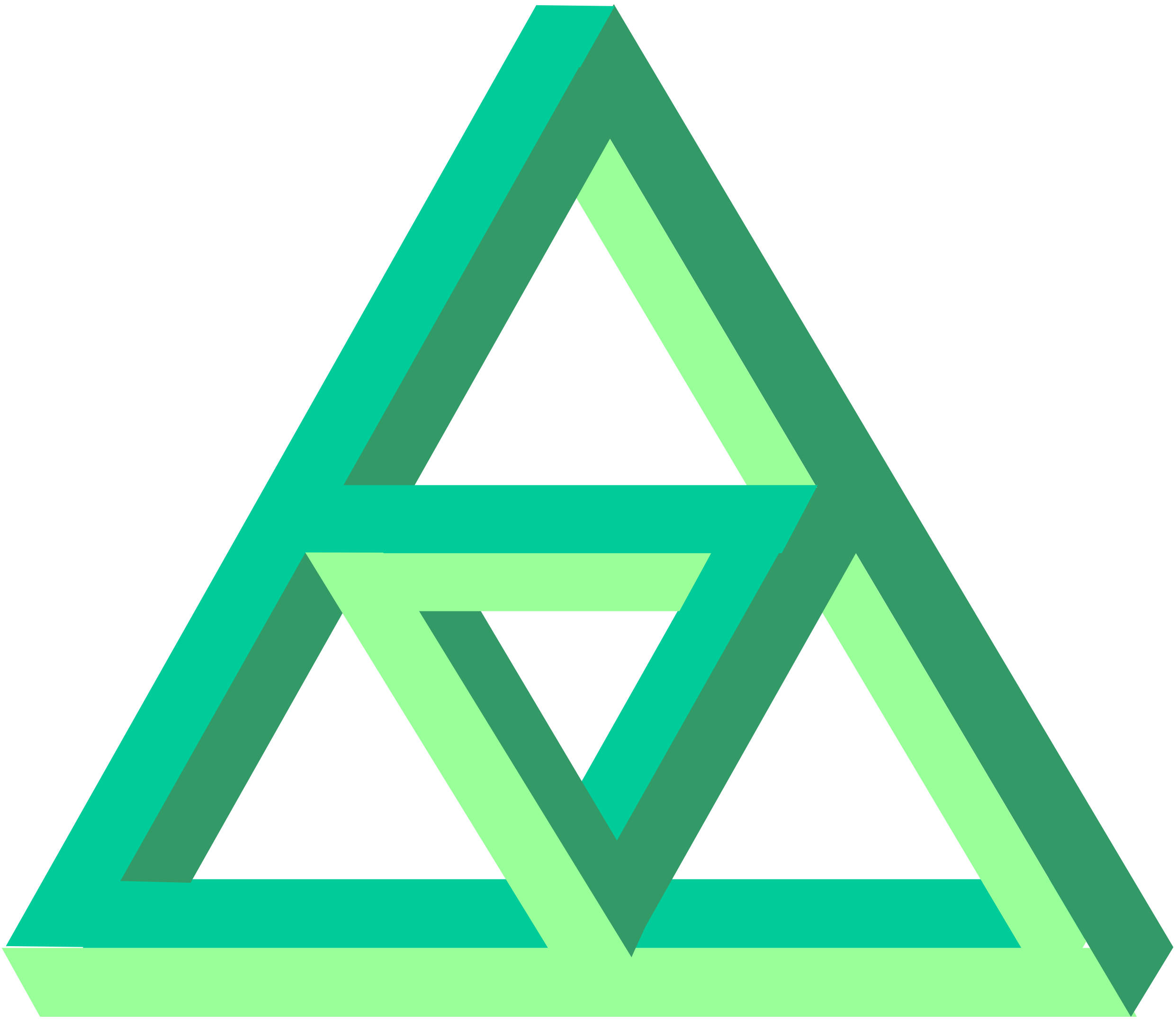
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 1&2/2023 (Januar/Februar 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO620923** werden Beispiele gezeigt, in denen die Berechnung großer Zahlen erforderlich waren. Während es in frühen Wettbewerbsjahren ausdrücklich zugelassen war, dafür (nicht programmierbare) Taschenrechner einzusetzen, ist es ohne technische Hilfsmittel unter Klausurbedingungen eine (zeitliche) Herausforderung, die nach Einschränkungen der Lösungsmenge suchen lässt.

Wir setzen den Beitrag über die Anwendung des Schubfachprinzips fort und zeigen Anwendungsbeispiele bei geometrischen Fragestellungen. Interessanterweise finden wir in einem Aufgabenbuch aus dem Jahr 1636 bereits eine Aufgabenstellung, deren Lösung mit diesem Prinzip dargestellt wird.

Die dritte Serie des KZM der Klassenstufen 9/10 stellte Aufgaben aus dem Archiv des Bundeswettbewerbs Mathematik zusammen – als Vorbereitung für die Teilnahme an der aktuellen Ausschreibung: Nicht vergessen – Einsendeschluss für die 1. Runde des BWM 2023 ist **6. März 2023** (Datum des Poststempels)!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 20 – Rechnen mit großen Zahlen

Es gibt in der Mathematik-Olympiade immer wieder einmal Aufgaben, bei denen viel gerechnet werden muss. Ohne technische Hilfsmittel wie unter Klausurbedingungen kann dies sehr zeitaufwändig sein, obwohl die Aufgabenstellung selbst wenig inhaltliche Probleme beinhaltet. Da die Rechnungen nachvollziehbar dargestellt werden müssen (beispielsweise mit schriftlicher Multiplikation auf dem Konzeptpapier) müssen wir also nach Einschränkungen suchen, die das Rechnen reduzieren.

Aufgabe 20.01 – MO620923. Bestimmen Sie alle fünfstelligen Quadratzahlen, die die folgenden drei Eigenschaften haben.

