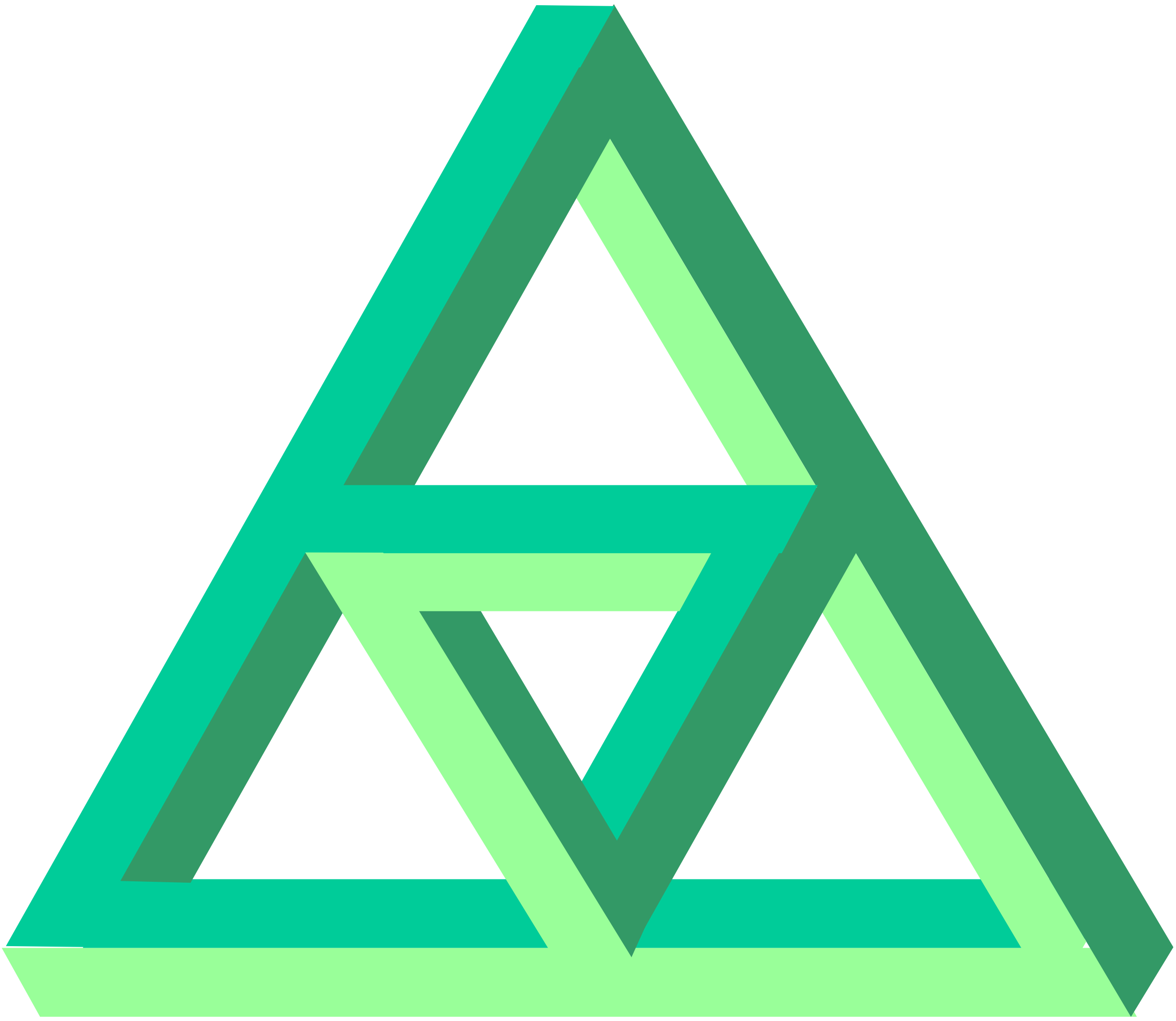
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 4/2023 (April 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO620934/MO621034** werden Beispiele gezeigt, in denen Mischungsverhältnisse zu berechnen sind. Im Vergleich zu den Aufgaben **MO600921/MO601021** ist zu erkennen, wie die Thematik in der Komplexität gesteigert wurde. Dies könnte anregen, ähnliche Aufgabenstellungen zu formulieren.

Wir schließen die Beiträge zu Konstruktionsaufgaben ab und verwenden als Bestimmungsstücke auch die Längen der Radien von In- und Umkreisen. Eine Lösungsvariante führt zu mathematischen Sätzen über innere und äußere Tangenten an zwei Kreisen. Beim Blick in alte Mathe-Bücher fanden wir einen Beitrag von 1947 über eine Konstruktionsaufgabe, die im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal gelingt.

Ein Rückblick zum 5. Tag der Mathematik an der Technischen Universität Chemnitz rundet das Heft ab.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 21 – Mischungsverhältnisse

Aufgabe 21.01 – MO620934/MO621034. Frank experimentiert mit Flüssigkeiten. Hierfür hat er drei Gefäße mit jeweils 3 Litern Fassungsvermögen. Zu Beginn befinden sich im Gefäß A genau 1 Liter Aceton, im Gefäß B genau 1 Liter Methanol und im Gefäß C genau 1 Liter Wasser. Ansonsten befindet sich nichts in den Gefäßen. Die drei Flüssigkeiten sind mischbar.

Frank beginnt nun, jeweils einen Teil der Flüssigkeit von einem Gefäß in ein anderes umzuschütten. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass keine Flüssigkeit verloren geht und die Flüssigkeiten sich sofort und ohne Volumenänderung mischen. Frank schüttet insgesamt 6-mal um, und zwar wie folgt:

Schritt	1	2	3	4	5	6
von Gefäß	A	B	C	C	A	B
nach Gefäß	B	A	A	B	C	C

a) Nach vier Schritten war das Gefäß C nicht leer. Zu wie viel Prozent bestand zu diesem Zeitpunkt die Flüssigkeit im Gefäß C aus Wasser?

Am Ende ist die Verteilung der Flüssigkeiten auf die Gefäße wie folgt (Angaben in Millilitern):

Gefäß	A	B	C
Aceton	702	176	122
Methanol	108	704	188
Wasser	180	200	620

b) Ermitteln Sie, wie viel Milliliter Flüssigkeit Frank in den letzten beiden Schritten jeweils umgeschüttet hat. Stellen Sie den Stand nach dem vierten Schritt in einer Tabelle wie oben dar.
c) Ermitteln Sie auch für die ersten vier Schritte, wie viel Milliliter Flüssigkeit Frank jeweils umgeschüttet hat. Stellen Sie den Stand nach dem zweiten Schritt in einer Tabelle wie oben dar.

Lösungshinweise Teil a): Da in den ersten vier Schritten keine Flüssigkeit in das Gefäß C hineingeschüttet wurde, besteht die Flüssigkeit im Gefäß C zu diesem Zeitpunkt zu 100% aus Wasser.

Lösungshinweise Teil b): Wir nehmen an, dass im fünften Schritt x Milliliter und im sechsten Schritt y Milliliter Flüssigkeit umgeschüttet wurden. Die Flüssigkeit im Gefäß

A besteht am Ende zu $\frac{702}{702+108+180} = \frac{39}{55}$ aus Aceton. An diesem Anteil hat die Entnahme von Flüssigkeit im fünften Schritt nichts geändert. Folglich war auch nach dem vierten Schritt der Aceton-Anteil im Gefäß A gleich $\frac{39}{55}$.

Analog war der Aceton-Anteil im Gefäß B nach dem vierten Schritt gleich $\frac{176}{176+704+200} = \frac{22}{135}$. Durch den fünften und sechsten Schritt wurden also insgesamt $\frac{39}{55}x + \frac{22}{135}y$ Milliliter Aceton in das Gefäß C umgefüllt. Da vorher kein Aceton im Gefäß C war, muss gelten

$$\frac{39}{55}x + \frac{22}{135}y = 122 \quad (1)$$

Argumentieren wir entsprechend mit Methanol, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{6}{55}x + \frac{88}{135}y = 188 \quad (2)$$

Multiplikation der Gleichung (1) mit 4 und anschließende Subtraktion von (2) ergibt:

$$\frac{4 \cdot 39 - 6}{55} \cdot x = 4 \cdot 122 - 188$$

$\frac{155}{50} \cdot x = 300$, also $x = 110$.

