 - I_1 - E_2$ und beschriften die Kreise o.B.d.A. mit v, w, x, y. Nun führen wir eine Fallunterscheidung bzgl. der Position I_4. Dort können für zulässige Beschriftungen nur w, x oder z stehen. Diese Unterfälle lassen sich nun vollständig diskutieren.[4]



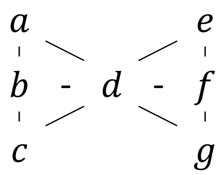
Hinweis: Es existiert keine magische Zahlenverteilung auf dieser Figur. Es ist also nicht möglich, die zehn Zahlen 1, …, 10 so zu verteilen, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und die Summen der jeweils vier Kreise auf den fünf Geraden gleich groß sind. Müssen die einzusetzenden Zahlen zwar paarweise verschieden, aber nicht aufeinanderfolgend sein, gelingen Zahlenverteilungen mit gleichen Summen auf den Geraden.

Aufgabe 22.02. In die Kreise der nebenstehenden Figur sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die Zahlen auf jeder Geraden (mit jeweils drei Kreisen) die gleiche Summe ergeben.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sich deren Eintragungen bei wenigstens einem Kreis unterscheiden.

Lösungshinweise: Wir setzen anstelle der Kreise die Buchstaben a bis g. Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt für die Geradensumme s



$$a + b + c = a + d + g = b + d + f = e + f + g = e + d + c = s$$

Durch Addition aller fünf Gleichungen erhalten wir

$$5s = 2a + 2b + 2c + 3d + 2e + 2f + 2g = 2\sum_{i=1}^{7} i + d = 56 + d$$

[4] Offizielle Musterlösung der Aufgabenkommission des MO e.V.

Damit für $1 \leq d \leq 7$ auch die rechte Seite dieser Gleichung durch 5 teilbar ist, muss $d = 4$ gelten. Damit gilt $s = 60 : 5 = 12$.

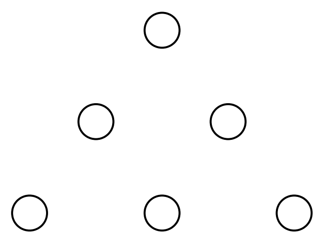
Wegen $b + 4 + f = 12$ gibt es deshalb sechs Möglichkeiten, den Wert b festzulegen: 1, 2, 3, 5, 6 oder 7. Daraus finden wir alle Lösungen durch systematisches Probieren.

b	$f = 8 - b$	a	$c = 12 - a - b$	$e = 8 - c$	$g = 12 - e - f$
1	7	2	9 > 7 *		
1	7	3	8 > 7 *		
1	7	5	6	2	3
1	7	6	5	3	2
2	6	1	9 > 7 *		
2	6	3	7	1	5
2	6	5	5 *		
2	6	7	3	5	1
3	5	1	8 > 7 *		
3	5	2	7	1	6
3	5	6	3 *		
3	5	7	2	6	1
5	3	1	6	2	7
5	3	2	5 *		
5	3	6	1	7	2
5	3	7	0 *		
6	2	1	5	3	7
6	2	3	3 *		
6	2	5	1	7	3
6	2	7	-1 *		

* In Spalte 4 führen nur die Zahlen 1, 2, 3, 5, 6 oder 7 zu einer Lösung. Zudem dürfen in jeder Zeile nur paarweise verschiedene Zahlen stehen.

Insgesamt erhalten wir 10 verschiedene Beschriftungsmöglichkeiten, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. ❑

Aufgabe 22.03 – MO270911. In die Kreisfelder der nebenstehenden Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt, und dass die drei Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösungshinweise: Es genügt, eine der in der folgenden Aufgabe gefundene Lösung anzugeben. Es ist bei der Aufgabenstellung „Geben Sie an …“ nicht erforderlich, die Herleitung einer solchen Lösung darzustellen, aber es müssen die drei Seitensummen berechnet und explizit angegeben werden. ❑

Aufgabe 22.04 – MO270921. In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung zu MO270911) sollen die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösungshinweise: Wir setzen anstelle der Kreise die Buchstaben a bis f. Wenn eine Eintragung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt für die Seitensumme s

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & b & & c & \\ d & & e & & f \end{array}$$

$$a + b + d = s \quad (1); \quad a + c + f = s \quad (2); \quad d + e + f = s \quad (3)$$

sowie

$$a + b + c + d + e + f = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Hiernach folgt durch Addition von (1), (2), (3)

$$21 + a + d + f = 3 \cdot s \text{ ; d.h. } 7 + \frac{a+d+f}{3} = s \quad (4)$$

Da s als Summe ganzer Zahlen ganzzahlig ist, muss $a + d + f$ durch 3 teilbar sein. Das ist unter den Bedingungen der Aufgabe nur möglich, wenn für a, d, f eine der in der folgenden Tabelle genannten Angaben vorliegt. Dabei genügt es, nur die dort genannte Reihenfolge zu nehmen, da jede Umordnung der Eckfelder durch Drehung oder Spiegelung erreicht werden kann.

Anschließend enthält die Tabelle jeweils den Wert $a + d + f$, den Wert s aus (4), die Werte

$$b = s - a - d \quad (5); \quad c = s - a - f \quad (6); \quad e = s - d - f \quad (7)$$

sowie die Angabe, ob die Bedingung über das Vorkommen der Zahlen von 1 bis 6 erfüllt ist.

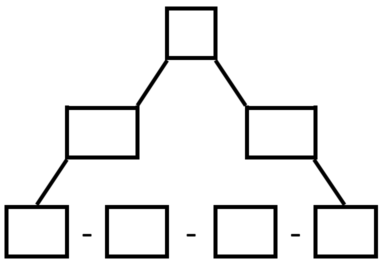
a	d	f	$a+d+f$	s	b	c	e	Kommen 1 bis 6 vor?
1	2	3	6	9	6	5	4	Ja
1	2	6	9	10	7	3	2	Nein
1	3	5	9	10	6	4	2	ja
1	5	6	12	11	5	4	0	Nein
2	3	4	9	10	5	4	3	Nein
2	4	6	12	11	5	3	1	Ja
3	4	5	12	11	4	3	2	Nein
4	5	6	15	12	3	2	1	Ja

Da die Gleichungen (5), (6), (7) zu (1), (2), (3) äquivalent sind, ist damit gezeigt, dass die vier mit ”Ja” gekennzeichneten Eintragungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

①	①	②	④
⑥ ⑤	⑥ ④	⑤ ③	③ ②
② ④ ③	③ ② ⑤	④ ① ⑥	⑤ ① ⑥

Da sie sich in den als a, d, f auftretenden Zahlen voneinander unterscheiden, sind sie auch sämtlich im Sinne der Aufgabenstellung voneinander verschieden. Somit sind genau diese vier (oder vier von ihnen nicht verschiedene) Eintragungen die gesuchten. ❑

Aufgabe 22.05 – MO310924. In die Felder der nebenstehenden Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

Lösungshinweise: Zuerst bemerken wir, dass die beiden mittleren Felder der Basis immer vertauscht werden können, ohne dass die Figur durch Spiegelung in sich selbst überführt wird. Wir wollen deshalb im Folgenden o.B.d.A. voraussetzen, dass die Zahl im zweiten Feld der Basis kleiner ist als im dritten und die im ersten kleiner als die im vierten.

