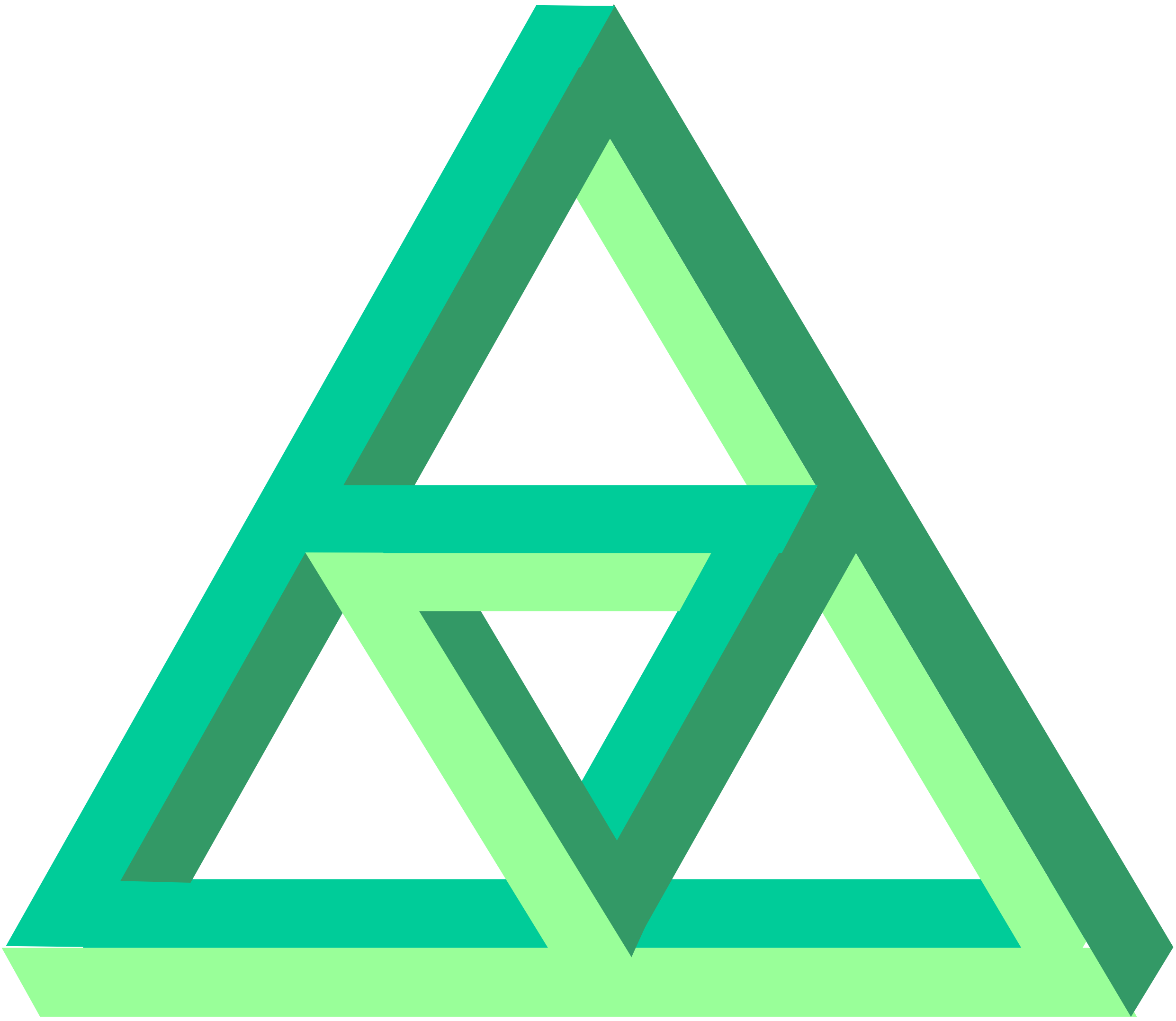
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Dezember 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Aus aktuellem Anlass informieren wir in diesem Heft über den Bundeswettbewerb Mathematik

Ein Auszug aus einem alten Mathematik-Buch soll unterhaltsam heutigen Schulstoff mit dem Blick vor über 100 Jahren zeigen.

In diesem Heft diskutieren wir im Thema 12 Bedeckungen von ebenen Figuren. Neben Dominosteinen wie in den Aufgaben **MO610922** und **MO611022** lassen sich auch andere Figuren für Bedeckungen verwenden. Es werden sowohl Lösungsansätze für beliebig große zu bedeckende Figuren gezeigt als auch die Färbungsmethode angewandt, um die Nichtexistenz von Bedeckungen der geforderten Art nachzuweisen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12 – Teil 1: Bedeckungen mit Dominosteinen

Aufgabe 12.1 - MO610922/MO611021[3]. Max bastelt durch Zusammenkleben von Teilen alter Schachbretter neue Figuren. Die Aufgabe ist nun, diese Figuren mit Dominosteinen lückenlos und überschneidungsfrei auszulegen. Dabei überdeckt jeder Dominostein genau zwei der Schachbrettfelder.
a) Die Abbildung 2 zeigt eine mögliche Anordnung von Dominosteinen, bei der die Figur in Abbildung 1 ausgelegt wird. Geben Sie alle anderen vier Möglichkeiten an, dieselbe Figur zu legen. Ein Nachweis, dass dies alle Möglichkeiten sind, wird nicht verlangt.