Einsetzen in (1) liefert $\frac{22}{135} \cdot y = 128 - 78 = 44$ und damit $y = 270$.

Nach dem vierten Schritt befanden sich $702 + \frac{39}{55} \cdot x = 780$ ml Aceton, $108 + \frac{6}{55} \cdot x = 120$ ml Methanol und $180 + \frac{10}{55} \cdot x = 200$ ml Wasser im Gefäß A.

Analog erhalten wir im Gefäß B $176 + \frac{22}{135} \cdot y = 220$ ml Aceton, $704 + \frac{88}{135} \cdot y = 880$ ml Methanol und $200 + \frac{25}{135} \cdot y = 250$ ml Wasser. Da es insgesamt jeweils 1 Liter Aceton, Methanol und Wasser gibt, ergeben sich die Werte folgender Tabelle:

Gefäß	A	B	C
Aceton	780	220	0
Methanol	120	880	0
Wasser	200	250	550

Lösungshinweise Teil c): Vor dem dritten Schritt befand sich im Gefäß C lediglich der Liter Wasser. Im dritten und vierten Schritt sind also 200 bzw. 250 ml umgeschüttet worden. Nach dem zweiten Schritt war die Verteilung also wie folgt:

Gefäß	A	B	C
Aceton	780	220	0
Methanol	120	880	0
Wasser	0	0	1000

Vor dem zweiten Schritt befand sich kein Methanol im Gefäß A. Der Anteil an Methanol im Gefäß B beträgt nach dem zweiten Schritt 80%; dieser Anteil ändert sich durch die Entnahme aus Gefäß B im zweiten Schritt nicht und entspricht auch dem Anteil an Methanol der umgefüllten Flüssigkeit. Von den v ml, die im zweiten Schritt umgefüllt wurden, sind also $0{,}8 \cdot v$ ml Methanol, und dieser Wert muss gleich 120 sein. Also folgt $v = 150$, und diese 150 ml bestanden zu 30 ml aus Aceton. Vor dem zweiten Schritt befanden sich also 750 ml Aceton im Gefäß A. Im ersten Schritt müssen also 250 ml Flüssigkeit (Aceton) umgefüllt worden sein. ❑

Diese Aufgabe hat einen direkten Vorgänger. Der Sachverhalt wirkte hier mit nur zwei verschiedenen Flüssigkeiten in seiner Komplexität wesentlich reduziert.

Aufgabe 21.02 – MO600921/MO601021. Frank experimentiert mit Flüssigkeiten. Dafür hat er zwei Gefäße A und B mit jeweils 1 Liter Fassungsvermögen. Zu Beginn befinden sich im Gefäß A genau 315 ml Methanol und 35 ml Wasser. Im Gefäß B befinden sich lediglich 175 ml Wasser.

a) Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß A aus Methanol?

Frank schüttet nun 50 ml aus dem Gefäß A in das Gefäß B.

b) Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß A nun aus Methanol? Zu wie viel Prozent besteht die Flüssigkeit im Gefäß B aus Methanol?

Frank will im nächsten Schritt zunächst x ml aus dem Gefäß B in das Gefäß A umschütten. Danach möchte er y ml aus dem Gefäß A in das Gefäß B schütten.

c) Wie müssen x und y gewählt sein, damit am Ende die Flüssigkeit im Gefäß A zu 80% und die Flüssigkeit im Gefäß B zu 30% aus Methanol besteht? Weisen Sie nach, dass x und y eindeutig bestimmt sind.

Hinweis: In den Gefäßen befinden sich nur die genannten Flüssigkeiten. Methanol mischt sich in jedem Verhältnis perfekt mit Wasser und beim Mischen soll das Volumen der Mischung gleich der Summe der Volumina der Ausgangsstoffe sein.

Lösungshinweise Teil a): Insgesamt befinden sich im Gefäß A genau $315 + 35 = 350$ ml Flüssigkeit, davon sind $\frac{315}{350} \cdot 100\% = 90\%$ Methanol.

Lösungshinweise Teil b): Der Anteil an Methanol im Gefäß A ändert sich durch das Ausschütten nicht, es sind weiterhin 90%. Von den 50 ml, die umgeschüttet werden, sind 90% Methanol, also 45 ml; die übrigen 5 ml sind Wasser. Nach dem Umschütten befinden sich im Gefäß B also $175 + 5 = 180$ ml Wasser und 45 ml Methanol. Der Anteil an Methanol beträgt dann $\frac{45}{225} \cdot 100\% = 20\%$.

Lösungshinweise Teil c): Die x ml bestehen zu 20% aus Methanol, vor dem Umschütten dieser x ml befinden sich im Gefäß A genau 300 ml, von denen 270 ml Methanol sind. Nach dem Umschütten dieser x ml sind also im Gefäß A genau 300 + x ml Flüssigkeit, davon $270 + 0{,}2 \cdot x$ ml Methanol. Durch den letzten Schritt ändert sich der Methanol-Anteil im Gefäß A nicht, er soll also schon nach dem vorletzten Schritt 80% betragen. Es muss deshalb gelten

$$270 + 0{,}2 \cdot x = 0{,}8 \cdot (300 + x),$$

was zu $30 = 0{,}6 \cdot x$ und damit zu $x = 50$ führt. Vor dem letzten Schritt sind im Gefäß B genau 175 ml Flüssigkeit, davon 35 ml Methanol, und im Gefäß A genau 350 ml Flüssigkeit, davon 280 ml Methanol. Aus dem Gefäß A werden dann y ml Flüssigkeit umgeschüttet, davon 80% Methanol. Hinterher befinden sich im Gefäß B also $175 + y$ ml Flüssigkeit, davon $35 + 0{,}8y$ ml Methanol. Es muss also gelten

$$35 + 0{,}8 \cdot y = 0{,}3 \cdot (175 + y),$$

was zu $y = 35$ führt. Am Ende sind im Gefäß A genau 315 ml Flüssigkeit, davon 252 ml Methanol, was $\frac{252}{315} \cdot 100\% = 80\%$ entspricht. Im Gefäß B befinden sich 210 ml Flüssigkeit, davon 63 ml Methanol, was $\frac{63}{210} \cdot 100\% = 30\%$ entspricht.

Die linearen Gleichungen zur Bestimmung von x und y hatten jeweils genau eine Lösung, die damit berechneten Mengen waren auch für die jeweilige Umfüllung vorhanden und führten zu den geforderten Methanol-Anteilen im jeweiligen Gefäß. Damit sind x und y tatsächlich eindeutig bestimmt. ❑

Aufgabe 21.03 – MO580921/MO581021. Peggy hält für die Gäste ihrer Party eine volle 2-Liter-Kanne mit dem Getränk „KiBa“ bereit. KiBa ist eine Mischung aus Kirsch- und Bananensaft.

Der erste Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt sofort die entnommene Menge, indem sie in gleicher Menge reinen Bananensaft nachfüllt. Der zweite Gast entnimmt 200 ml KiBa, und Peggy ersetzt die entnommene Menge diesmal mit reinem Kirschsaft. (Wir gehen davon aus, dass die beiden Saftsorten in der gesamten Kanne überall gleichmäßig vermischt sind.)

a) Angenommen, am Anfang waren es 1200 ml Kirschsaft und 800 ml Bananensaft. Berechnen Sie den prozentualen Kirschsaftanteil

   – im Becher des ersten Gastes,

– im Becher des zweiten Gastes,
– in der Kanne nach dem zweiten Wiederauffüllen.

b) Ermitteln Sie das erforderliche Verhältnis Ki : Ba (Kirschanteil zu Bananenanteil) in der Ausgangsmenge, wenn der zweite Gast nach dem Auffüllen durch Bananensaft KiBa im Mischungsverhältnis 1 : 1 erhalten soll.