Seien x die Zahl im ersten Feld der Basis, y diejenige im vierten Feld der Basis und z diejenige in der Spitze des Dreiecks sowie s die Summe der Zahlen an einer Seite dieses Dreiecks. Dann ist

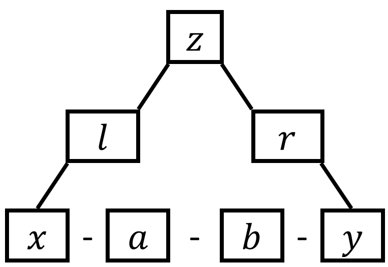
$$3s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + x + y + z = 28 + x + y + z,$$

da genau die Eckfelder an zwei Seiten beteiligt sind und alle anderen Zahlen an genau einer. Wegen $6 = 1 + 2 + 3 \leq x + y + z \leq 5 + 6 + 7 = 18$ ist $34 \leq 3s \leq 46$. Daraus folgt (da s eine ganze Zahl ist) $12 \leq s \leq 15$.

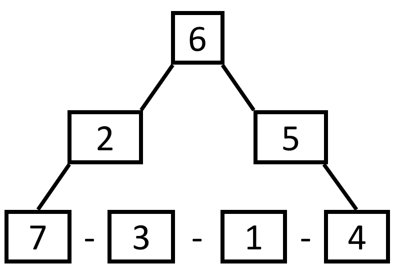
In der folgenden Tabelle geben wir für jeden möglichen Wert für s den Wert, den die Summe der Eckfelder $x + y + z$ dann annehmen muss, sowie dessen Zerlegungen in drei paarweise verschiedene Summanden zwischen 1 und 7 an:

s	$x + y + z$
12	$8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$
13	$11 = 1 + 3 + 7 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5$
14	$14 = 1 + 6 + 7 = 2 + 5 + 7 = 3 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6$
15	$17 = 4 + 6 + 7$

Seien weiterhin mit l die Zahl im Mittelfeld des linken, r die Zahl im Mittelfeld des rechten Schenkels und mit a sowie b die Zahlen im zweiten und dritten Feld der Basis bezeichnet:



Fall 1: $s = 15$. Dann ist $x + y + z = 4 + 6 + 7$ in irgendeiner Reihenfolge. Es können wegen $s - 6 - 7 = 2 < 1 + 2$ nicht 6 und 7 beide in der Basis stehen, sodass $y = 4$ folgt. Weiterhin kann dann wegen $s - 7 - 4 = 4$ nicht $z = 7$ gelten, sodass $x = 7$ und $z = 6$ folgt. Dann muss $l = s - x - z = 2$ und $r = s - y - z = 5$ gelten. Es verbleiben für a und b die Zahlen 3 und 1. Tatsächlich ist dann $x + a + b + y =$



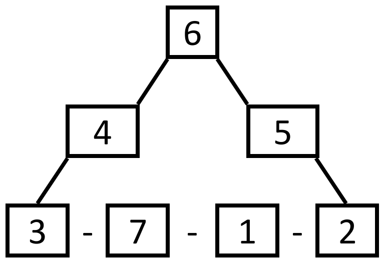
$15 = s$, sodass dies eine Lösung ist (bzw. durch Vertauschung von 1 und 3 dann zwei Lösungen).

Fall 2: $s = 14$. Dann ist $x + y + z = 14 = s$ und es müsste $l = s - x - z = y$ haben, was zu einer Doppelbelegung mit der Zahl y führen würde. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

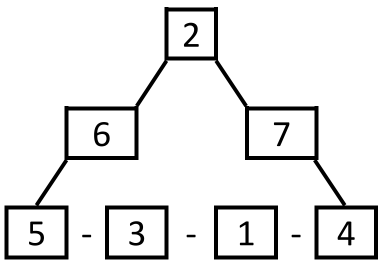
Fall 3.1: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 7$. Dann sind insbesondere $x + z$ und $y + z$ gerade, aber s ungerade, sodass sowohl l als auch r beide ungerade sein müssten. Es ist aber nur noch die einzige noch nicht verwendete ungerade Zahl 5, sodass in diesem Fall keine Lösung existiert.

Fall 3.2: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 4 + 6$. Dann können nicht 4 und 6 an der Basis stehen, da $s - 4 - 6 = 3 < 2 + 3$, da die 1 ja schon für ein Eckfeld vergeben wurde. Also muss $y = 1$ gelten. Es kann nicht $z = 6$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 6 = z$. Es kann nicht $z = 4$ gelten, denn sonst wäre $r = s - y - z = 13 - 1 - 4 = 8 > 7$. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3.3: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 3 + 6$. Dann können nicht 3 und 6 in der Basis stehen, da $s - 6 - 3 = 4 < 1 + 4$ (1 und 4 sind die kleinsten noch nicht vergebenen Zahlen). Also muss 2 in der Basis stehen und damit $y = 2$ gelten. Dann kann nicht $z = 3$ sein, da sonst $r = s - y - z = 13 - 2 - 3 = 8$ und somit größer als 7 wäre. Also muss $z = 6, r = 5$ und $x = 3$ gelten, woraus $s - x - z = 13 - 3 - 6 = 4$ folgt. Es verbleiben für a und b die Ziffern 7 und 1, und tatsächlich gilt $x + 7 + 1 + y = 3 + 7 + 1 + 2 = 13$, sodass die Zeilensummer erfüllt ist und auch hier eine Lösung (bzw. nach Vertauschen von 7 und 1 eine zweite) entsteht.