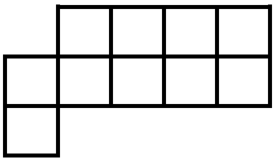


Abbildung 1

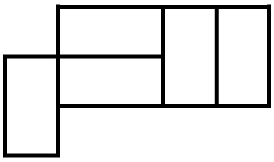


Abbildung 2

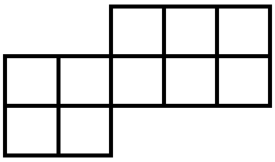


Abbildung 3

b) Geben Sie alle sechs Möglichkeiten an, die Figur in Abbildung 3 mit Dominosteinen auszulegen. Begründen Sie, dass es keine weiteren Möglichkeiten für das Auslegen der Figur geben kann.

c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die Figur in Abbildung 4 mit Dominosteinen auszulegen. Die Aussagen aus (a) und (b) dürfen Sie hierbei ohne Nachweis verwenden.

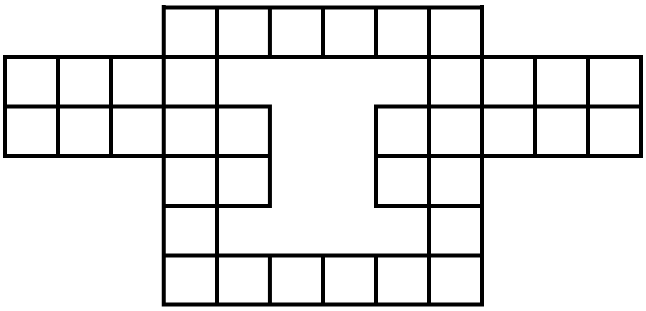
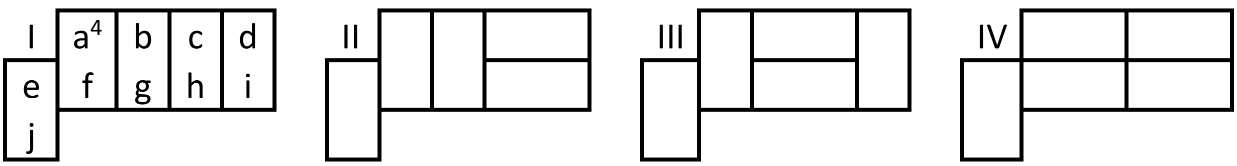


Abbildung 4

Lösungshinweise – Teil a) Es fällt nicht schwer, vier weitere Möglichkeiten anzugeben. Auch wenn im Aufgabentext der Nachweis ausdrücklich nicht verlangt wird, damit alle Möglichkeiten gefunden zu haben, wollen wir dies (zur Übung solcher Vollständigkeitsanalysen) dennoch nachweisen:



[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

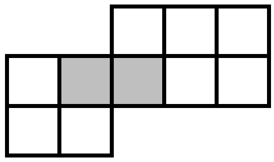
[4] Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Felder mit Kleinbuchstaben wie in der Zeichnung angegeben.

Um das Feld j zu bedecken, muss ein Dominostein auf e – j liegen. Um das Feld a zu bedecken, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Wir bedecken mit einem Dominostein a – f. Um nun das Feld b zu bedecken, gibt es wiederum zwei Möglichkeiten:

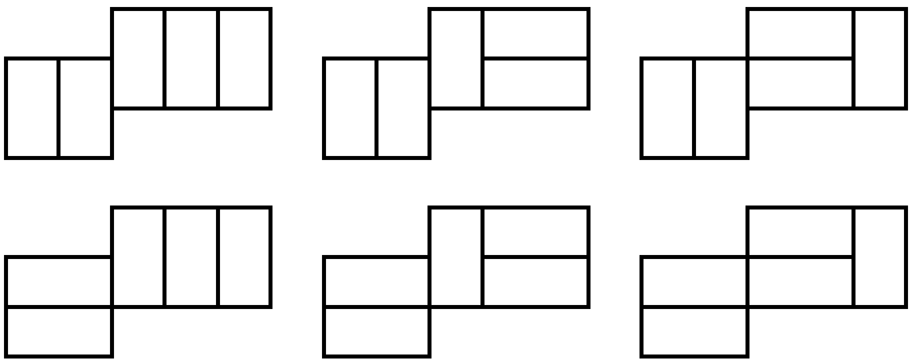
> *Fall 1A:* Wir bedecken mit einem Dominostein b – g. Die verbleibenden vier Felder können wir nun mittels c – h und folglich d – i bedecken (Variante I) oder mittels c – d und folglich h – i bedecken (Variante II).
>
> *Fall 1B:* Wir bedecken mit einem Dominostein b – c. Dann ergeben sich die Bedeckungen g – h und d – i zwangsläufig (Variante III).

Fall 2: Wir bedecken mit einem Dominostein b – c und folglich mit einem Dominostein f – g. Die verbleibenden vier Felder können wir nun mittels c – h und folglich d – i bedecken (Aufgabentext) oder mittels c – d und folglich h – i bedecken (Variante IV). Weitere Möglichkeiten kann es nicht geben.



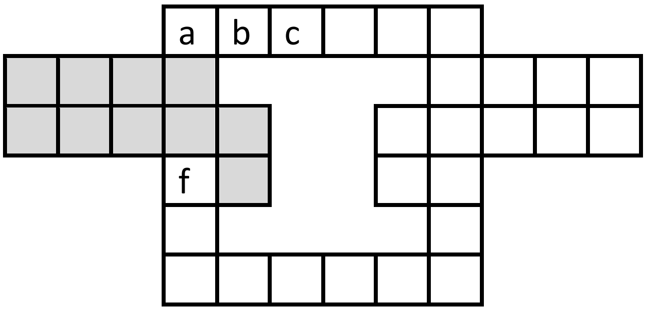
Teil b) Die grundlegende Lösungsidee besteht in der Zerlegung der Figur in eine 2×2-Figur und in eine 2×3-Figur. Offenbar kann kein Dominostein als Verbindung beider Teilfigur gelegt werden (graue Felder), da dann die jeweiligen Resflächen eine ungerade Anzahl von Feldern haben und folglich nicht vollständig durch Dominosteine bedeckt werden können.