Lösungshinweise Teil a): Der erste Gast hat 1200/2000, also 60% Kirschanteil. Der erste Gast entnimmt mit seinem Becher 120 ml Kirschanteil und 80 ml Bananenanteil. Da danach nur Bananensaft nachgefüllt wird, hat die neue Mischung 1200 ml – 120 ml = 1080 ml Kirschsaft.

Der zweite Gast erhält damit einen Kirschanteil von 1080/2000, das sind 54%. Damit entnimmt er mit seinen 200 ml auch 108 ml Kirschsaft, und dann werden 200 ml Kirschsaft nachgefüllt. In der Kanne sind somit 1172 ml Kirschsaft, das ist ein Anteil von 58,6%.

Lösungshinweise Teil b): Da der zweite Gast das Verhältnis 1 : 1 vorfinden soll, muss die Mischung nach dem Auffüllen von 200 ml reinem Bananensaft 1000 ml Bananensaft und 1000 ml Kirschsaft enthalten. Also müssen vor dem Nachfüllen 800 ml Bananensaft und 1000 ml Kirschsaft enthalten sein. Damit muss anfangs für das Mischungsverhältnis Ki : Ba = 1000 : 800 = 5 : 4 gelten. ❑

Aufgabe 21.04 – MO490923. Gegeben sind zwei kleine Fässer F1 und F2 mit einem Fassungsvermögen von jeweils 10 Litern. In dem Fass F1 befinden sich 4 Liter der Flüssigkeit A. Im Fass F2 sind 2 Liter der Flüssigkeit B. Die beiden Flüssigkeiten A und B besitzen die gleiche Dichte und sind miteinander mischbar.

Zum Umfüllen steht eine 1-Liter-Kelle zur Verfügung. Zuerst wird eine volle Kelle von F1 nach F2 umgefüllt. Nach dem Umrühren in F2 wird eine volle Kelle des entstandenen Gemischs nach F1 zurückgefüllt. Dort wird erneut umgerührt; anschließend wird wieder eine volle Kelle von F1 nach F2 umgefüllt.

a) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit A am Inhalt des Fasses F1 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

b) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit B am Inhalt des Fasses F2 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

Hinweis: Ein ganzzahliges Verhältnis ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Lösungshinweise Teil a): Wir betrachten nur Flüssigkeit A. Ein Liter wird nach F2 mit der Flüssigkeit B geschöpft, dort ist der Anteil dann einer von drei Litern. Von diesen jetzt drei Litern wird ein Liter (mit $\frac{1}{3}$ Liter Flüssigkeit A) zurückgefüllt. Damit beträgt im

Fass F1 der Anteil (der Flüssigkeit A) $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ Liter von insgesamt $4 = \frac{12}{3}$ Litern, das ist ein Anteil von $\frac{5}{6}$.

Lösungshinweise Teil b): Somit werden $\frac{5}{6}$ Liter zum noch vorhandenen Anteil von $\frac{2}{3}$ Liter in Fass F2 gegeben. Das sind $\frac{3}{2}$ Liter von insgesamt 3 Litern, also genau die Hälfte. Damit hat auch Flüssigkeit B im Fass F2 den gleichen Anteil von $\frac{1}{2}$. ❑

Aufgabe 21.05 – MO031111. Zwei Freunde A und B sitzen im Café. A hat ein Glas Milch und B eine Tasse Kaffee schwarz vor sich. A gibt einen Löffel voll Milch in die Tasse von B. Nachdem B umgerührt hat, gibt B einen Löffel (gleicher Größe) voll seines Kaffee-Milch-Getränkes in das Glas von A. Es ist zu entscheiden, ob anschließend A weniger, gleich viel oder mehr Kaffee in seiner Milch hat als B Milch in seinem Kaffee. Man begründe die Antwort!

Lösungshinweise: Wir bezeichnen allgemein die Menge Milch mit m, die Menge Kaffee mit k und das Fassungsvermögen des Löffels mit l, wobei keine Bedingungen an diese Mengen zu stellen sind (außer $l < m$, d.h. wir können tatsächlich einen Löffel voll Milch nehmen), so befindet sich nach dem ersten Tauschvorgang $k + l$ Flüssigkeit in der Tasse. Nach dem Umrühren entnehmen wir davon wieder eine Menge l, die nun aber $l \cdot \frac{l}{k+l}$ Milch und Kaffee $l \cdot \frac{k}{k+l}$ Kaffee enthält. Dies gilt, weil wie in der Tasse das Verhältnis von Milch zu Kaffee auch auf dem Löffel wie $l : k$ sein muss und die Gesamtmenge auf dem Löffel l ist. Also befindet sich nach dem zweiten Tausch die Menge $\frac{l \cdot k}{k+l}$ Kaffee in der Milch. An Milch verbleibt im Kaffee aber

$$l - l \cdot \frac{l}{k+l} = \frac{l \cdot (k+l) - l^2}{k+l} = \frac{l \cdot k}{k+l}$$

Diese Mengen sind also gleich. ❑

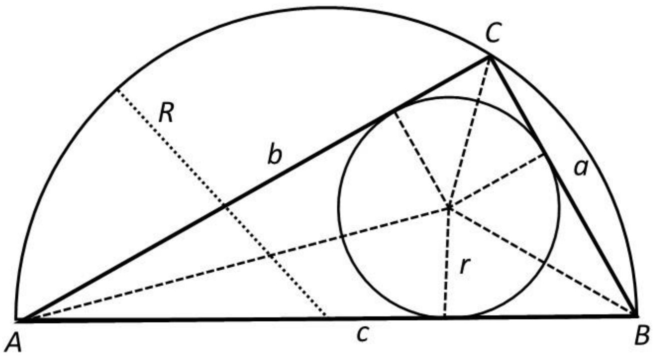
Lösungsvarianten: Nach dem Mischen befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleichen Flüssigkeitsmengen wie vorher. Daher fehlt B am Ende gegenüber dem Anfangszustand in seiner Tasse genau so viel Kaffee, wie er Milch in der Tasse hat. Genau diese Menge Kaffee muss A im Glas haben. Somit hat B genau so viel Milch in der Tasse Kaffee wie A Kaffee im Glas Milch.

Diese Argumentation können wir noch etwas formalisieren: Es sei M die Menge Milch und k die Menge Kaffee, die A nach dem Tausch in seinem Glas hat, und m die Menge Milch, die B in seiner Tasse hat. Da A nach dem Tausch die gleiche Menge Flüssigkeit in seinem Glas hat wie vor dem Tausch, gilt $M + k = M + m,$ also $k = m$.

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil IV)

Abschließend zu dieser Thematik betrachten wir Konstruktionsaufgaben mit Inkreis- oder Umkreisradius als Bestimmungsstücke. Diese zählen eigentlich nicht zu den Konstruktionsaufgaben, wie sie im Teil I beschrieben wurden. Sie ordnen sich aber direkt ein, weil oftmals Hilfsdreiecke eine Rolle spielen, deren Seitenlängen durch diese Radien bestimmt werden.

Aufgabe. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Inkreis- und Umkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

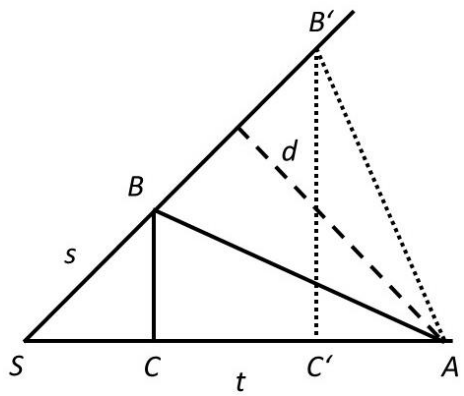


Lösungshinweise[3]*:* Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der THALESkreis über der Hypotenuse c ist, gilt $R = \frac{c}{2}$. Durch die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

Wegen $(a - r) + (b - r) = 2 \cdot R$ finden wir

(1) $a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R.$



Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Wir konstruieren (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel s und t eines Winkels der Größe $45°$ mit dem Scheitel S. Auf dem Schenkel t tragen wir einen Punkt A mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand d, den der Punkt A vom Schenkel s hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ finden wir

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{d}{2 \cdot (r + R)}$$

Der Kreis um A mit dem Radius $2 \cdot R$ hat daher mit s einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an S liegende Schnittpunkt werde mit B bezeichnet. Das Lot

[3] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

von B auf t schneidet t in einem Punkt, der C genannt werde. Der zweite Schnittpunkt werde mit B' bezeichnet. Das Lot von B' auf t schneidet t in einem Punkt, der C' genannt werde.