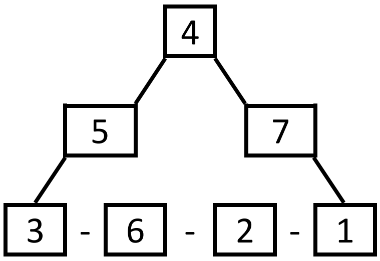


Fall 3.4: $s = 13$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 2 + 4 + 5$. Dann können weder 4 noch 5 in der Spitze z stehen, da sonst $y = 2$ und $l = s - x - z = 13 - 4 - 5 = 4$ folgen würde. Also muss $z = 2, x = 5$ und $y = 4$ sein, woraus sofort $l = 6$ und $r = 7$ folgt, sodass für a und b noch die Ziffern 3 und 1 verbleiben. Auch hier gilt wieder $x + a + b + y = 5 + 3 + 1 + 4 = 13 = s$, sodass auch dies eine (bzw. nach Vertauschen von 3 und 1 eine zweite) Lösung ist.



Fall 4.1: $s = 12$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 2 + 5$. Dann kann nicht die 5 in der Spitze z stehen, weil sonst $x = 2$ und $l = s - x - z = 12 - 2 - 5 = 5 = z$ folgen würde. Also ist $x = 5$. Mit ähnlicher Argumentation kann dann nicht $z = 2$ sein, sodass $z = 1$ und $y = 2$ folgt, was aber auf den Widerspruch $r = s - y - z = 12 - 2 - 1 = 9 > 7$ führt. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 4.2: $s = 12$ und es ist in irgendeiner Reihenfolge $x + y + z = 1 + 3 + 4$. Dann kann nicht 4 in der Basis stehen, da sonst $x = 4$, $y + z = 1 + 3$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 3 = 8 > 7$ folgen würde. Also muss $z = 4$ und damit $x = 3$ sowie $y = 1$ gelten, woraus $l = s - x - z = 12 - 3 - 4 = 5$ und $r = s - y - z = 12 - 1 - 4 = 7$ folgt. Es verbleiben für a und b noch die Ziffern 6 und 2 und wieder ist $x + a + b + y = 3 + 6 + 2 + 1 = 12 = s$, sodass wir auch hier eine (bzw. nach Vertauschen von 6 und 2 eine zweite) Lösung erhalten.



Da die Fallunterscheidung vollständig war, gibt es bis auf Vertauschung der Felder a und b (sowie Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis) genau vier verschiedene Lösungen. ❑

Aufgabe 22.06 – BWM 2007-R1-A1[5]. Gegeben sei ein regelmäßiges 2007-Eck. Man verteile auf seine Eckpunkte und auf seine Seitenmittelpunkte in beliebiger Weise die natürlichen Zahlen 1, 2, …, 4014 und bilde zu jeder Seite die Summe der Zahlen auf den Eckpunkten und der Zahl auf dem Mittelpunkt.

Man gebe eine Verteilung der Zahlen an, bei der diese Summen gleich sind.

Hinweis: Bei solch einer Aufgabenstellung ist eine Lösung auch ohne Herleitung zulässig, wenn nachgewiesen wird, dass die eindeutig beschriebene Verteilung die gleichen Seitensummen erzeugt. Bei Aufgaben mit Verwendung der aktuellen Jahreszahl ist es möglich (aber nicht zwingend), dass die Jahreszahl durch andere Zahlen ersetzbar ist. Es lohnt also, Lösungsansätze für kleinere Zahlen zu suchen und dann die Lösungsstrategie auf die ursprüngliche Aufgabe zu übertragen.

Lösungshinweise: Für $i \in \{1,2,\dots,2007\}$ bezeichnen wir mit $e(i)$ die Zahl, die dem Eckpunkt i zugeordnet wird, und mit $m(i)$ die Zahl, die der Seitenmitte zwischen $e(i)$ und $e(i + 1)$ zugeordnet wird (wobei für $i = 2007$ statt $i + 1$ der Index 1 gesetzt wird). Wir legen fest:

---

[5] Bundeswettbewerb Mathematik 2007, Runde 1, Aufgabe 1. In: Langmann, H.-H., Quaisser, E., Specht, E. (Hrsg.) Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben. Springer-Verlag Berlin – Heidelberg 2016. S. 159 ff.

$$e(i) = \begin{cases} i & \text{falls} \quad i \text{ ungerade} \\ 2007 + i & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$
$$m(i) = \begin{cases} 4014 - 2i & \text{falls } i < 2007 \\ 4014 & \text{falls } i = 2007 \end{cases}$$

Mit dieser Zuordnung sind alle 4014 Zahlen genau einmal verwendet. Wir berechnen die Seitensummen:

Fall 1: i ungeradzahlig und somit $i + 1$ geradzahlig, $i < 2007$

$$e(i) + m(i) + e(i + 1) = i + 4014 - 2i + 2007 + (i + 1) = 6022$$

Fall 2: $i = 2007$

$$2007 + 4014 + 1 = 6022$$

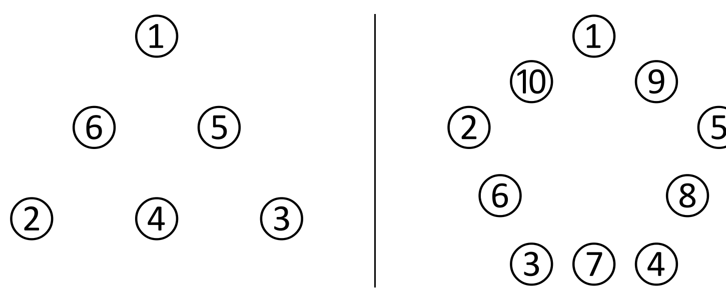
Fall 3: i geradzahlig und somit $i + 1$ ungeradzahlig mit $i + 1 \leq 2017$

$$e(i) + m(i) + e(i + 1) = 2007 + i + 4014 - 2i + (i + 1) = 6022.$$

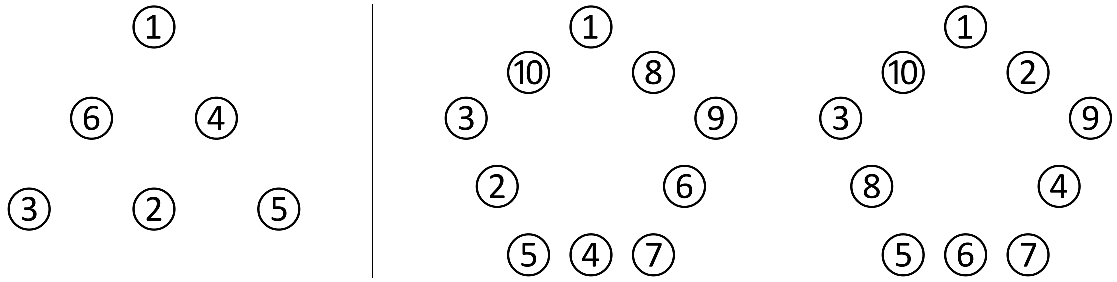
Somit realisiert die Zuordnung eine Beschriftung der geforderten Art. ❑

Hinweis: Ausgehend von den Lösungen mit Dreiecken aus Aufgabe 22.03 gelingt uns keine Verallgemeinerung.