(1) Die Quadratzahl ist durch 3 teilbar.
(2) In ihrer Zifferndarstellung (im üblichen Zehnersystem) hat sie jeweils genau zweimal die Ziffer 7 und die Ziffer 6.
(3) Die Zehnerziffer ist ungerade.

Hinweis: 15625 ist eine (fünfstellige) Quadratzahl, weil $15625 = 125^2$ gilt. Ihre Zehnerziffer ist 2.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, es gibt eine solche Quadratzahl. Dann ist sie nicht nur durch 3, sondern auch durch 9 teilbar, weil jeder Primfaktor einer Quadratzahl in gerader Anzahl auftritt. Somit ist die Quersumme Q der Quadratzahl durch 9 teilbar. Wegen $2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 26 \leq Q \leq 26 + 9 = 35$ kommt nur $Q = 27$ in Frage. Die fünfte Ziffer ist daher eine Eins. Es gilt nun eine Anordnung der Ziffern 1, 6, 6, 7, 7 zu finden, die den Forderungen genügt. Insgesamt gibt es 30 verschiedene Möglichkeiten, die fünf Ziffern anzuordnen:

16677, 16767*, 16776, 17667*, 17676, 17766*
61677, 61767*, 61776, 66177, 66717, 66771,
67167*, 67176, 67617, 67671, 67716, 67761*
71667*, 71676, 71766*, 76167*, 76176, 76617, 76671, 76716, 76761*,
77166*, 77616, 77661*

Wegen $129^2 = 16641 < 16677 < \cdots < 77661 < 77841 = 279^2$ wären alle durch 3 teilbaren Basiszahlen von 132 bis 276 zu prüfen, ob sie zu Quadratzahlen der geforderten Art führen[3]. Es würde also genügen, eine Liste der Quadratzahlen zu erstellen, in der die Lösungen ersichtlich sein werden.

[3] Wegen $(n + 3)^2 = n^2 + 6 \cdot n + 9$ können wir schrittweise die Quadratzahlen, beginnend mit 129^2, ermitteln, ohne die Multiplikationen vollständig ausführen zu müssen.

Um den Rechenaufwand zu verringern, sollten wir zuvor noch möglichst viele Lösungskandidaten ausschließen.

Da nach Aussage (3) die Ziffer 6 nicht auf der Zehnerstelle steht, entfallen die 12 mit * markierten Möglichkeiten und es verbleiben 18 fünfstellige Zahlen, die Lösung sein können. Wir verwenden die Aussage (1) und untersuchen zeilenweise, welche Basiszahlen durch 3 teilbar sind:

Zeile 1: Wegen $129^2 = 16641 < 16677 < \cdots < 17676 < 17689 = 133^2$, ist hierbei nur 132 eine durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $132^2 = 17424$ liefert keine Quadratzahl der geforderten Art.

Zeile 2: Wegen $248^2 = 61504 < 61677 < \cdots < 66771 < 67081 = 259^2$, sind nur 249, 252, 255 und 258 durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $249^2 = 62001$, $252^2 = 63504, 255^2 = 65025$ und $258^2 = 66564$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art.

Zeile 3: Wegen $259^2 = 67081 < 67176 < \cdots < 67716 < 68121 = 261^2$, ist hierbei keine mögliche Basiszahl durch 3 teilbar.

Zeile 4: Wegen $267^2 = 71289 < 71676 < \cdots < 76716 < 76729 = 277^2$, sind nur 270, 273 und 276 durch 3 teilbare mögliche Basiszahlen. $270^2 = 72900$ und $273^2 = 74529$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art, aber $276^2 = 76176$ erfüllt alle Anforderungen.

Zeile 5: Wegen $27^2 = 77284 < 77616 < 77814 = 279^2$ ist die verbleibende Zahl keine Quadratzahl.

(Hierbei waren immer noch 18 Quadratzahlen zu berechnen!)

Wir suchen nach weiteren Einschränkungen. Das Quadrat einer positiven ganzen Zahl kann stets eindeutig durch $(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ dargestellt werden, wobei a eine nicht-negative ganze Zahl und b eine ganze Zahl mit $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ist. Die Zehnerziffer der Quadratzahl ist also nur dann ungerade, wenn b^2 einen ungeradzahligen Beitrag zur Zehnerziffer beiträgt, weil $20ab$ zur Zehnerziffer einen geradzahligen Anteil liefert. Wegen $b^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ kann dies nur für $b = 4$ oder $b = 6$ gelten. Die Einerziffer der Quadratzahl ist dann stets eine 6 und die Zehnerziffer ist gleich 1 oder 7. So verbleiben aus obiger Liste nur noch 9 mögliche Zahlen als Lösung:

16776, 17676
61776,
67176, 67716
71676, 76176, 76716, 77616

Zeile 1: Wegen $129^2 = 16641 < 16776 < 17676 < 17689 = 133^2$, ist nur 132 eine durch 3 teilbare mögliche Basiszahl, aber $132^2 = 17424$ liefert keine Quadratzahl der geforderten Art.

Zeile 2: Wegen $248^2 = 61504 < 61776 < 62001 = 259^2$ ist diese Zahl keine Quadratzahl.

Zeile 3: Wegen $259^2 = 67081 < 67176 < 67716 < 68121 = 261^2$, sind hier keine durch 3 teilbaren Quadratzahlen

Zeile 4: Wegen $267^2 = 71289 < 71676 < \cdots < 776161 < 77841 = 279^2$, sind nur 270, 273 und 276 durch 3 teilbare mögliche Basiszahlen. $270^2 = 72900$ und $273^2 = 74529$ liefern keine Quadratzahlen der geforderten Art, aber $276^2 = 76176$ erfüllt alle Anforderungen.

(Es genügte nun, 12 Quadratzahlen zu berechnen.) ❑

Hinweis: Eine unbewiesene Formulierung „Bis auf 76176 sind dies alles keine Quadratzahlen“ genügt nicht. Zumindest auf dem Konzeptpapier muss ersichtlich sein, wie diese Aussage durch konkrete Berechnungen begründet werden kann.