Behauptung: Die Dreiecke ABC und ABC‘ besitzen die geforderten Eigenschaften.

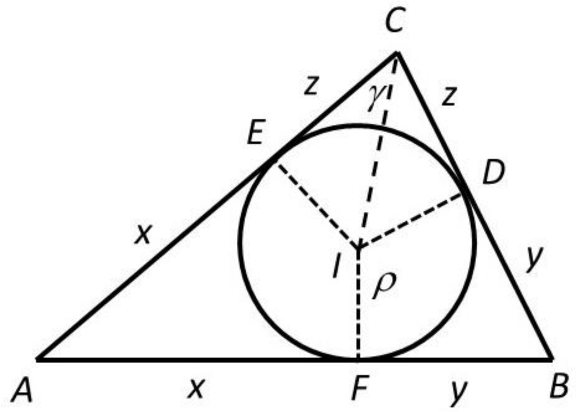
Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius R. Weiterhin gilt im Dreieck ABC:

$$a + b = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CS} = \overline{AS} = 2 \cdot (r + R).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck ABC den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften. In ähnlicher Argumentation zeigen wir, dass auch das Dreieck ABC‘ die verlangten Eigenschaften besitzt. ❑

Aufgabe. Von einem Dreieck ABC seien der Umfang u, der Inkreisradius ρ und der Winkel γ bekannt. Man konstruiere das Dreieck.

Lösungshinweise: Wie in der Skizze eines Dreiecks ABC mit dem eingezeichneten Inkreis mit Mittelpunkt I ersichtlich, bezeichnen wir mit D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten. Die Strecken von den Eckpunkten zu den benachbarten Berührungspunkten haben paarweise dieselbe Länge, die wir wie in der Skizze erkennbar mit x, y, z bezeichnen. Da wir γ und ρ kennen, können wir das rechtwinklige Dreieck ICE anhand der Bestimmungstücke



$$\sphericalangle ECI = \frac{1}{2} \cdot \gamma,\ \sphericalangle CIE = 90°,\ |\overline{EI}| = \rho$$

konstruieren und erhalten die Länge der Strecke $|\overline{CE}| = z$.

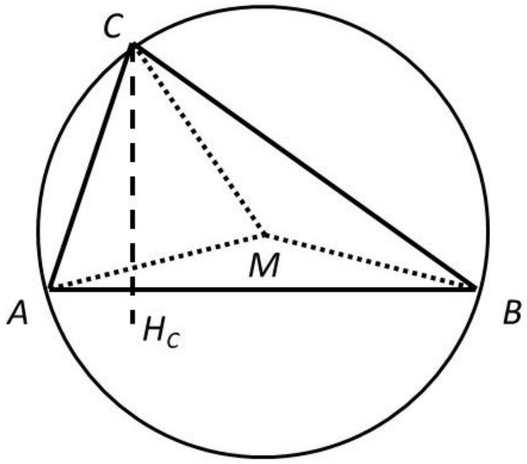
Weiterhin erhalten wir $c = x + y = \frac{1}{2} \cdot (u - 2 \cdot z)$. Wir können also die Länge der Strecke c konstruieren. Außerdem kennen wir die Länge $a + b = u - c$.

Das Rechteck mit den Seiten u und ρ hat den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Mit Hilfe des Satzes von den Ergänzungsparallelogrammen[4] können wir ein flächengleiches Rechteck mit der Seite c konstruieren, deren Länge der anderen Seite

[4] Gegeben sei ein Parallelogramm P und darin sei d eine der beiden Diagonalen. Weiter sei Z ein innerer Punkt von d. Durch Z seien die beiden Parallelen zu den Seiten von P gezogen, welche P in vier Teilparallelogramme unterteilen, wobei Z deren alleiniger gemeinsamer Punkt ist. Dann gilt: Die beiden Teilparallelogramme, welche von der Diagonalen d nicht zerlegt werden, sind ergänzungsgleich und daher von identischem Flächeninhalt.

h_c ist, also die Höhe des Dreiecks ABC auf der Seite c. Mit den Bestimmungsstücken c, $a+b$ und h_c können wir nun das gesuchte Dreieck konstruieren (s. Aufgabe K6 – MO080932 im Heft 12/2022). ❑

Aufgabe. Man konstruiere ein Dreieck aus seinem Umkreisradius r, einer Höhe h_c und der Differenz der beiden nicht zu h_c gehörenden Innenwinkel und beweise die Richtigkeit der Konstruktion.



Lösungshinweise – Analyse: Ist ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis mit Mittelpunkt M und dem Höhenfußpunkt H_C gegeben, so folgt aus den (wie üblich mit α, β, γ bezeichneten Innenwinkel) $\sphericalangle BMC = 2 \cdot \alpha$ als Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\sphericalangle BAC = \alpha$ über der gemeinsamen Sehne $\overline{BC}$. Damit finden wir im gleichschenkligen Dreieck BCM die Winkelgröße $\sphericalangle MCB = 90° - \alpha$. Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck BCH_C mit dem rechten Winkel $\sphericalangle BH_CC$, so erhalten wir

$$\sphericalangle H_CCM = 180° - 90° - \beta - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$$

Konstruktionsbeschreibung:

1. Wir zeichnen eine Gerade g und wählen auf ihr einen Punkt H_C, in dem wir die Senkrechte errichten.
2. Wir tragen auf dieser Senkrechten die Länge der Höhe h_C ab und bezeichnen den entstandenen Schnittpunkt mit C, also $|\overline{H_CC}| = h_C$.
3. Wir tragen auf einer Seite von H_C den Winkel $\alpha - \beta$ mit Scheitelpunkt C an.
4. Wir schlagen einen Kreisbogen um C mit dem Radius r und bezeichnen den Schnittpunkt mit dem freien Schenkel mit M.
5. Wir ziehen den Kreis um M mit Radius r und erhalten auf g zwei Schnittpunkte, die wir mit A und B bezeichnen.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.
Beweis: Laut Konstruktion besteht das Dreieck CH_CM aus den gegebenen Bestimmungsstücken, wobei $\overline{H_CC}$ nach Schritt 1 die Höhe im Dreieck ABC und M nach Schritt 5 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sind.

Eindeutigkeit und Existenz: In den Konstruktionsschritten 2 und 3 bestehen jeweils zwei Möglichkeiten, den Punkt C festzulegen bzw. den Winkel anzutragen. Die Fortsetzung der Konstruktion führt jedoch zu kongruenten Lösungen.

Die Konstruktionsschritte 1 bis 4 sind für jede Vorgabe der Bestimmungsschritte ausführbar. Bezeichnen wir mit X den Fußpunkt des Lotes von M auf $\overline{H_C C}$, so schneidet der Kreis um M mit Radius r die Gerade g nur dann in zwei Punkten, wenn die Ungleichung $h_c < r + |\overline{XC}|$ erfüllt ist. Dabei gilt $|\overline{XC}| = r \cdot \cos(\alpha - \beta)$. ❑

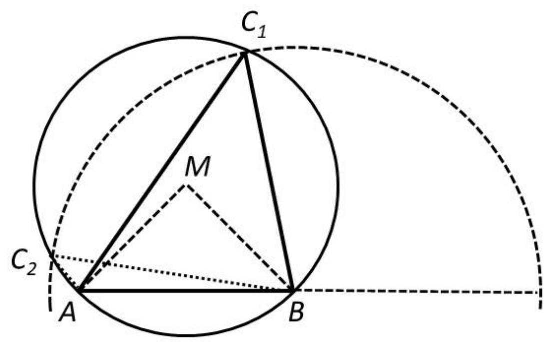
Die folgenden Aufgaben formulieren detailliert alle erforderlichen Schritte einer vollständigen Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe MO281035. Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm , $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s und γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2) und (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

Lösungshinweise zu I (Analyse): Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so erkennen wir folgende Eigenschaften.



Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1) $\overline{MA} = \overline{MB} = r$ sowie nach (3) und des Satzes über Zentriwinkel und Peripheriewinkel $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \gamma$. Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis um M, andererseits auch auf dem Kreis um B mit dem Radius a. Dabei gilt nach (2) $a = s - |\overline{AB}|$.

Lösungshinweise zu II (Konstruktionsbeschreibung): Aus der Analyse können wir die folgenden Konstruktionsschritte ableiten.

1. Wir konstruieren einen Winkel der Größe $2 \cdot \gamma$. Den Scheitelpunkt bezeichnen wir mit M.
2. Wir konstruieren einen Kreis um M mit dem Radius r. Dieser Kreis schneidet die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B.

3. Wir konstruieren einen Kreis um B mit dem Radius a. Dieser Kreis schneidet den Kreis um M in zwei Punkten C_1 und C_2.

Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind Dreiecke der geforderten Art.

Lösungshinweise zu III (Beweis): Nach Konstruktionsschritten 1 und 3 liegen C_1 und C_2 jeweils auf dem Kreis um M, also ist die Bedingung (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3 gilt $|\overline{BC}| = s - |\overline{AB}|$, also $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = s$ und somit ist die Bedingung (2) erfüllt. Nach Konstruktionsschritten (1) und (2) sind C_1 und C_2 jeweils Peripheriewinkel über der gleichen Sehne des Zentriwinkels $\sphericalangle AMB$, also ist auch die Bedingung (3) erfüllt.

Lösungshinweise zu IV (Eindeutigkeit): Die Konstruktionsschritte 1 und 2 sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt 3 führt zu zwei Dreiecken. Für diese Dreiecke gilt $|\sphericalangle ABC_1| \neq |\sphericalangle ABC_2|$, also sind diese Dreiecke nicht zueinander kongruent. Es gibt somit bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art.

❑

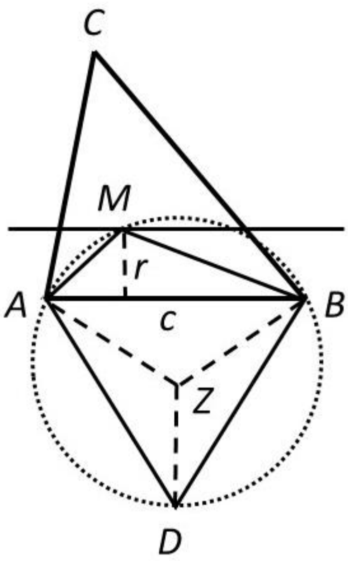
Hinweis: Da die Bestimmungsstücke mit konkreten Maßzahlen gegeben sind, muss die Existenz von Dreiecken der verlangten Art nicht bewiesen werden. Die Existenz ergibt sich aus der erfolgreichen Konstruktion.

Aufgabe MO301036. Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.

(a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
(d) Beweisen Sie, dass bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Hinweis: Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösungshinweise Teil a – Analyse: Wir ergänzen – wie in der Skizze ersichtlich – das gesuchte Dreieck ABC mit einem aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ABD. Da der Mittelpunkt M des Inkreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist, finden wir



$$\sphericalangle AMB = 180° - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA) = 120°,$$

da laut Vorgabe im Dreieck ABC die Innenwinkelsumme $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + 60° = 180°$ gilt. Folglich ist das Viereck $ADBM$ eine Sehnenviereck und es existiert für dieses Viereck ein Umkreis mit dem Mittelpunkt Z, den wir als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck ABD ermitteln können.

Lösungshinweise Teil b – Konstruktionsbeschreibung: Aus der Analyse können wir folgende Konstruktion ableiten.

1. Wir konstruieren ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Schnittpunkt der Seitenhalbierenden Z.
2. Wir zeichnen den Kreis k um Z mit dem Radius $\overline{AZ}$ durch A.
3. Wir konstruieren die Parallele zu AB im Abstand von r, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z. Einen der Schnittpunkte mit dem Kreis k bezeichnen wir mit M.
4. Wir tragen in A den Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle BAM$ und in B den Winkel der Größe $2 \cdot \sphericalangle ABM$ jeweils auf der Seite an, in der M liegt (d.h. wir verdoppeln die Winkel $\sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle ABM$).
5. Wir verlängern die freien Schenkel beider Winkel und bezeichnen deren Schnittpunkt mit C.

Das Dreieck ABC ist Lösung der Aufgabe.

Lösungshinweise zu Teil c – Beweis: Nach Konstruktionsschritt 1 gilt $|\overline{AB}| = c$. Nach Konstruktionsschritt 5 ist M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck ABC und folglich der Inkreismittelpunkt. Nach Konstruktionsschritt 3 beträgt der Inkreisradius r. Schließlich beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$ im Sehnenviereck $AMBD$ 120°. und deshalb gilt $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MBA = 60°$. Damit finden wir

$$\sphericalangle ACB = 180° - 2 \cdot (\sphericalangle BAM + \sphericalangle MBA) = 180° - 2 \cdot 60° = 60°.$$

Damit erfüllt das Dreieck ABC tatsächlich alle geforderten Bedingungen.

Lösungshinweise Teil d – Eindeutigkeit und Existenz: Bis auf die Festlegung des Schnittpunktes M aus zwei Möglichkeiten sind alle Schritte der beschriebenen

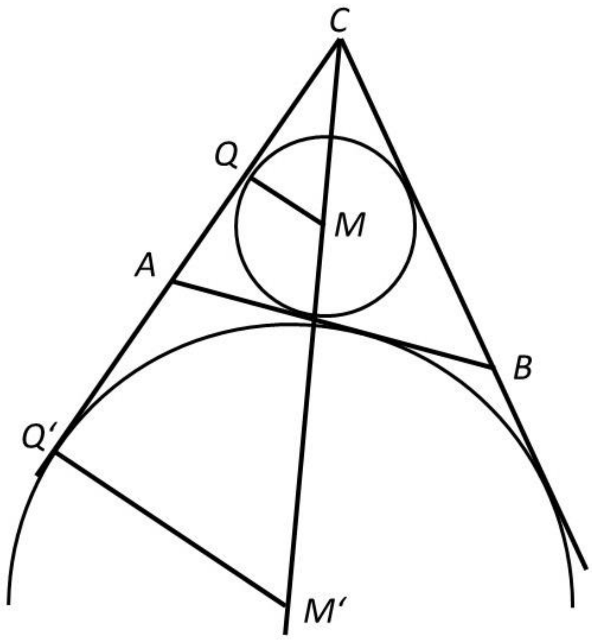
Konstruktion eindeutig ausführbar. Die Wahl des Punktes M führt jedoch zu kongruenten Lösungen.

Da eine Konstruktion ausdrücklich nicht verlangt wurde (und somit die Existenz nicht konstruktiv geprüft wird), erfordern die Vorgaben $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm noch die Prüfung, ob mit diesen Werten das Dreieck konstruiert werden kann. Der Abstand des Punktes M von Z ist nach Konstruktion die Summe eines Drittel der Seitenhalbierenden im Dreieck ABD (entspricht $c \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}$) und des Inkreisradius r, also gemäß den Vorgaben $\sqrt{120} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3} + 3 = \sqrt{10} + 3$. Dagegen beträgt die Länge des Umkreisradius im Dreieck ABD $c \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{10}$. Wegen $3 < \sqrt{10}$ schneidet dieser Umkreis die Parallele durch M in zwei Punkten.

Damit ist gezeigt, dass es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. ❑

Die Konstruktionsaufgabe bietet einen anderen Lösungsansatz, der sich an innere und äußere Tangenten orientiert. Wir beschränken uns lediglich auf die

Konstruktionsbeschreibung:



1. Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck MCQ mit rechtem Winkel bei Q, mit einem Winkel $\sphericalangle QCM = 30°$ und der Kathetenlänge $|\overline{QM}| = r$.
2. Wir zeichnen den Kreis um M mit Radius $\overline{QM} = r$.
3. Wir verlängern die Kathete $\overline{CQ}$ über Q hinaus und markieren den Punkt Q‘ mit $|\overline{QQ'}| = c$.
4. Wir errichten in Q‘ die Senkrechte und bezeichnen deren Schnittpunkt mit der Verlängerung der Hypotenuse $\overline{CM}$mit M‘.
5. Wir zeichnen den Kreis um M‘ mit dem Radius $\overline{MQ'}$.
6. Wir konstruieren die innere Tangente bezüglich der Kreise um M und M‘ und bezeichnen die Schnittpunkte mit den beiden äußeren Tangenten mit A bzw. mit B.