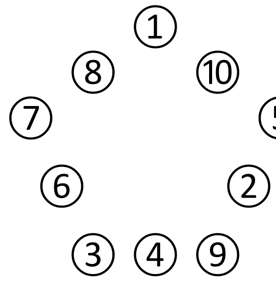
Wir versuchen, die Zuordnung beim Dreieck auf ein Fünfeck zu übertragen (die Zahlen 1 bis 5 gegen den Uhrzeigersinn auf die Eckpunkte, die Zahlen 6 bis 10 gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten). Auf diesem Weg sind keine gleichen Seitensummen erreichbar.



Wir versuchen mit der zweiten Lösung, die Zuordnung beim Dreieck auf ein Fünfeck zu übertragen (die ungeraden Zahlen 1 bis 9 gegen den Uhrzeigersinn auf die Eckpunkte, die geraden Zahlen 2 bis 10 im/gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten). Auf diesem Weg sind keine gleichen Seitensummen erreichbar.



Kommen wir dagegen auf die Idee, im Fünfeck bei der Zuordnung der ungeraden Zahlen gegen den Uhrzeigersinn jeweils eine Ecke zu überspringen, dagegen die geraden Zahlen gegen den Uhrzeigersinn auf die Seitenmitten zuzuordnen, finden wir an allen fünf Seiten die Summe 16.



Vorträge zur Mathematik für die Schule

Zum **5. Tag der Mathematik** (TdM) der Technischen Universität Chemnitz (s. Heft 4/2023) wurden am Vormittag während der Wettbewerbszeit für die Schülerinnen und Schüler zwei Vorträge angeboten, die vom Landesamt für Schule und Bildung (LASUB) für Lehrkräfte als Fortbildung anerkannt wurden[6]. So untersuchte Prof. Dr. ALOIS PICHLER (TUC, Fakultät für Mathematik, Professur Finanzmathematik) in seinem Vortrag "Wie zufällig ist der Zufall?" anhand des einfachen Münzwurfs Regelmäßigkeiten im Zufall. Er diskutierte u.a., ob der Mensch als Generator von Zufallszahlen taugt. Dr. MICHAEL PIPPIG (Intenta Automotive GmbH, Studium an der TUC bis 2009, Promotion an der Professur für Angewandte Funktionalgleichungen) berichtete in seinem Vortrag von „Mathematischen Arbeitswelten“. Am Beispiel eines Arbeitstages illustrierte er, was ein Mathematiker macht. Fernab von Vorurteilen und Klischees gab er Einblicke in einen Beruf, der sich vielfach auszahlt.[7]

Im **Plenarvortrag** des TdM behandelte Dr. ANNE KANDLER (Max-Planck-Institut für evolutionäre Anthropologie, Abteilung für menschliches Verhalten, Ökologie und

[6] Auch zum 6. TdM im kommenden Jahr werden Fortbildungsvorträge vorbereitet.

[7] Dr. Pippig stellte seine Vortragsfolien unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/ online zur Verfügung (pdf-Format, 3,2 MB) auch auf Anfrage an bino@hrz.tu-chemnitz.de

Kultur; Studium an der TUC bis 2006, Promotion an der Professur für Angewandte Mathematik) das Thema „Kann Mathematik helfen, bedrohte Sprachen zu retten?“

Abstrakt: Warum gibt es zwei Geschlechter? Warum leben nur Menschen in Städten und nicht zum Beispiel Schimpansen, mit denen wir etwa 98% unsere Gene teilen? Warum gibt es so viele Sprachen auf der Welt, warum sterben die meisten gerade aus und kann man diesen Prozess umkehren? Auch wenn diese Fragen zu sehr verschiedenen Themengebieten gehören, so haben sie doch eines gemeinsam; nämlich, dass zu ihrer Beantwortung mathematische Modelle benutzt werden. Die Mathematik ist ein wichtiges Werkzeug, welches wissenschaftlichen Fortschritt in anderen Disziplinen ermöglicht. In diesem Vortrag werden die Bedeutung mathematischer Modelle am Beispiel der sogenannten Sprachverschiebung demonstriert. Lokale Dialekte und ganze Sprachen verschwinden derzeit in einem unglaublichen Tempo. Im Schnitt geht alle 14 Tage eine Sprache verloren. Linguisten versuchen zumindest Fragmente dieser Sprachen aufzuzeichnen, zum Beispiel mit Hilfe von Tonaufnahmen. Aber was kann man tun, wenn man eine vom Aussterben bedrohte Sprache erhalten möchte? Dies ist ein Bereich, in dem Mathematiker den Linguisten zur Seite stehen können. Es wird ein mathematisches Modell gezeigt, das beschreibt, wie häufig verschiedene Sprachen im Laufe der Zeit gesprochen wurden. Solch ein Modell kann dabei helfen, die Wirksamkeit von Regierungsprogrammen zu bewerten, die den Erhalt bedrohter Sprachen fördern sollen. Als reales Beispiel wird die gälisch-englische Sprachverschiebung diskutiert.

Unter der Überschrift **„Wir machen Schule mit Vorträgen“** bietet die Fakultät für Mathematik interessante Vorträge im Umfang von ca. 60 bis 90 Minuten für die Klassenstufen 11 und 12 an. Die Vorträge können an der TU Chemnitz organisiert werden, sind aber auch an Gymnasien im Regierungsbezirk Chemnitz und im Umland möglich. Dabei entstehen für die Schule keine Kosten. Die Vorträge zeigen Zusammenhänge zu anderen Gebieten der Wissenschaften und unseres Lebens auf und leisten einen Beitrag zur Abiturvorbereitung und für das spätere Studium oder Berufsleben. Unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schule/index.de.php[8] sind aktuelle Vortragsangebote beschrieben. Sie beziehen sich unter anderem auf Anwendungen der Optimierung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, erläutern Beispiele der bildgebenden Verfahren und Signalverarbeitung oder zeigen Mathematik und Kunst. Es ist aber auch möglich, eigene Themenvorschläge anzugragen.