Lösungsvariante: Wenn wir die Eigenschaften der möglichen Lösungen ermittelt haben, also Teilbarkeit durch 3 und Endziffern 16 oder 76, so können wir auch die Basiszahlen von 129 bis 279 untersuchen. Dabei wissen wir schon, dass diese auf 4 oder 6 enden müssen. Es verbleiben:

144, 156, 174, 186, 204, 216, 234, 244, 264, 276

Es erscheint einfacher, diese zehn Quadratzahlen auszurechnen anstatt solcher Einschachtelungen wie oben zu finden.

Fall 1: Die Basiszahl endet auf 4. Sind a und b Ziffern, so wird die Zehnerziffer von $(100a + 10b + 4)^2 = 100 \cdot (100a^2 + 20ab + 8a + b^2) + 80b + 16$ allein durch die Endziffer von $8b + 1$ gebildet. Nur für $b = 2, 5, 7$ entsteht als Zehnerziffer 1 oder 7. Aus den Basiszahlen erfüllt das nur 174. Aber wegen $174^2 = 30276$ erfüllt diese Zahl nicht die Anforderungen.

Fall 2: Die Basiszahl endet auf 6. Sind a und b Ziffern, so wird die Zehnerziffer von $(100a + 10b + 6)^2 = 100 \cdot (100a^2 + 20ab + 12a + b^2) + 120b + 36$ allein durch die Endziffer von $12b + 3$ gebildet. Nur für $b = 2, 4, 7$ entsteht als Zehnerziffer 1 oder 7. Aus den Basiszahlen erfüllt das nur 276. Wegen $276^2 = 76176$ erfüllt diese Zahl alle Anforderungen.

Aufgabe 20.02 – MO510936. In dieser Aufgabe ist unter einer Zahl stets eine nichtnegative ganze Zahl zu verstehen. Wir nennen eine Zahl ergänzbar, wenn sie höchstens 5-stellig ist und sich durch Anhängen von genau fünf Ziffern an das Ende der Zahl zu einer (höchstens 10-stelligen) Quadratzahl ergänzen lässt. Beispielsweise ist die Zahl 4199 ergänzbar, da $419963049 = 20493^2$ eine Quadratzahl ist. Auch die Zahl 0 ist ergänzbar.

a) Bestimmen Sie die kleinste nicht ergänzbare Zahl.
b) Bestimmen Sie die Anzahl aller ergänzbaren Zahlen.

Lösungshinweise zu Teil a) Die kleinste nicht ergänzbare Zahl ist 25317.

Zunächst beweisen wir: Jede Zahl kleiner als 25000 ist ergänzbar. Andernfalls gäbe es eine Zahl n mit $0 \leq n < 25000$, die nicht ergänzbar ist. Dann wäre jede Quadratzahl entweder kleiner als $100000 \cdot n$ oder mindestens gleich $100000 \cdot (n+1)$. Also gäbe es eine natürliche Zahl k mit $k^2 < 100000n < 100000(n+1) \leq (k+1)^2$. Daraus folgte $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 > 100000$. Dies bedeutet $k \geq 50000$, also $100000n > k^2 \geq 25 \cdot 10^8$ und daher $n > 25000$, im Widerspruch zu Annahme $n < 25000$.

Wir betrachten nun Quadratzahlen der Form

$$q = (50000 + k)^2 = 25 \cdot 10^8 + 100000k + k^2$$

mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. Solange $k^2 < 100000$ gilt, sind die ersten fünf Ziffern von q gegeben durch $25000 + k$. Also sind für $k = 0, 1, \dots, 316$ die Zahlen $25000 + k$ ergänzbar ($316^2 = 99856 < 100000$). Die Zahl 25317 ist nicht ergänzbar, weil $50316^2 = 2531699856$ und $50317^2 = 2531800489$ gilt.

Lösungshinweise zu Teil b) Wir wissen bereits, dass jede Zahl kleiner als 25316 ergänzbar ist. Wegen

$$2500000000 = 50000^2 < 50001^2 < \dots < 99999^2 < 100000^2 = 10000000000$$

sind die übrigen ergänzbaren Zahlen gegeben durch die jeweils ersten 5 Ziffern der fünfzigtausend zehnstelligen Quadratzahlen $50000^2, 50001^2, \dots, 99999^2$.

Wir zeigen nun, dass je zwei dieser Quadratzahlen unterschiedliche ergänzbare Zahlen liefern. Wäre das nicht so, dann gäbe es zwei dieser Quadratzahlen, die sich um weniger als 100000 unterscheiden; insbesondere gäbe es eine Zahl $k \geq 50000$ derart, dass $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 < 100000$ ist. Das ist aber nicht möglich. Damit haben wir bewiesen, dass die Anzahl der ergänzbaren Zahlen gleich 25316 + 50000 = 75316 ist. ❑

Aufgabe 20.03 – MO471023. Bestimmen Sie alle neunstelligen Zahlen X mit folgenden Eigenschaften:

1. Jede der Ziffern 1, 2, …, 9 kommt einmal vor.
2. Streicht man von X die letzten sechs Ziffern weg, so bleibt eine durch 3 teilbare Zahl übrig, die genau drei verschiedene Primteiler hat.
3. Streicht man von X die ersten sechs Ziffern weg, so bleibt das Doppelte einer durch 3 teilbaren Quadratzahl übrig.
4. Streicht man von X die ersten drei und die letzten drei Ziffern weg, so bleibt eine Primzahlpotenz übrig.

Hinweis: Die Zahl $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ hat genau drei verschiedene Primteiler. Auch Primzahlen selbst sind Primzahlpotenzen!