Nun erkennen wir aber, dass für eine 2×2-Figur nur zwei Möglichkeiten für die Bedeckung existieren (zwei waagerecht liegende bzw. zwei senkrecht liegende Dominosteine). Außerdem erkennen wir, dass für eine 2×3-Figur nur drei Möglichkeiten für die Bedeckung existieren (drei senkrecht liegende Dominosteine bzw. zwei waagerecht liegende Dominosteine und ein senkrecht liegender Dominostein, entweder links oder rechts). Da beide Teilfiguren unabhängig voneinander bedeckt werden können, gibt es insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten. Die Aufgabenstellung verlangt, alle Möglichkeiten anzugeben:

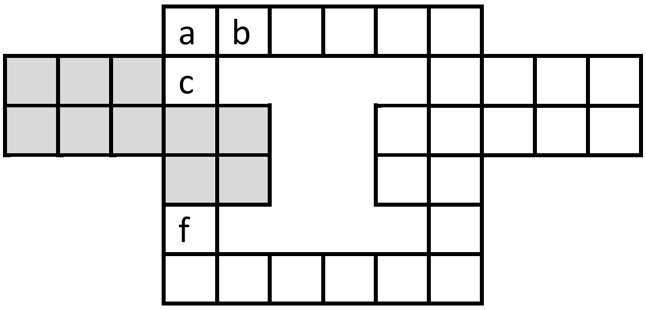


Teil c) Wir nehmen das Feld a als Ausgangspunkt für eine Bedeckung. Dann gibt es zwei Möglichkeiten.

Fall 1: Wir bedecken mit einem Dominostein a – b. Dann sehen wir die aus Teilaufgabe a) bekannte Figur. Kein aus dieser Figur herausragender Dominostein kann das Feld f bedecken, weil dabei eine ungerade Anzahl von Felder dieser Figur noch zu bedecken wären. Weiterhin sehen wir, dass mit c beziehungsweise mit f beginnend die nächsten Dominosteine in eindeutiger Weise gelegt werden müssen, bis spiegelbildlich auf der rechten Seite ebenfalls die Figur aus Teilaufgabe a) übrigbleibt. Da es für jede der Figuren aus Teilaufgabe a) 5 Möglichkeiten der Bedeckung gibt, gibt es im Fall 1 insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten.



Fall 2: Wir bedecken mit einem Dominostein a – c. Dann sehen wir die aus Teilaufgabe b) bekannte Figur. Kein aus dieser Figur herausragender Dominostein kann das Feld f bedecken, weil dabei eine ungerade Anzahl von Felder dieser Figur noch zu bedecken wären. Weiterhin sehen wir, dass mit b beziehungsweise mit f beginnend die nächsten Dominosteine in eindeutiger Weise gelegt werden müssen, bis spiegelbildlich auf der rechten Seite ebenfalls die Figur aus Teilaufgabe b) übrigbleibt. Da es für jede der Figuren aus Teilaufgabe b) 6 Möglichkeiten der Bedeckung gibt, gibt es im Fall 2 insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten.



Da es keine andere Möglichkeit gibt, das Feld a zu bedecken, gibt es insgesamt $25 + 36 = 61$ Möglichkeiten, die gegebene Figur zu bedecken. ❑

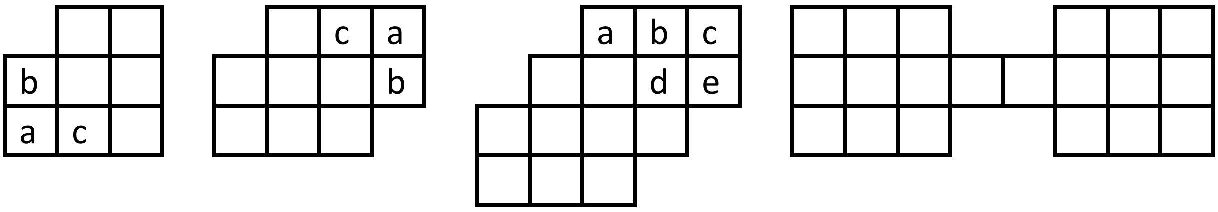
Max hat schon in vergangenen Jahren mit Dominosteinen experimentiert. Auch hier ist der Zusammenhang der Teilaufgaben in gleicher Weise gegeben.

Aufgabe 12.2 - MO550921. Max möchte die folgenden Figuren[5] mit Dominosteinen auslegen:

a) Finden Sie vier Möglichkeiten, die linke Figur mit Dominosteinen zu legen! Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

[5] Die Abbildungen waren Bestandteil der Aufgabenstellung, allerdings wurden die Bezeichnungen hier für die Lösungsdarstellung hinzugefügt.

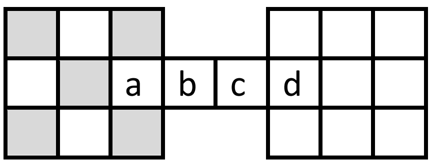
b) Geben Sie für jede der beiden mittleren Figuren alle Möglichkeiten an, sie mit Dominosteinen zu legen. Auch hier wird kein Vollständigkeitsnachweis verlangt.
c) Zeigen Sie, dass man die rechte Figur nicht mit Dominosteinen legen kann.



Lösungshinweise – Teilaufgabe a) Wir wollen systematisch alle Möglichkeiten suchen und bedecken zunächst das Feld a. Legen wir einen Dominostein auf a – c, so ist die Lage der weiteren Dominosteine bereits eindeutig bestimmt (1 Möglichkeit). Legen wir einen Dominostein dagegen auf a – b, so verbleibt ein 2×3-Rechteck, für das es insgesamt 3 Möglichkeiten gibt, es mit Dominosteinen zu belegen. Insgesamt finden wir also 4 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.