Das Dreieck ABC erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe. ❑

Hinweis: Die Konstruktion der inneren und äußeren Tangenten für zwei sich nicht überschneidende Kreise gilt nicht als „zitierfähige“ Grundkonstruktion. In einer Nebenanalyse müsste im Wettbewerb also sowohl die für den Beweis wesentliche

Eigenschaft $|\overline{QQ'}| = |\overline{AB}|$ nachgewiesen als auch die Konstruktion der Tangenten ausführlicher beschrieben werden.

Rückblick auf den 5. Tag der Mathematik[5]

Am Samstag, dem 1. April 2023, fand der 5. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Rund 500 Gäste nutzten die Gelegenheit, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter über 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Die Teilnahme von 61 Mannschaften aus 29 sächsischen sowie weiteren polnischen und tschechischen Gymnasien entsprach einer Steigerung auf mehr als das Doppelte im Vergleich zum Vorjahr. Der auf dem Programm verwendete Untertitel *„Mit Spaß muss man rechnen“* bestätigte sich nicht nur während der Aufgaben-Rallye für die Klassenstufen 8 – 9 bzw. 10 – 12, sondern auch in der Mitmach-Ausstellung und in den Mathe-Laboren. Die rund 30 begleitenden Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte wurden in Fortbildungsvorträgen in die Welt des Zufalls (Prof. Dr. Alois Pichler, TU Chemnitz) und in mathematische Arbeitswelten (Dr. Michael Pippig, Intenta Automotive GmbH) entführt[6]. Im Plenarvortrag klärte Dr. Anne Kandler vom Max-Planck-Institut für Evolutionäre Anthropologie in Leipzig auf, wie Mathematik durch die Modellierung des sogenannten Sprachwechsels helfen kann, bedrohte Sprachen zu retten.

Ein Höhepunkt des Tages war die Podiumsdiskussion mit dem Sächsischen Ministerpräsidenten zum Thema “Zukunftstechnologie Mathematik – auch in Chemnitz?". Die Fragen waren vielfältig, von den inhaltlichen Belangen in die Gestaltung der Lehrpläne und des Prüfungsgeschehens über die Einbeziehung von digitalen Medien im Unterricht und in der Prüfung bis zu Erwartungen an eine kreative Wissensvermittlung mit stärkerem Realitätsbezug im Mathe-Unterricht. Deutlich wurde auch, dass in vielen Bereichen der Hochtechnologien und des täglichen Lebens die Bedeutung der Mathematik zunimmt und auch deshalb kreativer Lösungen bedarf, dem Lehrermangel in Sachsen und hier insbesondere in der ländlichen Region im MINT-Bereich zu begegnen. Die Podiumsdiskussion vermittelte aber den Optimismus, dass viele Seiten den Willen haben, für die Mathematik im Bereich der Bildung in Sachsen etwas zu bewirken und kreative Lösungen zu entwickeln. In der Tageszeitung „Freie Presse“ wurde am 3. April auf Seite 4 unter dem Titel „Sexy Stunden mit Mathematik“ fast ganzseitig berichtet.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. Während der Preisverleihung des Wettbewerbs durch den Sächsischen Ministerpräsidenten

[5] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/11793 (Stand 04.04.2023)
[6] ausführlichere Informationen im Heft 5/2023

Michael Kretschmer, und den Dekan der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. Daniel Potts, wurden diesmal pro Altersstufe fünf Preise vergeben: In den Klassenstufen 8 bis 9 gingen sie an Teams aus Chemnitz, Hohenstein-Ernstthal, Naunhof und Schneeberg. In den Klassenstufen 10 bis 12 hatten Teams aus Chemnitz, Marienberg, Plauen und Thum am besten abgeschnitten. „Diese Bilanz zeigt, dass viele mathematische Talente in Sachsen beheimatet sind", freute sich Prof. Potts.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (SUB) stellt eine Vielzahl von historischen Dokumenten öffentlich zur Verfügung. Der folgende Auszug zeigt die Diskussion eines Beispiels für nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbare Dreiecksaufgaben[7]. Paul Buchner (1891 – 1978) war zu dieser Zeit Rektor des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasium in Basel. (s. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN378850199_0002, letzter Abruf: 04.04.23).

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

II. Jahrgang
1947

Verlag Birkhäuser Basel

El.Math. *Band II* *Nr. 1* *Seiten 14 – 16* *Basel, 15. Januar 1947*

Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

Gewöhnlich wird nur gezeigt, dass einige klassische geometrische Aufgaben, wie die Dreiteilung eines Winkels, die Volumenverdopplung eines Würfels, die Konstruktion gewisser regelmäßiger Polygone, die Quadratur des Kreises, mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können. Zahlreiche andere Fragen der elementaren Geometrie führen ebenfalls auf solche Probleme.

Ein Ingenieur berichtete mir, daß er sich lange vergeblich bemühte, eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und dem Inkreisradius ρ zu finden. Es soll gezeigt werden, daß es eine solche Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht gibt.

[7] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten.

Es sei $a \geq b$. Als viertes Stück bestimmen wir die halbe Seitensumme $s = \frac{a+b+c}{2}$, dann gilt bekanntlich

$$\rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(a+b-s)}{s}$$

Wir erhalten daher für die Unbekannte x=s die Bestimmungsgleichung dritten Grades

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-a-b) + \rho^2$$
$$-x^3 - 2x^2(a+b) + x(\rho^2 + 3ab + a^2 + b^2) - ab(a+b) = 0 \qquad (1)$$

Hieraus folgt

$$f(0) = -ab(a+b) < 0, f(b) = \rho^2 b, f(a) = \rho^2 a, f(a+b) = \rho^2(a+b) \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) hat daher immer eine reelle Wurzel $0 < x_1 < b$.

In einem Dreieck gilt stets

$x = s = \frac{a+b+c}{2} > a \geq b$, und $\frac{c}{2} < \frac{a+b}{2}$, also
$\frac{a+b+c}{2} < a + b$, oder $a + b > x = s > a$.

Lösungen unseres Problems liefern nur Wurzeln der Gleichung (1), die dem Intervall $(a; a+b)$ angehören. Da die Gleichung (1) stets eine reelle Wurzel besitzt, die außerhalb dieses Intervalles liegt, so hat unsere Aufgabe nur Lösungen, wenn die Gleichung drei reelle Wurzeln hat.

Die Kurve $y = f(x)$ schneidet nach (2) die Gerade $y = \rho^2 x$ immer in den drei Punkten $A(b; \rho^2)$, $B(a; \rho^2)$, $C\big(a+b; \rho^2(a+b)\big)$, da außerdem $f(0) < 0$ ist, können die weiteren Nullstellen von $f(x)$ nur zwischen a und $a+b$ liegen. Unser Problem hat daher für ein gegebenen Wertetripel a, b, ρ entweder 0, 1 oder 2 Lösungen, je nachdem die Gleichung (1) eine reelle Wurzel, eine Doppelwurzel oder drei verschiedene Wurzeln hat.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_3 = 0$$

hat drei reelle Wurzeln, wenn ihre Diskriminante

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18 a_1 a_2 a_3 - 4 a_1^3 a_3 - 4 a_2^3 - 27 a_3^2 \geq 0$$

ist. In unserem Fall ist

$$a_1 = -2(a+b), a_2 = \rho^2 + 3ab + a^2 + b^2, a_3 = -ab(a+b)$$

und somit ergibt sich

$$D = -4\rho^6 - 4\rho^4(2a^2 + 7ab + 2b^2)$$
$$-4\rho^2(a^4 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 + b^4) + a^2b^2(a-b)^2 \geq 0.$$

Zu jeden Tripel a, b, ρ, welches dieser Ungleichung genügt, gibt es Dreiecke mit den Seiten a, b und dem Inkreisradius ρ, aber ob dieselben mit Zirkel und Lineal gefunden werden können, ist damit noch nicht entschieden. Für spezielle Werte $a = 2$ und $b = 1$ wird

$$D = -4(\rho^6 + 24\rho^4 + 3\rho^2 - 1) \geq 0.$$

Nach der Zeichenregel von DESCARTES[8] hat die Gleichung

$$\rho^6 + 24\rho^4 + 3\rho^2 - 1 = 0$$

eine positive Wurzel, und zwar ist $\rho_1 \approx 0{,}388$.