Lösungshinweise: Die dreistelligen Zahlen, die von den ersten, den mittleren und den letzten drei Ziffern von X gebildet werden, bezeichnen wir mit A, B bzw. C. Nach Voraussetzung enthält X jede Ziffern 1, 2, …, 9 genau einmal, ihre Quersumme ist daher gleich 45, und deshalb ist X durch 3 teilbar. Da A und C auch durch 3 teilbar sind, folgt, dass auch B durch 3 teilbar ist. Weil B eine Primzahlpotenz ist, muss B eine Potenz von 3 sein. Die einzigen dreistelligen Potenzen von 3 sind $3^5 = 243$ und $3^6 = 729$. Auf jeden Fall enthält B also die Ziffer 2.

Die letzte Ziffer einer Quadratzahl ist eine der Ziffern 0; 1; 4; 5; 6; 9; die letzte Ziffer von C ist also 0, 2 oder 8. Da die Ziffer 0 nicht in X vorkommt und die 2 bereits in B enthalten ist, muss die letzte Ziffer von C eine 8 sein. Wir schreiben $C = 2 \cdot 9 \cdot y^2$ für eine positive, ganze Zahl y. Die letzte Ziffer von $9 \cdot y^2$ ist eine 4 oder eine 9; daher muss die letzte Ziffer von y^2 eine 1 oder eine 6 sein. Da C dreistellig ist, folgt außerdem

$$1000 > 2 \cdot 9 \cdot y^2 > 100 \qquad \text{also} \qquad \frac{1000}{18} > 55 \geq y^2 \geq 6 > \frac{100}{18}.$$

Daher ist y^2 entweder gleich 16 oder 36; im ersten Fall wäre $C = 2 \cdot 9 \cdot 16 = 288$, dann käme die Ziffer 8 aber zweimal vor. Also ist $C = 2 \cdot 9 \cdot 36 = 648$.

In C kommt also die Ziffer 4 vor, also kann B nicht gleich 243 sein und muss daher gleich 729 sein. Für A verbleiben die drei Ziffern 1, 3 und 5. Wir finden die Primfaktorzerlegungen

$$135 = 3^3 \cdot 5; \quad 153 = 3^2 \cdot 17;$$
$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7; \quad 351 = 3^3 \cdot 13;$$
$$513 = 3^3 \cdot 19; \quad 531 = 3^2 \cdot 59.$$

Also gilt $A = 315$. Die einzige Zahl mit den gewünschten Eigenschaften ist also $X = 315729648$. ❑

Aufgabe 20.04 – MO281036. Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n+2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.

Hinweis: Die Verwendung eines – nicht programmierbaren – Taschenrechners ist gestattet.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren mit dem Taschenrechner finden wir für $n = 1, \ldots, 6$ folgende Beispiele.

364 = 52 · 7;	3346 = 478 · 7;	34363 = 4909 · 7;
333634 = 47662 · 7;	3333463 = 476209 · 7;	33333643 = 4761949 · 7.

Weiterhin finden wir 333333 = 47619 · 7. Damit haben wir für jedes n, für das die Bedingungen erfüllbar sind, auch $n + 6$, für das die Bedingungen erfüllbar sind. Also gibt es tatsächlich für jede Zahl $n \geq 1$ eine Zahl der geforderten Art. ❑

Aufgabe 20.05 – MO390941. M sei die Menge alle derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie die größte ganze Zahl t, die ein Teiler aller Zahlen aus M ist.
b) Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl m, für die gilt, dass jede Zahl aus M mindestens m positive Teiler hat.
c) Ermitteln Sie die kleinste Zahl aus M, die mehr als 100 positive Teiler hat.

Lösungshinweise zu Teil a) Von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 8 teilbar, genau eine weitere durch 4 und jede der anderen durch 2 teilbar. Somit ist jede Zahl aus M durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$ teilbar. Da jede dritte gerade Zahl durch 3 teilbar ist, ist auch jede Zahl aus M durch 3 teilbar. Weil 2 und 3 teilerfremd sind, ist jede Zahl aus M durch $2^7 \cdot 3 = 384$ teilbar. Da zudem M auch 384 enthält, kann es keine größere Zahl geben, die alle Zahlen aus M teilt. Die größte ganze gesuchte Zahl ist also 384.

Lösungshinweise zu Teil b) Da $2^7 \cdot 3 = 384$ die größte ganze Zahl ist, die alle Zahlen aus M teilt, hat jede Zahl aus M mindestens so viele Teiler wie 384.

Hat eine Zahl n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ $(m > 0)$ und ganzzahlige positive Exponenten $k_1, \ldots, k_m$, so hat n insgesamt $(k_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$ verschiedene Teiler[4].

Wegen $2^7 \cdot 3 = 384$ hat die Zahl 384 insgesamt $m = 8 \cdot 2 = 16$ verschiedene Teiler. Dies ist zugleich die größte gesuchte Zahl.

[4] Diese Aussage darf laut offiziellen Lösungshinweisen als bekannt vorausgesetzt werden, siehe auch „Mathematische Kostproben“, Heft 09/2022, Bekannte Sätze.

Lösungshinweise zu Teil c) Wir schreiben die ersten Zahlen aus M auf und ermitteln die Anzahl ihrer Teiler T. Dieses vollständige systematische Probieren ist erforderlich, um auszuschließen, dass es keine kleinere Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben kann.

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2^7 \cdot 3$	mit $T = 8 \cdot 2 = 16$
$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$	mit $T = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	mit $T = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$
$8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
$10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 72$
$12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$
$14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	mit $T = 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108$

Die kleinste Zahl z aus M mit mehr als 100 Teilern ist also $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 80640$. ❑

Hinweis: Faktorendarstellungen wie in obiger Liste sind als Zwischenergebnisse zulässig. Wird aber im Aufgabentext nach einer Zahl gefragt, wird deren Angabe in einer Faktorendarstellung oder Potenzschreibweise als unvollständig gewertet.