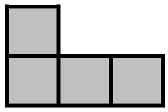
Teilaufgabe b1) Wir suchen systematisch alle Möglichkeiten und wollen zunächst das Feld a bedecken. Legen wir einen Dominostein auf a – c, so ist die Lage der weiteren Dominosteine bereits eindeutig bestimmt (1 Möglichkeit). Legen wir einen Dominostein dagegen auf a – b, so verbleibt eine Figur wie in Teilaufgabe a), für die es insgesamt 4 Möglichkeiten gibt, sie mit Dominosteinen zu belegen. Insgesamt finden wir also 5 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.

Teilaufgabe b2) Legen wir zunächst Dominosteine auf a – b und c – e, so verbleibt eine Figur wie in Teilaufgabe b1), für die es insgesamt 5 Möglichkeiten gibt, sie mit Dominosteinen zu belegen. Um das Feld c zu belegen, können wir aber auch die Dominosteine auf b – c und d – e bzw. auf b – d und c – e legen. In jedem dieser zwei Möglichkeiten ist die Lage der restlichen Dominosteine eindeutig festgelegt. Insgesamt gibt es also 5 + 2 = 7 Möglichkeiten, die laut Aufgabenstellung explizit anzugeben sind.



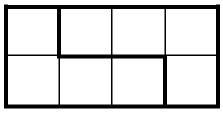
Teilaufgabe c) Würden wir einen Dominostein auf b – c legen, verblieben links und rechts 3×3-Quadrate, also jeweils eine ungerade Anzahl von Feldern, die sich nicht mit Dominosteinen bedecken lassen. Also müssen wir die Dominosteine auf a – b und folglich auch auf c – d legen. In der verbleibenden Teilfigur links können wir nun in einer systematischen Suche zeigen, dass diese nicht vollständig mit Dominosteinen bedeckt werden kann. Dies ist jedoch einfacher zu zeigen, wenn wir die grauen und weißen Felder zählen. Jeder Dominostein überdeckt nämlich immer – egal wie er liegt – ein graues und ein weißes Feld. Da aber 5 graue und 3 weiße Felder bedeckt werden müssen, ist dies mit Dominosteinen nicht vollständig möglich. ❑

Thema 12 – Teil II: Ebene Bedeckungen

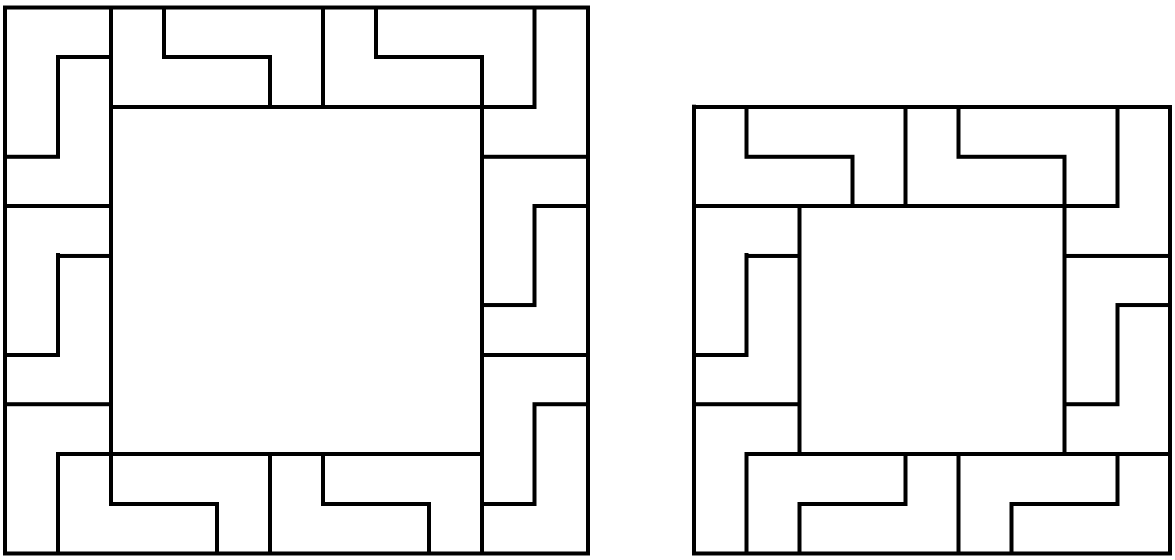


Aufgabe 12.3 - MO481021. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll in L-Stücke der in Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.
a) Bestimmen Sie für $n \in \{3; 5; 7; 9\}$ jeweils eine solche Zerlegung.
b) Zeigen Sie, dass für beliebiges ungerades n mit $n \geq 3$ die Zerlegung des $n \times n$-Schachbretts ohne mittleres Feld in eine gerade Anzahl von L-Stücken möglich ist.
c) Leiten Sie aus Aussage b) her, dass jede ungerade Quadratzahl bei Division durch 8 den Rest 1 lässt.

Lösungshinweise – Aufgabenteil b) Wir nehmen wir an, dass wir für einige ungerade Zahlen n bereits Zerlegungen in jeweils gerade viele Teile gefunden haben[6]. Wir konstruieren eine neue Zerlegung für $n + 4$, indem wir um das $n \times n$ -Quadrat einen Ring der Breite 2 legen. Da n ungerade ist, ist entweder $n - 1$ oder $n - 3$ durch 4 teilbar. Das linke Bild in der Abbildung zeigt die Konstruktion für den Fall $n = 15$ (also $n - 3$ ist durch 4 teilbar); das rechte Bild für den Fall $n = 13$ (also $n - 1$ ist durch 4 teilbar).