Mit $a = 2, b = 1$ gibt jedes $\rho \leq 0{,}388$ ein Zahlentripel, das zu einem reellen Dreieck gehört. Insbesondere für $a = 2, b = 1, \rho = 0.3$ nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$x^3 - 6x^2 + 11{,}09x - 6 = 0$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit 1000 und setzen $10x = y + 20$, dann erhalten wir eine Gleichung in der Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten

$$g(y) = y^3 - 91y + 180 = 0\,. \tag{3}$$

Eine solche Gleichung hat entweder reelle ganzzahlige oder irrationale Wurzeln. Wegen

$$g(-11) = -150, g(-10) = 90, g(2) = 6, g(3) = -66, g(8) = -36, g(9) = 90$$

gilt für die drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$-11 < y_1 < -10\,, 2 < y_2 < 3\,, 8 < y_3 < 9$$

Die Gleichung (3) hat demnach keine rationalen Wurzeln. Eine kubische Gleichung

$$y^3 + ay + b = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist aber auch nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar (s. WEBER-WELLSTEIN, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, 3. Aufl., § 109). Die Wurzeln der Gleichung (3) sind daher nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, daher gibt es auch für die allgemeine Aufgabe keine solche Konstruktion, denn diese müßte unser spezielles Beispiel mitumfassen.

---

[8] Vorzeichenregel von RENÉ DESCARTES (1596 – 1650): Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner als diese, wobei jede Nullstelle ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt wird.

Natürlich ist das nicht so zu verstehen, dass es keine Tripel a, b, ρ gibt, aus denen das zugehörige Dreieck konstruierbar wäre. Ist zum Beispiel $a = 5, b = 3$, $\rho = 1$, dann heißt die Gleichung (1)

$$x^3 - 16x^2 + 80x - 120 = (x - 6)(x^2 - 10x + 20) = 0\,,$$

das heißt sie ist reduzibel geworden. Die Lösungen

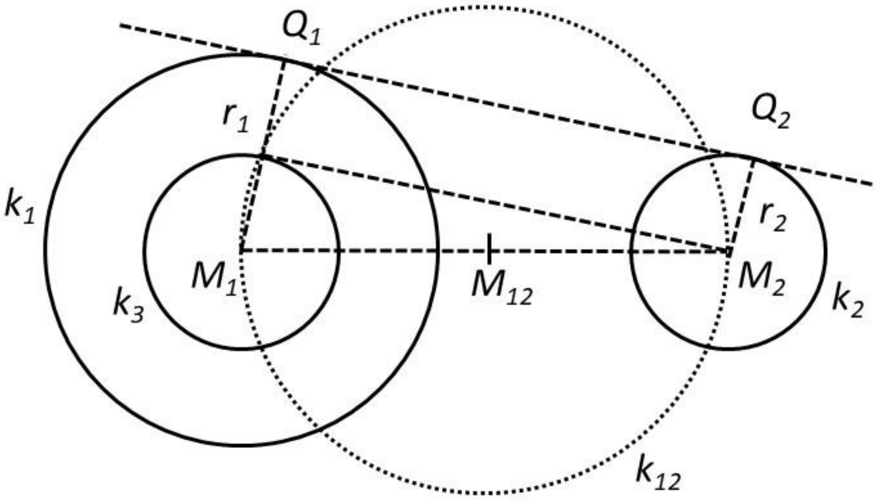
$$x_1 = S_1 = 6 \text{ und } x_2 = s_2 = 5 + \sqrt{5}$$

führen zu den Dreiecken mit den Seiten $a = 5, b = 3, c = 4$ und $a = 5, b = 3$, $c = 2 + 2\sqrt{5}$, die aus den gegebenen Zahlenwerten leicht konstruierbar sind. Es gibt aber keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die in jedem Falle zum Ziele führen würde.

P. BUCHNER, Basel

Bekannte Sätze der Mathematik

Wir zeichnen die sogenannten *äußeren Tangenten* an zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 > r_2$ und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 mit $\overline{M_1M_2} > r_1$ (d.h. der Kreis k_2 liegt nicht vollständig innerhalb von k_1).

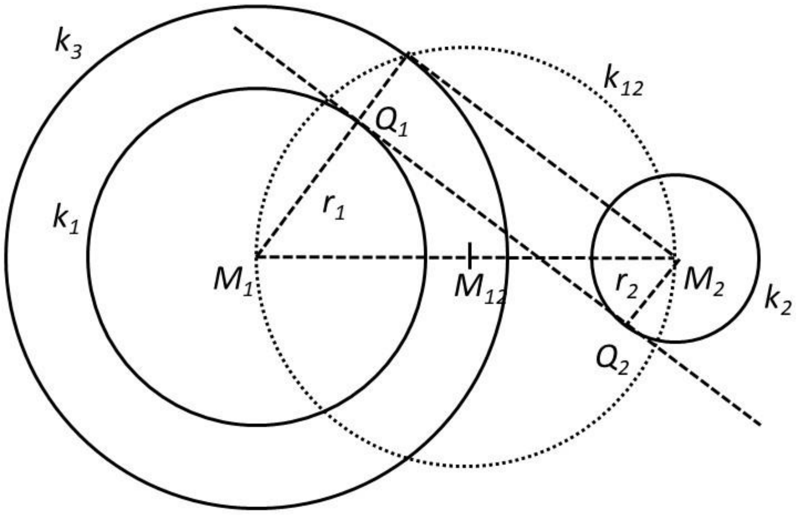


1. Dazu konstruieren wir zunächst einen weiteren Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 - r_2$.
2. Anschließend ermitteln wir konstruktiv den Mittelpunkt M_{12} der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und zeichnen einen Kreis k_{12} um M_{12} mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2)$. Dieser Kreis k_{12} schneidet den Kreis k_3 in zwei Punkten X und X'. Im Ergebnis finden wir im Dreieck M_1M_2X im Eckpunkt X nach Satz des THALES einen rechten Winkel.
3. Die Parallele zu M_2X im Abstand von r_2 (die auf der anderen Seite von M_2X als M_1 liegt) berührt die Kreise k_1 und k_2 in den Punkten Q_1 bzw. Q_2.

Die Gerade durch Q_1 und Q_2 ist eine äußere Tangente zu den beiden gegebenen Kreisen. Ausgehend von X' können wir nach Konstruktionsschritt 3 eine weitere innere Tangente konstruieren, die bzgl. M_1M_2 symmetrisch zu $\overline{Q_1Q_2}$ liegt.

Beweis: Der Abstand vom Berührungspunkt Q_1 zu M_1 ist $(r_1 - r_2) + r_2 = r_1$. Die Gerade durch Q_1 und Q_2 steht im Berührungspunkt senkrecht auf dem Radius. Weiterhin ist das Viereck $M_1M_2Q_2Q_1$ ein Rechteck, da die beiden Winkel in M_1 und M_2 ebenfalls 90° sind. Somit ist auch der Winkel im Berührungspunkt Q_2 ein rechter Winkel, die Gerade also eine Tangente. ❑

Gilt für die gegebenen zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 > r_2$ und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 die Ungleichung $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$ (d.h. die Kreise k_1 und k_2 haben keine gemeinsamen Punkte), so können wir auch *innere Tangenten* zeichnen.