Aufgabe 20.06 – MO391041. M sei die Menge alle derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen darstellen lassen.

a) Ermitteln Sie die größte ganze Zahl t, die ein Teiler aller Zahlen aus M ist.
b) Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl m, für die gilt, dass jede Zahl aus M mindestens m positive Teiler hat.
c) Ermitteln Sie die kleinste Zahl aus M, die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise zu Teil a) Von fünf aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 8 teilbar, genau eine weitere durch 4 und jede der anderen durch 2 teilbar. Somit ist jede Zahl aus M durch $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$ teilbar. Da jede dritte gerade Zahl durch 3 und jede fünfte gerade Zahl durch 5 teilbar ist, ist auch jede Zahl aus M durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar. Weil 2, 3 und 5 paarweise teilerfremd sind, ist jede Zahl aus M durch $2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$ teilbar. Da zudem M auch 3840 enthält, kann es keine größere Zahl geben, die alle Zahlen aus M teilt. Die größte ganze gesuchte Zahl ist also 3840.

Lösungshinweise zu Teil b) Da 3840 die größte ganze Zahl ist, die alle Zahlen aus M teilt, hat jede Zahl aus M mindestens so viele Teiler wie 3840.

Wegen $3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$ beträgt die Anzahl der verschiedenen Teiler nach der Formel über die Teilerzahl aufgrund der Primfaktorenzerlegung[5] $T = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Da M die Zahl 3840 selbst enthält, kann $m = 36$ nicht größer sein.

Lösungshinweise zu Teil c) Wir schreiben die ersten Zahlen aus M auf und ermitteln die Anzahl ihrer Teiler T. Dieses vollständige systematische Probieren ist erforderlich, um auszuschließen, dass es keine kleinere Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben kann.

$$\begin{array}{ll}
2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 & \text{mit } T = 9 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \\
4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 & \text{mit } T = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60 \\
6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 & \text{mit } T = 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108 \\
8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & \text{mit } T = 12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96 \\
10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 = 2^9 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 7 & \text{mit } T = 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 160 \\
12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 & \text{mit } T = 11 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 176 \\
14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 & \text{mit } T = 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240
\end{array}$$

Die kleinste Zahl z aus M mit mehr als 200 Teilern ist also

$$z = 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 1774080.$$

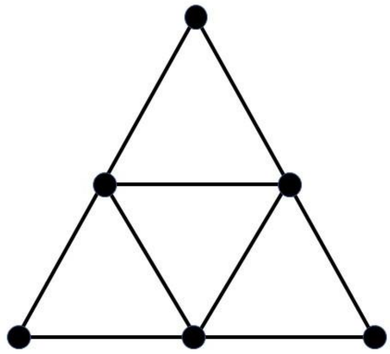
❑

DIRICHLETsches Schubfachprinzip (Teil II)

Das Schubfachprinzip findet auch oft in geometrischen Aufgabenstellungen Anwendung, beispielsweise wenn Punkte auf eine geometrische Figur verteilt werden. In einer solchen typischen Aufgabenstellung wurde in den Lösungshinweisen einer frühen Aufgabe jedoch (noch) auf die Nennung des Schubfachprinzips verzichtet.

Aufgabe 291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Lösungshinweise: Es sei a die Seitenlänge des Dreiecks. Dann können die fünf (und sogar sechs) Punkte wie in der Abbildung gelegt werden: Werden die Mittelpunkte der Dreiecksseiten verbunden, beträgt der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten hierbei $\frac{a}{2}$.



Wir zeigen nun, dass bei keiner Lage von fünf Punkten im Dreieck der kleinste Abstand zwischen zwei

[5] Diese Formel darf ohne Beweis verwendet werden, sollte aber ausführlich wie in Aufgabe 20.05 erläutert werden.

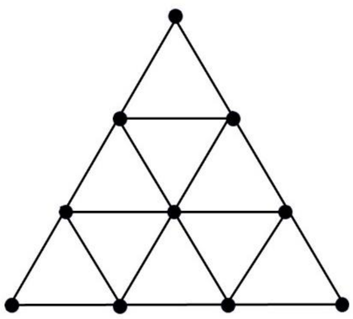
verschiedenen Punkten größer als $\frac{a}{2}$ sein kann. Gäbe es nämlich eine solche Lage, so wäre jeder dieser Abstände größer als $\frac{a}{2}$. Daher könnte dann in jedem der vier in der Abbildung gezeigten Teildreiecke höchstens ein Punkt liegen, also lägen insgesamt höchstens vier Punkte im ganzen Dreieck. Damit ist bewiesen, dass der größte Mindestabstand zweier Punkte von 5 in einem gleichseitigen Dreieck befindlichen Punkte höchstens $\frac{a}{2}$ beträgt und die gezeigte Verteilung diesen Mindestabstand realisiert. ❑

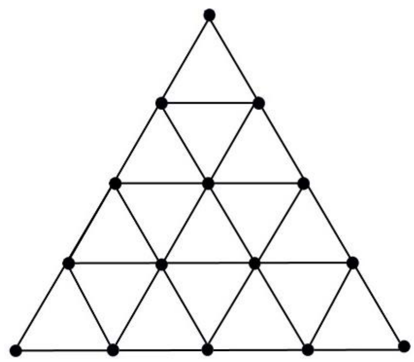
Lösungsvariante: Wir betrachten

> *5 Objekte:* fünf zu verteilende Punkte,
> *4 Schubfächer:* vier Teildreiecke wie in obiger Skizze.

Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem Teildreieck mindestens zwei Punkte. Deren Abstand kann aber nicht größer als $\frac{a}{2}$ sein. Da mit Verteilung der fünf Punkte auf die Eckpunkte der Teildreiecke eine Verteilung mit diesem Mindestabstand gefunden wurde, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Wir wollen diese Aufgabe verallgemeinern: Ermitteln Sie eine Verteilung von 10 bzw. 17 verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!