Am 26. April 2023 fand das Online-Seminar zum **Bundeswettbewerb Mathematik** für Lehrerinnen und Lehrer statt. Schwerpunkt des kostenlosen Seminars waren die

[8] Hier werden weitere Angeboten beschrieben: Besuch an der Fakultät für Mathematik, Praktika, Projektarbeiten, Besondere Lernleistungen, Online-Lernangebote, individuelle Betreuung, …

Lösungen der Aufgaben der abgeschlossenen Wettbewerbsrunde. Daneben beschäftigte es sich auch mit organisatorischen Fragen. Es wurde über unerwartete Lösungswege, den mathematischen Hintergrund der Aufgabenstellungen und typische Lösungsmuster der Teilnehmenden gesprochen. Das Seminar wurde von PATRICK BAUERMANN (Leiter Bundesweite Mathematik-Wettbewerbe) geleitet. Er war im Gespräch mit Prof. Dr. RAINER KAENDERS (Vorsitzender Aufgabenausschuss des Bundeswettbewerbs) und StD i.R. KARL FEGERT (Vorsitzender Korrekturkommission).

Das erklärte Ziel des Wettbewerbs ist es, das Beweisen von mathematischen Aussagen zu vervollkommnen. Beweise müssen präzise, schlüssig, vollständig und richtig aufgeschrieben werden. Hilfsmittel sind zugelassen, aber die Darstellung muss ohne solche Hilfsmittel nachvollziehbar sein. Insbesondere kann Rechentechnik zur Lösungsfindung eingesetzt werden, Programmcodes sind jedoch in Beweisen nicht zulässig (weil der Korrektur zur Prüfung ebenfalls Rechentechnik nutzen müsste).

Mit über 1400 Teilnehmenden in der 1. Runde wurden die Aufgaben gut angenommen. Die Einstiegsaufgabe trug sicher dazu bei: Der Text war verspielt (und damit eher untypisch für BWM). Für die Beantwortung der ersten beiden Teilaufgaben genügte die Angabe eines Beispiels eines passenden Verlaufs. Da die dritte Teilaufgabe zu verneinen war, bestand hier jedoch Argumentationsbedarf. Dies konnte modulo 3 gelöst oder ganz „formelfrei“ verbal erfolgreich bewältigt werden.

Die Lösung zur zweiten Aufgabe konnte man durch Probieren finden. Sie ließ sich auch mittels geeigneter Software finden. Für die Lösungsdarstellung genügte es, die Probe vorzurechnen. Der wichtigere Teil der Aufgabe war jedoch die Argumentation, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Hier gibt es viele, in den veröffentlichten Lösungshinweisen gezeigte Ansätze, die für eine tiefere Beschäftigung mit solchen Aufgaben anregen sollte.

Ein Schwerpunkt in der Lösungsdiskussion zu den Aufgaben 3 und 4 war die Nutzung der Recherche nach ähnlichen Problemen und die dabei möglichen Übertragungen auf die zu lösende Fragestellung. Breiten Raum nahm die Auswirkungen von ChatGPT. Noch erscheint dessen Einfluss auf das mathematische Argumentieren unkritisch, so dass mit der Aufgabengestaltung gegengesteuert werden kann. Zudem wird darauf gesetzt, dass die Teilnahme am BWM eine Ehrensache ist und die persönliche Leistungsfähigkeit herausfordert. Zur 3. Runde als Höhepunkt des Wettbewerbs, die als Gespräch mit einer Fachjury stattfindet, wird ChatGPT auch zukünftig keine Rolle spielen.

Das nächste Online-Seminar wird im September stattfinden und sich den Aufgaben der aktuell laufenden Runde widmen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist ein Quadrat der Seitenlänge n, auf dessen Feldern n^2 paarweise verschiedene natürliche Zahlen so platziert werden, dass jede Zeile und jede Spalte sowie die beiden Diagonalen die gleiche Summe ergeben. Sie sind bereits aus China seit ca. 2800 v.u.Z. bekannt. Eines der berühmtesten magischen Quadrate ist in ALBRECHT DÜRERS (1471 – 1528) Kupferstich „Melancholia I“ zu finden (s. nebenstehende Abbildung). Es vereint eine Vielzahl interessanter Eigenschaften von bestimmten magischen Quadraten und zeigt in der Mitte der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ADAM RIES (1496 – 1559) beschäftigt sich zum Schluss seines 2. Rechenbuchs „Rechenung auff der Linihen vnd Federn“ (1522, gedruckt in Erfurt) mit magischen Quadraten der Ordnung 3. Abschließend gibt er ohne weitere Erläuterungen ein magisches Quadrat der Ordnung 4 an – das DÜRER-Quadrat, in dem die zwei mittleren Spalten vertauscht sind. RIES nimmt später in seinem 3. Rechenbuch (1550, gedruckt in Leipzig) darauf Bezug und diskutiert ausführlich die Bildung magischer Quadrate[9].

Rechenung nach der lenge / auff den Linihen vnd Feder. Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones / Practica genant /

Mit grüntlichem vnterricht des viſierens.

Durch Adam Rieſen
im 1550. jar.

[... Seiten 103 bis 106]

Zum beſchlus der federn / will ich dir alhie erzehlen ſo etlich zaln / natürlicher ordenung / oder gleichen mitteln in ein geuierdt geſatzt werden / wie du die ordnen ſolt / hiermit in einer zal fur ſich oder vnderſich / des gleichen creutzweis eine zal wird / das iſt in einer zeil ſovil als in der andern.

Item in 3 mal 3 als 9 velder gleich einem gevierden quadraten / ſollen geſatzt werden 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. das vberal ein Summa wirt alhie thu 1 zu 9 wird 10 derhalbe teil iſt 5. kompt in die mitte des geviertdes als in das fünffte feldt / vnder dem ſetz 1 als die erſte zal und zele diametraliter / das iſt von einem winckel zum anderen / wie die zaln angegeben ſeind / kanſtu nicht vnderſich / ſetz das ſelb in die oberſte zeil gerad vberſich zele fort /

[9] Es wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen.

kompt auſſerhalb der rechten handt / ſetz zu forderſt gen der lincke hand zele alſo nach den winckeln / Begibt ſich das ein zall ſter / nach der ſeiren darunter / ſetz du die letzte zal gen der lincken handt / zele fort / bis du die letzte zal erreichſt / vnd alle felder mit zaln beſchrieben ſeind / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern.