Jeder dieser Ringe kann durch zwei L-Stücke wie abgebildet an jeder der 4 Seiten um 4 verlängert werden. Offenbar wurde auch stets eine gerade Anzahl von Teilen benutzt.



Beginnend mit den Zerlegungen aus der Lösung zu Aufgabenteil a) erhalten wir so die gesuchten Zerlegungen für größere n.

Aufgabenteil c) Bei Division durch 8 lässt die Quadratzahl $1^2 = 1$ den Rest 1. Für ungerades $n \geq 3$ lässt sich eine Fläche aus $n^2 - 1$ Feldern in eine gerade Anzahl von

[6] Finden Sie gemäß Teilaufgabe a) solche Beispiele.

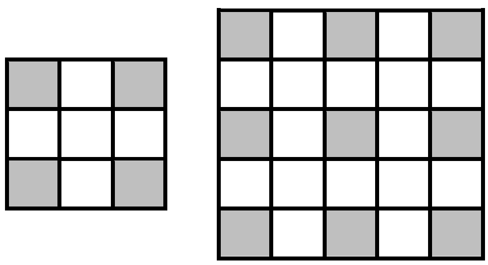
Teilen mit 4 Feldern zerlegen. Also ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Damit lässt n^2 bei Division durch 8 in der Tat den Rest 1, sofern n ungerade ist.

Aufgabe 12.4a - MO460943. Nicoles Zimmer soll neu gefliest werden. Zur Verfügung stehen nur die hier gezeigten Fliesen, die aus je 3 bzw. 4 Einheitsquadraten bestehen.

a) Zeigen Sie, dass es für $n = 1; 2; 3; 4; 5$ nicht möglich ist, ein quadratisches Zimmer, das aus $n \times n$ Einheitsquadraten besteht, mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren.
b) Zeigen Sie, dass es für jedes ganzzahlige n mit $n \geq 6$ möglich ist, ein quadratisches Zimmer der Seitenlänge n mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren.

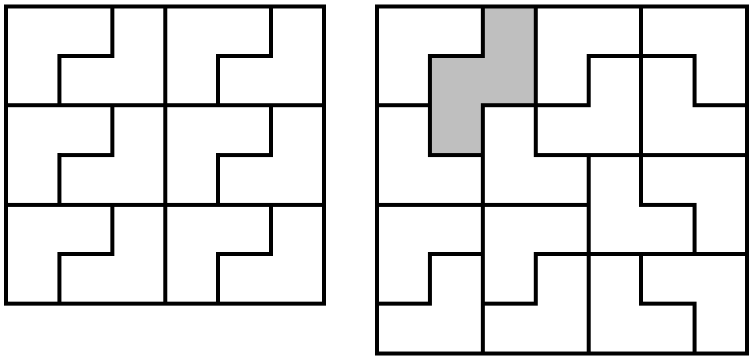
Aufgabe 12.4b – MO461043. Nicoles Zimmer … (s. Aufgabe MO460943).
a) Für welche positiven, ganzen Zahlen n ist es möglich, ein quadratisches Zimmer, das aus $n \times n$ Einheitsquadraten besteht, mit den gezeigten 3er- und 4er-Fliesen zu plattieren?
b) Nicoles Zimmer besteht aus 7×7 Einheitsquadraten. Bestimmen Sie die größtmögliche Anzahl 4er-Fliesen der gezeigten Form, die sich bei einer vollständigen Plattierung von Nicoles Zimmer verbrauchen lässt.

Lösungshinweise – Aufgabenteile a) Die vollständige Lösung zur Aufgabe in der Klassenstufe 9 beantwortet den Aufgabenteil a) in der Klassenstufe 10. Den allgemeinen Zugang zur Lösung für Aufgabe 12.4b finden wir durch systematisches Probieren: Für $n = 1$ und $n = 2$ sehen wir, dass es keine Bedeckung geben kann. Für $n = 4$ können wir die Nichtexistenz nachweisen, indem wir mittels Fallunterscheidung alle Belegungsmöglichkeiten – beginnend in einer Ecke – diskutieren und jeweils zu einem Widerspruch führen. Für $n = 3$ und $n = 5$ nutzen wir die Färbungsmethode für den Nachweis, dass keine Bedeckungen möglich sind:

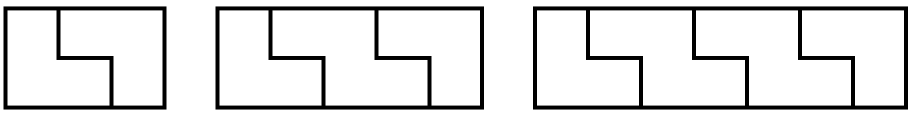


Egal, wie wir eine 3er- oder 4er-Fliese auf die Quadrate legen, es kann stets nur jeweils ein graues Feld bedeckt werden. Also sind beim 3×3-Quadrat mindestens 4 Fliesen und beim 5×5-Quadrat mindestens 9 Fliesen erforderlich. Jedoch decken 4 Fliesen mindestens $4 \cdot 3 = 12$ bzw. $9 \cdot 3 = 27$ Felder, also mehr, als in den Quadraten zur Verfügung stehen. Es kann also keine Bedeckung wie gefordert existieren.

Schließlich müssen wir $n = 6$ und $n = 7$ probieren und finden tatsächlich geeignete Bedeckungen.