Lösungshinweise: Wir dritteln bzw. vierteln die Dreiecksseiten und konstruieren daraus ein Dreiecksgitter mit 9 bzw. 16 Teildreiecken, so können wir mithilfe des Schubfachprinzips zeigen, dass es jeweils mindestens zwei Punkte unter den 10 bzw. 17 Punkten gibt, deren Abstand nicht größer als $\frac{a}{3}$ bzw. $\frac{a}{4}$ ist. Um diesen Abstand zu gewährleisten, müssen aber die Punkte auf den Gitterpunkten liegen. Während im Fall der 10 Punkte genau 10 solche Gitterpunkte zur Verfügung stehen und deshalb eine Verteilung gefunden ist, bei der der maximale Mindestabstand $\frac{a}{3}$ beträgt, lassen sich die 17 Punkte nicht auf die 15 verfügbaren Gitterpunkte aufteilen. Wir finden in diesem Fall keine Verteilung mit dem Mindestabstand von $\frac{a}{4}$.

Dieser Aspekt wird mit folgender Aufgabe vertieft.

Aufgabe. Von zehn Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 LE haben mindestens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Hinweis: Bei Maßzahlen für Längen ohne Maßeinheit werde LE als Angabe in formalen Längeneinheiten verstanden.

Lösungshinweise: Wir betrachten

10 Objekte: zehn beliebig vorgegebene Punkte,
9 Schubfächer: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ LE

Mindestens in einem der Teilquadrate befinden sich mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Diagonale des Teilquadrates nicht übersteigen kann. ❑

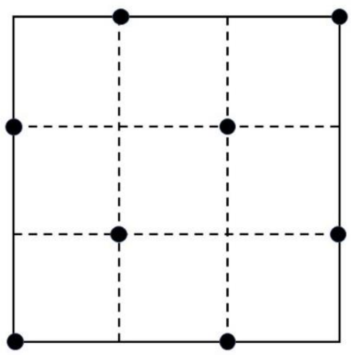
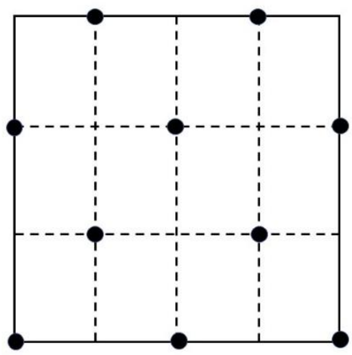
Man beachte, dass hiermit nur eine obere Grenze des maximalen Mindestabstandes angegeben werden kann. Es lässt sich mit dem Schubfachprinzip zunächst nur schlussfolgern, dass der maximale Mindestabstand den angegebenen Wert nicht übersteigt. Ob es eine Verteilung gibt, die diese Grenze auch tatsächlich annimmt, muss zusätzlich gezeigt werden. Dafür genügt es jedoch, ein Beispiel anzugeben.

Aufgabe. Man finde eine Verteilung von $n = 10$ Punkten in einem Quadrat mit möglichst großem Mindestabstand.

Hinweis: Im Gegensatz zu „der Abstand von zwei Punkten ist höchstens …“ bedeutet „möglichst großer Mindestabstand“, dass jedes Paar von Punkten mindestens diesen Mindestabstand einhält.

Lösungshinweise: Wie eben gezeigt gilt für den maximalen Mindestabstand von 10 Punkten in einem Quadrat $d_{10} \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}471.$

Es gelingt aber nicht, die 10 Punkte so zu verteilen, dass dieser Grenzwert der maximale Mindestabstand ist: Wahlen wir eine Zerlegung in neun Teilquadrate (linke Abbildung), so ist für die Einhaltung des Mindestabstandes erforderlich, die Punkte jeweils diagonal auf die Eckpunkte der Teilquadrate zu verteilen. Dies gelingt aber nur für maximal 8 Punkte.

Wir zeigen nun, dass der maximale Mindestabstand mindestens mehr als 0,4 beträgt. Teilen wir nämlich das Quadrat in 12 Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ (rechte Abbildung) und verteilen die 10 Punkte wie angegeben auf den Gitterpunkten, so beträgt der Mindestabstand

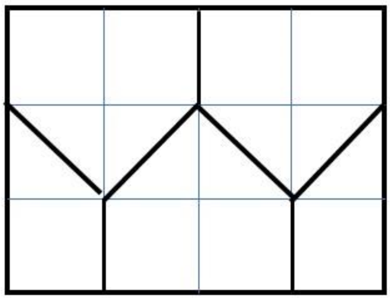
$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{144}} = \frac{5}{12} > 0{,}416.$$

❑

Aufgabe MO221034. Beweisen Sie folgende Aussage: In einem Quadrat der Seitenlänge a gibt es 10 Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5} \cdot a$ zueinander haben.

Lösungshinweise: Für die Beantwortung der Aufgabe genügt es, ein Beispiel einer solchen Verteilung anzugeben und den Nachweis zu führen, dass der genannte Mindestabstand bei jedem Punktepaar eingehalten wird. Die Gitterpunkte in der oben dargestellten Teilung des Quadrates in 3×4 Rechtecke bietet den Lösungsansatz. ❑

Aufgabe. Man zeige, dass von 6 Punkten in einem 3×4-Rechteck wenigstens zwei einen Abstand kleiner oder gleich $\sqrt{5}$ haben.



Lösungshinweise: Wir zerlegen das Rechteck in 5 Teilfiguren, wie in der Abbildung ersichtlich. Nun betrachten wir

6 Objekte: die vorgegebenen 6 Punkte,
5 Schubladen: die konstruierten 5 Teilfiguren.

In mindestens einer der Teilfiguren befinden sich mindestens 2 Punkte. Der maximale Abstand zweier Punkte in so einer Teilfigur beträgt

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

Aufgabe. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 werden zufällig 50 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass dann mindestens 2 Punkte einen Abstand kleiner als $\frac{1}{7}\sqrt{2}$ haben.

Lösungshinweise: Wir betrachten

50 Objekte: 50 vorgegebenen Punkte
49 Schubladen: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$, angeordnet im Gitter.