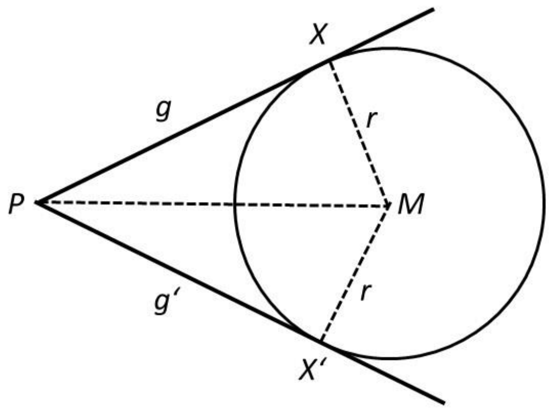


1. Dazu konstruieren wir zunächst einen weiteren Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 + r_2$.
2. Anschließend ermitteln wir konstruktiv den Mittelpunkt M_{12} der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und zeichnen einen Kreis k_{12} um M_{12} mit dem Radius $\frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2)$. Dieser Kreis k_{12} schneidet den Kreis k_3 in zwei Punkten X und X'. Im Ergebnis finden wir im Dreieck M_1M_2X im Eckpunkt X nach Satz des THALES einen rechten Winkel.
3. Die Parallele zu M_2X im Abstand von r_2 (die auf der gleichen Seite von M_2X wie M_1 liegt) berührt die Kreise k_1 und k_2 in den Punkten Q_1 bzw. Q_2.

Die Gerade durch Q_1 und Q_2 ist eine innere Tangente zu den beiden gegebenen Kreisen. Ausgehend von X' können wir nach Konstruktionsschritt 3 eine weitere innere Tangente konstruieren, die bzgl. M_1M_2 symmetrisch zu $\overline{Q_1Q_2}$ liegt. Den Beweis können wir in Analogie zu den äußeren Tangenten führen.

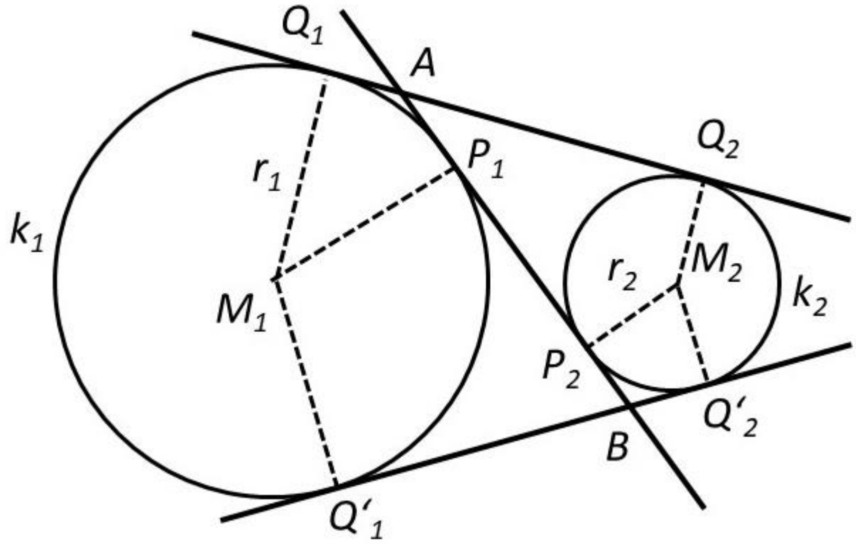
Satz. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, und sei P ein Punkt außerhalb von k. Dann gibt es genau zwei Tangenten durch P an den Kreis k. Die beiden Tangentenberührungspunkte sind von P gleich weit entfernt.

Beweis. Seien g und g' Tangenten durch P an den Kreis k. Dann haben g und g' jeweils genau einen Punkt mit k gemeinsam, die wir mit X bzw. mit X' bezeichnen. Von den rechtwinkligen Dreiecken MXP und $MX'P$ sind dann die drei Stücke bekannt: die Kantenlängen $|\overline{MX}| = |\overline{MX'}| = r$, die gemeinsame Kantenlänge $|\overline{MP}|$ und die rechten Innenwinkel bei X bzw. X'.



Weil P außerhalb des Kreises liegt, ist $|\overline{MP}| > |\overline{MX}|$. Damit wird der Kongruenzsatz SSW anwendbar, und es gilt insbesondere $|\overline{PX}| = |\overline{PX'}|$.

Satz. Sind zwei äußere und eine innere Tangente gegeben, so sind auf der inneren Tangente die zwei Tangentenabschnitte gleichlang.



Beweis: Es gilt für die äußeren Tangenten $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1'Q_2'}|$ oder $|\overline{Q_1A}| + |\overline{AQ_2}| = |\overline{Q_1'B}| + |\overline{BQ_2'}|$.

Die Tangentenabschnitte $\overline{AQ_1}$ und $\overline{AQ_2}$ außen sind gleich den Tangentenabschnitten $\overline{AP_1}$ und $\overline{AP_2}$ innen. Die Tangentenabschnitte $\overline{BQ_1'}$ und $\overline{BQ_2'}$ außen sind gleich den Tangentenabschnitten $\overline{BP_1}$ und $\overline{BP_2}$ innen.

Somit können wir die äußeren Tangentenabschnitte durch die inneren ausdrücken und finden $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}|$ bzw. $|\overline{Q_1'Q_2'}| = |\overline{BP_1}| + |\overline{BP_2}|$. Wegen $|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1'Q_2'}|$ gilt also $|\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}| = |\overline{BP_1}| + |\overline{BP_2}|$. Zerlegen wir die längeren Tangentenabschnitt $\overline{AP_2} = \overline{AP_1} + \overline{P_1P_2}$ bzw. $\overline{BP_1} = \overline{BP_2} + \overline{P_1P_2}$, erhalten wir die Gleichung $2 \cdot |\overline{AP_1}| + |\overline{P_1P_2}| = 2 \cdot |\overline{BP_2}| + |\overline{P_1P_2}|$, also $|\overline{AP_1}| = |\overline{BP_2}|$.

Folgerung. Schneidet die innere Tangente zweier Kreise die äußeren Tangenten in den Punkten A und B und sind Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte einer äußeren Tangente mit den Kreisen, so gilt $|\overline{AB}| = |\overline{Q_1Q_2}|$.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen wie in der Skizze des obigen Satzes. Dann gilt

$$|\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_1A}| + |\overline{AQ_2}| = |\overline{AP_1}| + |\overline{AP_2}| = |\overline{AP_2}| + |\overline{BP_2}| = |\overline{AB}|. \qquad \square$$

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 01/23.

Ist x eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ mit $0 < \mathrm{q} \leq \mathrm{n}$ und

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{n \cdot q}.$$

Lösungshinweise: Wir schreiben $\lfloor x \rfloor$ für den größten ganzen Teil und $\{x\}$ für den Nachkommateil einer reellen Zahl x, also $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ mit $\{x\} \in [0, 1)$. Wir zerlegen das Intervall [0, 1) in die n Unterintervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right)$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, …, $\left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right)$.

Von den $n + 1$ Zahlen $\{0 \cdot x\}$, …, $\{n \cdot x\}$, die alle in [0, 1) liegen, müssen nach den Schubfachprinzip mindestens zwei im gleichen Unterintervall liegen, d.h. wir finden zwei ganze Zahlen a und b $(0 \leq a < b \leq n)$ mit $|\{b \cdot x\} - \{a \cdot x\}| < \frac{1}{n}$. Aber es ist

$$\begin{aligned} |\{b \cdot x\} - \{a \cdot x\}| &= |b \cdot x - \lfloor b \cdot x \rfloor - (a \cdot x - \lfloor a \cdot x \rfloor)| \\ &= \left|\underbrace{(b - a)}_{q} \cdot x - \left(\underbrace{\lfloor b \cdot x \rfloor - \lfloor a \cdot x \rfloor}_{p}\right)\right| \end{aligned}$$

also haben wir $|q \cdot \alpha - p| < \frac{1}{n}$ mit $0 < q \leq n$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Monatsaufgabe[9] 3/23.

Im Dreieck ABC wird A an B nach A_1, B an C nach B_1 und C an A nach C_1 gespiegelt.

Man konstruiere das Dreieck ABC, falls nur die Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu diskutieren.

[9] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.05.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
04/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO620934 MO621034
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.