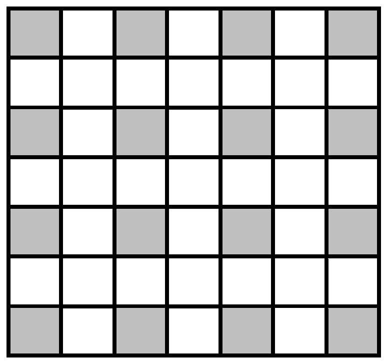
Um auch für größere $n > 7$ Bedeckungen nachzuweisen, nutzen wir die Möglichkeit, Streifen der Form $2 \times n$ mit ungerader Zahl $n \geq 3$ zu bilden:



…

Mit diesen Streifen können alle Streifen der Form $2 \times m$ mit gerader Zahl $m \geq 6$ bedeckt werden, da sich jede gerade Zahl $m \geq 6$ als $m = 3 + n$ mit ungerader Zahl $n \geq 3$ darstellen lässt. Somit können wir ausgehend von dem 6×6-Quadrat alle größeren Quadrate mit geradzahliger Seitenlänge und ausgehend von dem 7×7-Quadrat alle größeren Quadrate mit ungeradzahliger Seitenlänge bedecken, indem wir aufeinanderfolgende Streifen um die Quadrate legen.

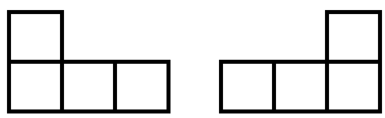
Lösungshinweise – Aufgabenteil b) Wir nutzen auch hier die Färbungsmethode: Wie oben stellen wir wieder fest, dass egal, wie wir eine 3er- oder 4er-Fliese auf dieses Quadrate legen, kann stets nur jeweils ein graues Feld bedeckt werden. Wir benötigen also mindestens 16 Fliesen. Bezeichnen wir mit x die Anzahl der 3er-Fliesen und mit y die Anzahl der 4er-Fliesen, so muss neben $x + y \geq 16$ auch $3x + 4y = 49$ gelten. Somit können wir die Anzahl y abschätzen, denn es gilt



$$49 = 3x + 4y = 3(x + y) + y \geq 48 + y$$

Somit ist $y = 1$ die größtmögliche Anzahl der 4er-Fliesen. Das obige Beispiel beweist, dass es tatsächlich eine Bedeckung des 7×7-Quadrates mit einer 4er-Fliese gibt.

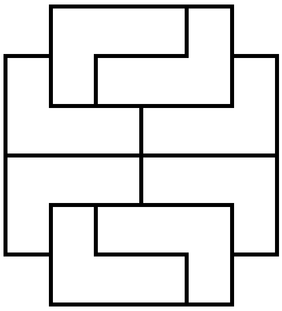
Aufgabe 12.5 – MO280936. Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Ecken vollständig so in Teile zu zerlegen, dass jedes Feld aus



einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!
Hinweis: Es ist zugelassen, dass in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

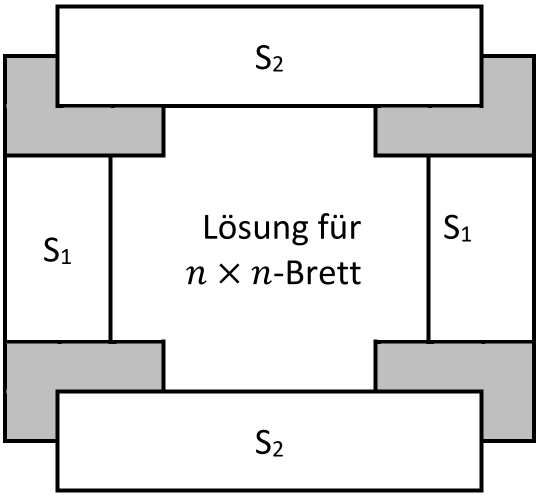
Lösungshinweise: Zunächst stellen wir fest, dass es keine Lösung für ungerade Zahlen n geben kann, denn in diesem Fall sind $n^2 - 4$ Felder, also eine ungerade Anzahl von Feldern zu bedecken. Mit den vorgegebenen Flächen kann aber nur eine gerade Anzahl von Feldern bedeckt werden.

Im zweiten Schritt können wir feststellen, dass es keine Zerlegung der geforderten Art geben kann, wenn n durch 4 teilbar ist.

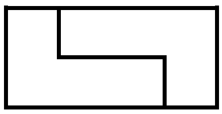


Schließlich weisen wir nach, dass für $n = 4k + 2$ mit $k > 0$ stets eine Zerlegung existiert. Für $n = 4 \cdot 1 + 2 = 6$ geben wir ein solches Beispiel an.

Haben wir nun – beginnend mit $n = 4 \cdot 1 + 2$ – die Zerlegung eines $n \times n$-Brettes mit $n = 4 \cdot k + 2$ gefunden, konstruieren wir eine Zerlegung des $m \times m$-Brettes mit $m = 4 \cdot (k + 1) + 2$:



Um das $n \times n$-Brett platzieren wir 4 der gegebenen Flächen wie in der Abbildung gezeigt (graue Flächen). Die Streifen S_1 haben das Format $2 \times (n - 2)$ und die Streifen S_2 haben das Format $2 \times (n + 2)$ mit $n \geq 6$. Ihre längeren Seiten sind also stets durch 4 teilbar. Deshalb lassen sich diese Streifen in Teile der nebenstehend abgebildeten Form zerlegen.

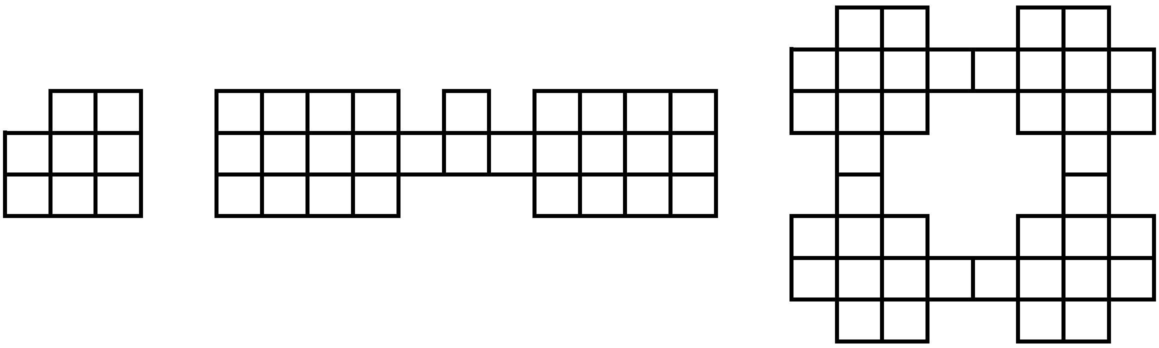


Somit ist das $(n + 4) \times (n + 4)$-Brett wie gefordert zerlegbar.