4	9	2	
3	5	7	~~3~~
8	1	6	~~8~~
~~4~~	~~9~~	~~2~~	~~7~~

Nach 1 volget 2 kompt auſſerhalb des gevierds/ ſetz 2 zu oberſt / ſo komen 3 auch auſſerhalb des gevierden / ſetz zu forderſt gen der lincken handt / zele fort / quemen 4 an ſtatt des 1 ſetz 4 nachm winckel zu rück / thu die auf kompt auſſerhalb / ſetz zu oberſt / zele herab 4 / 5 / 6 wie hie obe komen 7 auſſerhalb / ſetz in das euſſerſte mittlere felt / ſo komet 8 auſſerhalb / ſetz gerad gen der lincken hant zele alſo fort / kompt wie oben / vnd ſeind in jeder zal 15.

Item 1/2/3/4/5/6 etc, in 5 mal 5 felder zu ſetzen / al hie iſt die erſte zal .1 die letzte zal 25 thut 26 / der halbe theil iſt 13 komet in die mitte als an das dreizehende feldt / wu ſchacht weis gemacht ſetz 1 vnder 13 zele fort wie hie oben gethan / ſo haſtu an einer zeil ſovil als an der andern wie hie 65 in jder zeil.

11	24	7	20	3	
4	12	25	8	16	~~4~~
17	5	13	21	9	~~17~~
10	18	1	14	22	~~10~~
23	6	19	2	15	~~23~~
~~11~~	~~24~~	~~7~~	~~20~~	~~3~~	~~16~~

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	~~5~~
30	6	24	49	18	36	12	~~30~~
13	31	7	25	43	19	37	~~13~~
38	14	32	1	26	44	20	~~38~~
21	39	8	33	2	27	45	~~21~~
46	15	40	9	34	3	28	~~46~~
~~22~~	~~47~~	~~16~~	~~41~~	~~10~~	~~35~~	~~4~~	~~29~~

Desgleichen in 7 mal 7 zu ſetzen von 1 an zuheben iſt 1 vnd 49 gerad 50 der halbe theil iſt 25 komet in die mitte darunter heb an zu zeln / nach den winckeln gen der rechten handt 1/2/3 etc. wie alhie wirt 175.

Desgleichen kanſtu auch in 9 mal 9 als in 81 feldern ſetzen das allenthalben ein zal kompt wie hie 361.

37	78	29	70	21	62	13	54	5	
6	38	79	30	71	22	63	14	46	~~6~~
47	7	39	80	31	72	23	55	15	~~47~~
16	48	8	40	81	32	64	24	56	~~16~~
57	17	49	9	41	73	33	65	25	~~57~~
26	58	18	50	1	42	74	34	66	~~26~~
67	27	59	10	51	2	43	75	35	~~67~~
36	68	19	60	11	52	3	44	76	~~36~~
77	28	69	20	61	12	53	4	45	~~77~~
~~37~~	~~78~~	~~29~~	~~70~~	~~21~~	~~62~~	~~13~~	~~54~~	~~5~~	~~46~~

Mit 11 mal 11 / 13 mal 13 vnd allen ungeraden zaln thu gleicher weis / allhie thut 11 mal 11 / 121 iſt 61 der eine teil vnd 60 der ander teil kompt 61 in die mitte deſ gevierdes / gleich wie das punct in der mitte deſ Circkels iſt / darunter ſetz 1 danach winckelmeſſig 2 / 3 / 4 etc.

Wirt alſo von 56 dem obern eck bis auff 66 das vnder eck gezelt / thut die Summa jder zeil 671 / furſich / vnderſich / auch creutzweis.

Von den ungeraden / oder ungleichen zaln / hab ich bis here gnugſame vnterricht gethan / wie ein jede in ſich multiplicirt / ein gevierte flech auff alle ſeitten gleich brengt / vnd auff alle ſeitten / furſich / vnderſich auch creutzweis eine Suzmma komet / Nach dem die zaln / Natürlicher ordenung einander volgen / gleich en mitteln / oder irgent einer quantiter / will ich itzt ein wenig melden wan ein gerade zal alſ 2 / 4 / 6 / 8 etc. in ſich gefürt / vnd ein gevierd mache / wie gleicherweis zaln / natürlicher / vnderſcheidener des gleichen der quantiteten geſatzt ſolln werden / das allenthalben gleiche ſumma wie hie oben angezeigt kome.

Hie ſol ein jder wiſſen / das 2 mal 2 als 4 nicht zu gleich komen kan / dan 1 / 2 / 3 / 4 in eine gevierdt geſetzt ſo an jmezehent thut / in vier gantze das nicht bleibt vnmüglich / Creutzweis mag das ſein / oder fur ſich vnd vnderſich nicht.

1	2
3	4

Nach zweien in ſich volget die an der gerade zal / natürlicher ordenung / 4 / ſo die in ſich gefürt / werden 16 müſſen alda vier für ſich vnd 4 vnderſich ſein / es kann von 1 oder einer anderen zal angehoben werden / jdoch das Natürlich / oder vnterſchiedtlich etc. zeln da iſt / hie vnd im volgenden zaln ſo gerad vnd in ſich gefürt / kann allenthalben gleicheit gehalten / welche in zwei mal zwei nicht ſein mag.

In 4 mal 4 das iſt ein Roſt 4 löcher fur ſich vnd 4 vnderſich / zu ſetzen.

5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

In meinem vorigen Büchlein / ſo 1522 in Erffurdt gedruckt hab ich gelernt / vor wechſſelung aufwendig vnd inwendig vber eck / darbey las ichs noch beruhen / ſtet.

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

Iſt alhie in jeder zeil / furſich / auch vnderſich desſgleichen vber eck 50.

Dem nach mag ein jeder von jeme ſelbſt / machen in 6 mal 6 / oder 8 mal 8 zu ſetzen / wie der ausganck der erſten vnd oberſten zeil gen der vnderſten / alſo iſt der ausganck der anderen zeil / gegen an einer der letzten / wu zuvor von der rechten / wirt als dan von der lincken / gen der rechten handt gegangen / alſo hinfort wie hie klerlich vor augen.

In ſechs felder fur ſich / auch vnderlich zu ſetzen /

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Volgendt werden in 64 felder gesetzt zaln / als 1 2 3 4 5 6 also hinfort das an einer zeil / sovill als an der andern komen den ausganck / sihestu vor augen / magst mit andern geraden zaln / gleich messig handeln wirt vberal 260.

In acht feldern zu setzen dass allenthalben gleich werde 260.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	41	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Bekannte Sätze der Mathematik

Der Satz von VIETA (oder auch Wurzelsatz von VIETA) ist benannt nach dem französischen Mathematiker FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603), der ihn in seinem postum (1642) erschienenen Werk *„De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo“* (*„Zwei Abhandlungen über die Untersuchung und Verbesserung von Gleichungen“*) bewies. Der Satz macht eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer algebraischen Gleichung.