In mindestens einem Teilquadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$ befinden sich mindestens zwei Punkte, deren Abstand die Länge der Diagonalen nicht übersteigen kann: $\frac{1}{7} \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe. In einem Quadrat mit der Seitenlänge werden zufällig 51 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass es einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, in dem mindestens 3 Punkte liegen.

Lösungshinweise: Wählen wir die 51 Punkte als Objekte und untersuchen dazu die 49 Schubladen in Form von Teilquadraten mit der Seitenlänge $\frac{1}{7}$, so liegen mindestens zwei Punkte in Teilquadraten, in denen sich bereits ein Punkt befindet. Wir können aber nicht entscheiden, ob diesen beiden Punkte in einem gemeinsamen Teilquadrat liegen – der Lösungsansatz misslingt. Deshalb betrachten wir

51 Objekte: die vorgegebenen 51 Punkte
25 Schubladen: Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$, angeordnet im Gitter.

Wegen $51 = 25 \cdot 2 + 1$ befinden sich in mindestens einem Teilquadrat mindestens 3 Punkte. Der Radius des Umkreises eines solchen Teilquadrates ist die Hälfte seiner Diagonale, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{2} < 0.142 < \frac{1}{7}$. ❑

Aufgabe. Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 LE seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkten bestehendes Punktepaar gibt, sodass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ ist.

Lösungshinweise: Wir betrachten

28 Objekte: 28 beliebig vorgegebene Punkte,
27 *Schubfächer:* Teilquadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{3}$ LE.

Mindestens zwei Punkte befinden sich in einem der Teilwürfel, deren Abstand die Raumdiagonale des Teilwürfels nicht übersteigen kann. ❑

Aufgabe. In einem Würfel mit der Kantenlänge 7 werden 342 Punkte verteilt. Zeigen Sie, dass es dann immer einen Teilwürfel mit der Kantenlänge 1 gibt, in dem kein Punkt liegt.

Lösungshinweise: Wir betrachten

342 Objekte: die vorgegebenen 342 Punkte,
343 Schubladen: die $7^3 = 343$ Teilwürfel mit Kantenlänge 1, die sich gitterartig und überschneidungsfrei im gegebenen Würfel anordnen lassen.

Da es mehr Schubladen als Objekte gibt, muss mindestens eine Schublade leer bleiben („negatives oder umgekehrtes Schubfachprinzip“). ❑

Aufgabe. In der Ebene liegen ein Dreieck und eine Gerade. Die Gerade geht durch keinen Eckpunkt des Dreiecks. Zeigen Sie, dass dann die Gerade mindestens eine Dreiecksseite nicht schneidet.

Lösungshinweise: Wir betrachten

3 Objekte: 3 Eckpunkte des Dreiecks
2 Schubfächer: 2 Halbebenen, die durch die Gerade gebildet werden.

Dann liegen in mindestens einer Halbebene mindestens 2 Eckpunkte. Die Dreiecksseite zu diesen zwei Eckpunkten wird nicht durch die Gerade geschnitten.

Aufgabe. Kann ein gleichseitiges Dreieck mithilfe zweier kleinerer gleichseitiger Dreiecke lückenlos überdeckt werden?

Lösungshinweise: Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch und nehmen an, eine solche Überdeckung sei möglich. Das ursprüngliche Dreieck A habe die Seitenlänge a. Die kleineren Dreiecke A_1 und A_2 haben die Seitenlängen a_1 und a_2. Die Aufgabenstellung verlangt, dass $a_1 < a$ und $a_2 < a$ erfüllt ist. Somit müssen die Eckpunkte vom Dreieck A entweder durch A_1 oder durch A_2 überdeckt werden. Wir betrachten nun

3 Objekte: die 3 Eckpunkte des Dreiecks A,
2 Schubladen: die 2 Dreiecke A_1 und A_2.

Nach dem Schubfachprinzip überdeckt mindestens eines der Dreiecke zwei Eckpunkte (o.B.d.A. sei dies das Dreieck A_1), was zur Konsequenz hat, dass zwei Punkte im Dreieck A_1 den Abstand a haben und damit gilt: $a \leq a_1$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_1 < a$. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Obwohl das Schubfachprinzip bereits im 17. Jahrhundert angewandt wurde (ohne es jedoch so zu benennen), wird es nach einer Behandlung des Prinzips von PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859) im Jahr 1834 unter dem Namen *„DIRICHLETsches Schubfachprinzip“* bekannt. Eine frühe Quelle für solche Aufgaben finden wir 1636 in:

Deliciae physico-mathematicae[6]:

Oder Mathemat: und Philosophische Erquickstunden : Darinnen Sechshundert dreyund Sechzig Schone, Liebliche und Annehmliche Kunststucklein, lustgaben und Fragen

Wie solche uf der andern seiten dieses blats ordentlich nacheinander verzeichnet worden

Daniel Schwenter

Verlegung Jeremiae Dumlers, 1636

[Seite 34]

Vorrede:

Der erste Theil der Erquickstunden / darinnen XC Auffgaben und Fragen / auf der Arithmetica oder Rechenkunst / genommen / begriffen.

Was das rechnen vor eine treffliche Kunst und was Nutzen sie allen Ständen auff der gantzen Welt bringt / haben vor vielen und wenigen Jahren / eine grosse anzahl gelehrter Männer in ihren Schriften vmständlich aufgeführet und Sonnenklärlich dargethan; also daß solche allhier weitläufig zu rühmen / vnd mit hohen Worten herauf zu streichen / ganz vnötig; Wir lassen vns aber einzig und allein an des tieffsinnigen vnd weltweisen Mann Aristotelis Vrtheil von geachteter Kunst begnügen / welcher sie allen Mathematischen Wissenschaften weit vorziehet / vnd für die Edelste darunter hält; nicht allein wegen ihres großen Nutzens / sondern auch weil sie vor sich selbst vollkommen / vnd keiner andern Mathematischen Wissenschaft zu ihrer Verrichtung bedürfftig / da hingegen sie andern fast alle / mit hülfe vn zuthun der Rechenkunst erführe vollkommenheit erreichen. ...