Zusammenfassend sind die geforderten Zerlegungen genau für alle natürlichen Zahlen $n = 4 \cdot k + 2$ mit $k \geq 1$ möglich. ❑

Thema 12 – Aufgaben: Bedeckungen

Aufgabe 12.5 - MO551021. Max möchte folgende Figuren mit Dominosteinen auslegen:

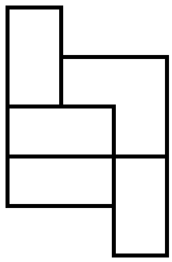


a) Finden Sie vier Möglichkeiten, die linke Figur zu legen! Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

b) Zeigen Sie, dass man die mittlere Figur nicht mit Dominosteinen auslegen kann.

c) Bestimmen Sie (mit Nachweis) die Anzahl der Möglichkeiten, die rechte Figur mit Dominosteinen auszulegen. Sie dürfen hierzu die Resultate der vorigen Aufgabenteile ohne Nachweis benutzen.

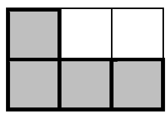
Aufgabe 12.6 - MO581022. Aus Dominosteinen der Form 2×1 und L-Steinen, bestehend aus drei quadratischen Feldern in L-Form, sollen Figuren gelegt werden.



a) In der Abbildung wurde eine Figur mit 11 Feldern aus vier Dominosteinen und einem L-Stein gelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, dieselbe Figur mit einem Dominostein und drei L-Steinen zu legen? Zwei Möglichkeiten sollen als gleich gelten, wenn sie durch Drehung als Ganzes ineinander überführt werden können.

b) Von einem 6×10-Rechteck werden nach Belieben zwei symmetrisch zum Mittelpunkt des Rechtecks liegende Felder entfernt. Zeigen Sie, dass die aus den übrigen 58 Feldern bestehende Figur immer mit zwei Dominosteinen und 18 L-Steinen ausgelegt werden kann.

Aufgabe 12.3 - MO481021. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll



in L-Stücke der in Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.

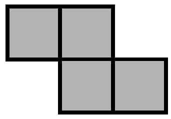
Zeigen Sie für jede dieser Zahlen n $n \in \{3; 5; 7; 9\}$, dass man die übrige Fläche in solche L-Stücke aus vier Schachbrettfeldern zerlegen kann.

Aufgabe 12.7 (Aufgabe 3-5A des KZM Klasse 9/10[7]).

a) Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2×2 und solche des Formates 4×1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

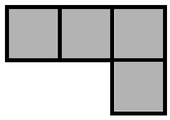
b) Man untersuche, ob der Fußboden eines rechteckigen Zimmers mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

F1

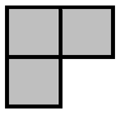


c) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich jeweils für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers, wenn zum Auslegen jeweils nur Platten der Form F2 verwendet werden soll.

F2



Aufgabe 12.8. Für welche n lassen sich $n \times n$-Spielfelder mit Spielsteinen der nebenstehenden Form so bedecken, dass genau ein (beliebig vorgegebenes) Feld frei bleibt?



[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1 nach BWM 1972, 1. Runde, K.R. Löffler (Hrsgb.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Verlage GmbH, Stuttgart 1987, S. 72.15.

Parkettierungen und Färbungen

Typische Wettbewerbsaufgaben zur Parkettierung (Bedeckung) beinhalten die vollständige und überdeckungsfreie Bedeckung von Figuren mit Domino-Steinen. Es ist offensichtlich, dass sich eine Fläche, die aus (8×8)-Quadraten besteht, mit Domino-Steinen parkettieren lässt. Aber geht dies auch, wenn wir zwei gegenüberliegende Eckfelder entfernen? Klar ist, dass die auszufüllende Fläche notwendigerweise eine gerade Anzahl an Teilquadraten besitzen muss. Dies erfüllt die aus 62 Quadraten bestehende Fläche. Nach einigem systematischen Probieren können wir uns sicherlich davon überzeugen, dass es dennoch keine solche Parkettierung gibt. Im Gegensatz zum Existenznachweis für eine Parkettierung, den wir lediglich konstruktiv durch Angabe eines Beispiels führen können, ist der Nachweis, dass es keine solche Parkettierung geben kann, nicht durch „misslungene" Beispiele führbar.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung solcher Aufgaben ist das geschickte Einfärben der Fläche. Im genannten Fall ist es beispielsweise nützlich, das 8×8-Quadrat wie ein Schachbrett einzufärben. Wir erkennen, dass es nach Entfernen von zwei (gleichfarbigen) Eckfeldern 32 schwarze und 30 weiße Felder (oder umgekehrt) auf dem Brett gibt. Wie wir jedoch leicht sehen, überdeckt ein Domino-Stein, der ja aus zwei aneinandergefügten Quadraten besteht, immer genau ein weißes und ein schwarzes Feld, nie zwei gleichfarbige Felder. Daraus folgt, dass sich die Fläche nicht mit Domino-Steinen parkettieren lässt.