Satz. Seien p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 deren Lösungen (Wurzeln). Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt durch Ausmultiplizieren der Nullstellenform nach Koeffizientenvergleich. Dafür verwenden wir eine Folgerung der Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra, dass sich jedes (normierte) Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten, dass n reellwertige Nullstellen besitzt, als Produkt von n Linearfaktoren darstellen lässt. Sind also für $n = 2$ die Werte x_1 und x_2 deren Lösungen, so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

und somit $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Alternativ folgt der Satz aus der pq-Formel: Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt

$$x_{1,2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Addieren der beiden Lösungen ergibt:

$$x_1 + x_2 = \left(-\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -\tfrac{p}{2} - \tfrac{p}{2} = -p$$

Multiplizieren ergibt nach der dritten binomischen Formel:

$$x_1 x_2 = \left(-\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \left(-\tfrac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q.$$

Der Satz von Vieta lässt sich auf Polynomgleichungen bzw. Polynome beliebigen Grades verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist die Grundlage für das Lösen von Gleichungen höheren Grades durch Polynomdivision. Wir verwenden hier lediglich den Sonderfall reellwertiger Lösungen.

Ist x_0 eine reellwertige Lösung des (normierten) Polynoms

$$P(x) = \sum_0^n a_n \cdot x^n = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

(d.h. $P(x_0) = 0$) mit reellwertigen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ (normiert, d.h. $a_n = 1$), so gibt es ein Polynom $Q(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten mit

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x).$$

Sind alle n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ reellwertig, so können wir das Abspalten der Linearfaktoren fortsetzen und erhalten

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Nun ergibt sich der verallgemeinerte Satz von VIETA durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich[10]:

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

[10] hier für $n \geq 4$ dargestellt. In Wettbewerbsaufgaben genügt meist die Verallgemeinerung auf $n = 3$.

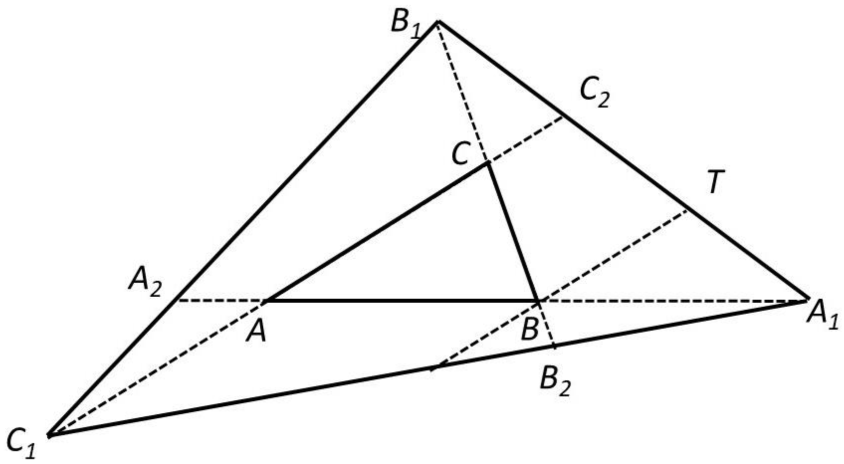
$a_{n-2} = (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$
$a_{n-3} = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$
…
$a_0 = (-1)^n \cdot x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

Folgerung. Sind alle Lösungen eines Polynoms ganzzahlig, so ist jede Lösung ein Teiler des Absolutgliedes a_0. Somit können wir eine Lösung durch systematisches Probieren aller positiven und negativen Teiler finden. Durch Abspalten des zugehörigen Linearfaktors können wir das verbleibende Polynom untersuchen, dessen Grad um 1 gegenüber dem Ausgangspolynom reduziert wurde.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 3/23

Im Dreieck ABC wird A an B nach A_1, B an C nach B_1 und C an A nach C_1 gespiegelt. Man konstruiere das Dreieck ABC, falls nur die Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu diskutieren.

Lösungshinweise Analyse:
Die Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus schneide A_1B_1 in C_2, die Parallele dazu durch B schneide A_1B_1 in T. Weiterhin schneiden die Verlängerungen von $\overline{AB}$ über A hinaus B_1C_1 in A_2 und von $\overline{BC}$ über B hinaus A_1C_1 in B_2.



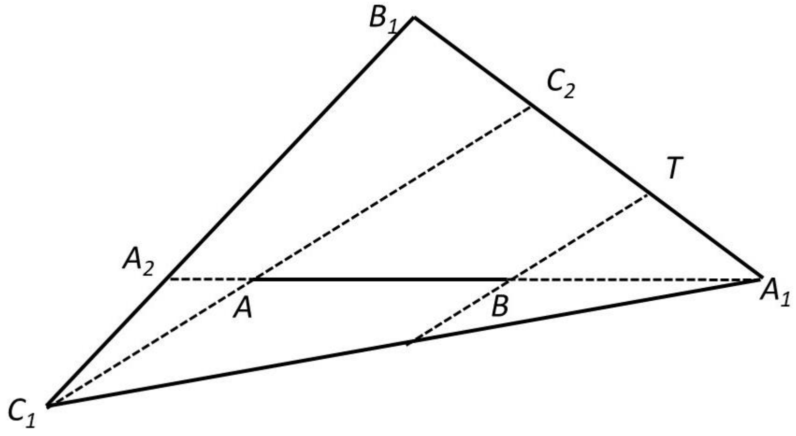
Wegen der Bildungsvorschrift $|\overline{AB}| = |\overline{BA_1}|$ bzw. $|\overline{BC}| = |\overline{CB_1}|$ (Spiegelungen an B bzw. C) ist nach Strahlensatz bzgl. der Strahlen A_1A und A_1C_2

$$|\overline{A_1T}| : |\overline{TC_2}| = |\overline{A_1B}| : |\overline{BA}| = 1$$

und bzgl. der Strahlen B_1B und B_1T

$$|\overline{B_1C_2}| : |\overline{C_2T}| = |\overline{B_1C}| : |\overline{CB}| = 1$$

Somit teilt der Punkt C_2 die Strecke A_1B_1 im Verhältnis $|\overline{A_1C_2}| : |\overline{C_2B_1}| = 2 : 1$. Ebenso können wir beweisen, dass der Punkt A_2 die Strecke B_1C_1 im Verhältnis $|\overline{B_1A_2}| : |\overline{A_2C_1}| = 2 : 1$ teilt und der Punkt B_2 die Strecke C_1A_1 im Verhältnis $|\overline{C_1B_2}| : |\overline{B_2A_1}| = 2 : 1$ teilt.