Weil ich dann in meiner Jugend mich mit solchen Auffgaben auch vielfältig delectiret und ergötzet / hernach aber in zunemung meines Alters erfahren / daß solche Auffgaben Grund und Beweis zu erforschen / nicht schlechten Nutz / höhere Auffgaben Beweis zu ergründen / bringe / hab ich solcher 90. auß des Französischen Authoris vnd meinen collectaneis zusammn geschreiben / und in folgendem ersten Theil dieser Erquickstunden / theils mit den demonstratioinibus vnd Beweis / theils aber / damit dem Leser auch etwas außzudencken an die Hand gegeben würde / ohne Beweis / an Tag geben. Der günstige Leser woll damit vor lieb nehmen / vnd solches zu seiner Ergötzung / oder Nutzen nach belieben gebrauchen.

---

[6] https://www.google.de/books/edition/Deliciae_Physico_Mathematicae_Oder_Mathe/JBx877ilk0cC?hl=de&gbpv=1&dq=Deliciae+physico-mathematicae&printsec=frontcover. Ein Service von Google Books (zuletzt am 08.01.2023). Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurden weitgehend beibehalten.

[Seite 86]

Die LIII. Auffgab.

Zu erweisen daß es wol müglich / ja auch seyn müsse / daß unter zweyen Menschen einer so viel Haar an seinem Leib habe / als der ander.

Es ist / spricht der Französische Professor, eine richtige Sach / daß mehr Menschen auff der Welt / als der allerhaarigste Mensch an seinem Leib härlein hat : Weiln vns aber die Haar eines Menschen zu zehlen vnmüglich / wolln wir nur durch geringe Zahlen / bessers verstands halben / vnsere Auffgab erläutern vn demonstrirn. Wir setzen es seynt 100 Menschen / darunter der allerhaarichste nit mehr als 99 Haar habe; man möchte wol auch viel million Menschen nennen daß nit müglich ein Mensch so viel Haar haben sollte / wir bleiben obgesetzter Vrsach halben bey den 100. Dieweil nun mehr Menschen seynt als Haar an einem / lasset vns betrachten 99 Menschen und sagen / entweder seynt deren Haar ganz ungleich an der Zahl / oder es seynt welche gleiche Haar haben : Ist diß so dürffen wir ferners keines Beweises / vnd haben wir vnsere meynung erhalten : Sagt man aber keiner habe soviel als der ander vnter 99. So muß der erste nur ein Haar haben / der ander 2. der dritte 3. der vierdte 4. vnd so fortan / biß auff den neun vnd neunzigsten der müste haben 99 Haar. Nun weil noch überig der hunderste Mensch / der auch über 99 Haar nit hat / wie wir gesetzt / so muß er vnwidersprechlich in der Haarzahl mit einem vnter den 99 übereinkommen. Ebner massen kann man sagen : daß es müglich 2 Vögel oder mehr einer so viel Federn habe als der ander. Zween Bäume einer so viel Blätter als der ander. Zween Visch einer so viel Schuppen als der ander. Item zween Menschen daß einer so viel Gelt habe als der ander. Also köndte man folglich sagen / daß zwey grosse Bücher eins so viel Buchstaben köndte halten als das ander.

Die LIV- Auffgab.

Ob mehr Haar als Augen auff der Welt.

Mit einem vornemen Doctore in Nürnberg hatte ich die Zeit zu vertreiben dergleichen discurs; Meine Meynung war / es weren mehr Haar als Augen / dann man sollte die Menschen / Pferd / Kammel / Ochsen / Esels/ Gaiß / Hund / Katzen und andere Thier betrachten / welche viel 1000 Haar aber jedes nur zwey Augen hätten. Er aber nannte mir hingegen so viel Augen, daß ich davor erschrake ; Dann sagt er / wie viel 1000 Fisch / Krebs / Frösch / Krötn / Schlangen / Edexen / Scorpion / Mücke Flöh / Leuß / Wanzen / Schaben / Schwaben / Vögel vnd der gleichen seynt / welche alle nur Augen / keins aber kein Haar hat. Daß also noch vngewiß / ob mehr Haar als Augen auff der Welt ; welche ich lusts halben hieher setzen wollen.

...

[Seite 123]

Ende des ersten Theils der Erquickstunden

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [7].

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}.$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Wir nehmen an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Wir nehmen an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.

Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

---

[7] Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

$$\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4,$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=2.$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2}-1 \ < 1$ stets

$$r_1 < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = t$$

und

$$t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot 1 = r_2.$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine geeignete rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich wird.

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22.

Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl z mit den Eigenschaften

- z ist durch 2 teilbar,
- $Q(z)$ ist durch 3 teilbar und
- $Q(Q(z))$ ist durch 5 teilbar.

Hinweis: Mit $Q(n)$ wird die Quersumme von der ganzen Zahl n bezeichnet.

Lösungshinweise: Wenn $Q(z)$ durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme davon – also $Q(Q(z))$ – durch 3 teilbar. Somit gilt $Q(Q(z)) \geq 15$. Die kleinste Zahl mit Quersumme 15 ist 69. Die kleinste Zahl mit Quersumme 69 ist 69.999.999. Diese Zahl ist jedoch nicht durch 2 teilbar. Deshalb ist 79.999.998 die gesuchte Zahl, denn es gilt für alle Zahlen n mit $n < 79.999.998$ die Abschätzung $Q(n) < 7 + 6\cdot 9 + 8 = 69$, weil n an wenigstens einer Stelle eine kleinere Ziffer als 79.999.998 haben muss und insbesondere die Einerstelle eine gerade Ziffer ist. ❑

Monatsaufgabe[8] 1/23.

Zeigen Sie: Ist α eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, so existiert ein gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q mit $0 < q \leq n$ und

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{n \cdot q}.$$

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 28.02.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

[9] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.