Konstruktionsbeschreibung:

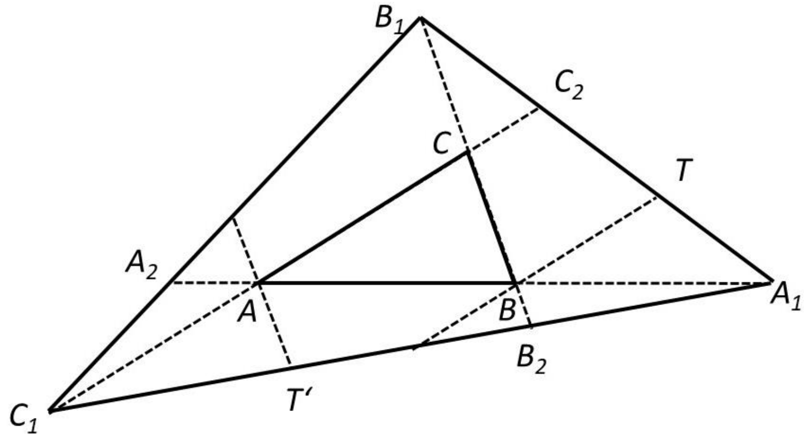
1) Im gegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ dritteln wir die Dreiecksseiten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{B_1C_1}$ und markieren die Teilungspunkte C_2, A_2, die näher an B_1 bzw. C_1 liegen.

2) Wir verbinden A_1 mit A_2, und C_1 mit C_2. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{C_1C_2}$ mit A.

3) Wir konstruieren die Parallele zu $\overline{C_1C_2}$ durch T, dem zweiten Teilungspunkt auf $\overline{A_1B_1}$, und bezeichnen den Schnittpunkt mit $\overline{A_1A_2}$ mit B.

4) Wir verbinden B_1 mit B, verlängern über B hinaus und bezeichnen den Schnittpunkt mit $\overline{C_1A_1}$ mit B_2. Den Schnittpunkt von $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{B_1B_2}$ bezeichnen wir mit C.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.



Beweis: Nach Konstruktionsschritt 3) können wir für die Strahlen $\overline{A_1C_2}$ und $\overline{A_1A}$ mit den Parallelen $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{BT}$ den Strahlensatz anwenden und finden

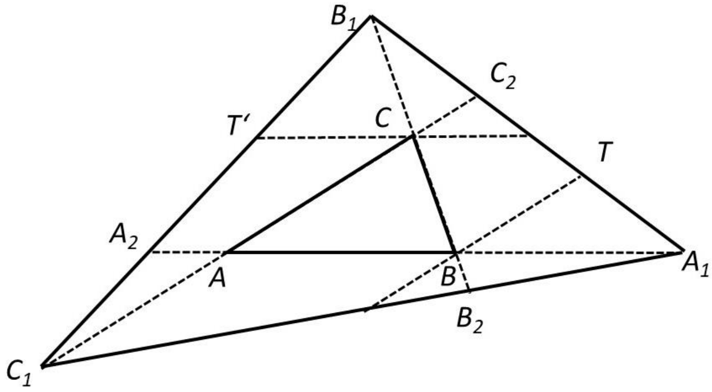
$$|\overline{AB}| : |\overline{BA_1}| = |\overline{C_2T}| : |\overline{TA_1}| = 1.$$

Also gilt $|\overline{AB}| = |\overline{BA_1}|$, d.h., A_1 ist der Spiegelpunkt von A bezüglich B.

Nach Konstruktionsschritt 4) können wir auch für die Strahlen $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1A_1}$ mit den Parallelen $\overline{C_1C_2}$ und $\overline{BT}$ den Strahlensatz anwenden und finden

$$|\overline{BC}| : |\overline{CB_1}| = |\overline{TC_2}| : |\overline{C_2B_1}| = 1.$$

Also gilt $|\overline{BC}| = |\overline{CB_1}|$, d.h., B_1 ist der Spiegelpunkt von B bezüglich C.



Wir zeichnen als eine Hilfsgröße die Parallele zu $\overline{A_1A_2}$ durch C und bezeichnen deren Schnittpunkt mit $\overline{C_1B_1}$ mit T‘. Dann können wir auch für die Strahlen $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1A_2}$ mit den Parallelen $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{T'T}$ den Strahlensatz anwenden und finden

$$|\overline{A_2T'}| : |\overline{T'B_1}| = |\overline{BC}| : |\overline{CB_1}| = 1.$$

Also ist T‘ der zweite Teilungspunkt nach Konstruktionsschritt 1) auf der Seite $\overline{C_1B_1}$. Somit können wir auch für die Strahlen $\overline{C_1B_1}$ und $\overline{C_1C}$ mit den Parallelen $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{TT'}$ den Strahlensatz anwenden und finden

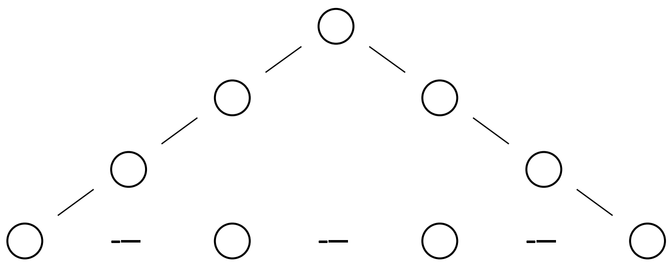
$$|\overline{C_1A_2}| : |\overline{A_2T'}| = |\overline{C_1A}| : |\overline{AC}| = 1.$$

Also gilt $|\overline{AC}| = |\overline{C_1A}|$, d.h., C_1 ist der Spiegelpunkt von A bezüglich C.

Monatsaufgabe[11] 5/23.

In die unten abgebildete Figur sind in die neun Kreise die Zahlen 1 bis 9 so einzutragen, dass jede dieser Zahlen genau einmal verwendet wird und die Summen der drei Dreiecksseiten (jeweils aus den Zahlen der vier Kreise einer Seite) gleich groß sind.

Ermitteln Sie alle möglichen verschiedenen Zahlenverteilungen, wenn im Kreis an der Spitze die Zahl 5 steht.



Hinweis: Zwei Zahlenverteilungen genau dann voneinander verschieden, wenn sich deren Eintragungen bei wenigstens einem Kreis unterscheiden.

[11] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.06.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[12]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
5/2023 (Mai 2023)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
4/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.