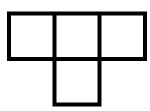
Aufgabe 1. Man untersuche, ob ein 10×10-Quadrat mit 1×4-Steinen vollständig ausgelegt werden kann.

Lösungshinweise: Wir färben das Quadrat mit vier Farben (hier durch Ziffern dargestellt) wie in der Skizze:

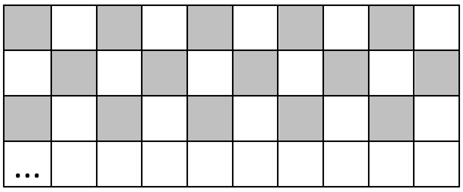
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
...									

Beim Auszählen der Felder erkennen wir, dass die Farben unterschiedlich häufig auftreten, im Widerspruch dazu, dass ein 1×4-Stein stets alle vier Farben bedeckt. ❑

Aufgabe 2. Man untersuche, ob ein 10×10-Quadrat mit Tetris-Steinen (s. nebenstehende Abbildung) vollständig bedeckt werden kann.



Lösungshinweise: Während ein 4×4-Quadrat bedeckt werden kann, vermuten wir (nach einigen Versuchen), dass es beim 10×10-Quadrat nicht gelingt. Um den Unmöglichkeitsbeweis zu führen, färben wir das Quadrat mit 2 Farben wie ein Schachbrett (vgl. Skizze):



Diese Färbung ergibt 50 weiße und 50 schwarze Felder. Ein Tetris-Stein überdeckt stets drei Felder einer Farbe und ein Feld der anderen Farbe. Somit sind für eine vollständige Überdeckung gleich viele Tetris-Steine mit drei weißen Feldern und mit drei schwarzen Feldern notwendig, im Widerspruch dazu, dass eine ungerade Anzahl der Tetris-Steine (25) zur Überdeckung der 100 Felder erforderlich ist. ❑

Aufgabe 3. Es wurde ein 7×7-Quadrat mit 1×3-Steinen überdeckt. Es bleibt ein 1×1-Feld frei. Wo kann dieses liegen?

Lösungshinweise: Wir färben das 7×7-Quadrat mit drei Farben (hier als Ziffern dargestellt):

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
...						

In der nebenstehenden Färbung stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Da aber ein 1×3-Stein stets drei Farben überdeckt, kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen.

1	2	3	1	2	3	1
3	1	2	3	1	2	3
2	3	1	2	3	1	2
...						

Nun erfolgte die Färbung willkürlich. Auch die nebenstehende Färbung wäre möglich. Auch hier stehen 17 Mal die Ziffer 1 und jeweils 16 Mal die Ziffern 2 und 3. Wiederum kann das freie Feld nur an einer „1“ stehen – aber insgesamt nur an solchen Stellen, die bei beiden Färbungen eine „1“ tragen. Welche sind es? Es ist nun noch zu zeigen, dass es tatsächlich Überdeckungen der geforderten Art gibt. ❑

Aufgabe 4. Auf einem 11×11-Spielfeld befinden sich auf allen Feldern je ein Käfer. Jeder Käfer verlässt sein Feld und begibt sich auf ein diagonal benachbartes Feld. Dabei können sich danach auf einem Feld mehrere Käfer befinden. Wie viele Felder bleiben mindestens frei, wenn sich alle Käfer wie beschrieben bewegt haben?

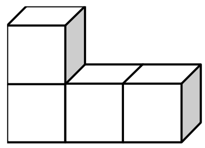
Lösungshinweise: Um sich zu verdeutlichen, ob Felder frei bleiben, betrachten wir zunächst kleinere Spielfelder. Bei einem 2×2-Spielfeld bleiben offenbar keine Felder frei, denn jeder Käfer wechselt von einer Ecke in die gegenüberliegende Ecke. Bei einem 3×3-Spielfeld müssen die vier Käfer der Eckfelder auf das mittlere Feld wechseln. Der anfangs auf dem Mittelfeld befindliche Käfer muss in eine Ecke wechseln. Die restlichen Käfer könnten jeweils mit einem diagonal benachbarten Käfer die Plätze tauschen. Es bleiben also mindestens drei (Eck-) Felder frei.

Für eine verallgemeinerungsfähige Beweisidee markieren wir in einem $n \times n$-Spielfeld die Felder wie in der Abbildung. Jeder auf einer „1“ befindliche Käfer wechselt zu einer „2“, und jeder auf einer „2“ befindliche Käfer wechselt zu einer „1“. Da es aber n Felder „1“ mehr als Felder „2“ gibt, müssen mindestens n Felder „1“ frei bleiben. Dass es eine solche Veränderung mit anschließend n freien Feldern tatsächlich geben kann, lässt sich problemlos mit einem Beispiel zeigen.

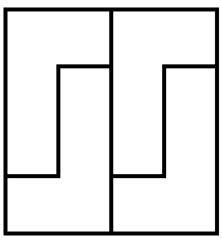
1	1	1	1	...
2	2	2	2	
1	1	1	1	
2	2	2	2	
1	1	1	1	
...				

❑

Aufgabe 5. Gegeben seien aus vier Würfel zusammengesetzte Körper der Form wie nebenstehend abgebildet. Wie viele solcher Körper sind mindestens notwendig, um daraus einen Würfel zusammenzusetzen?



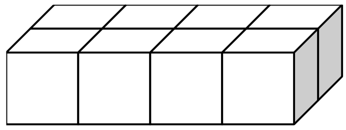
Lösungshinweise: Die Kantenlänge des kleinsten aus den gegebenen Körpern zu bauenden Würfel muss offensichtlich mindestens 3 betragen. Da aber dessen Volumen 27 Volumeneinheiten (VE) betragen würde, jeder Teilkörper aber aus 4 VE besteht, kann der $3 \times 3 \times 3$-Würfel nicht aus diesen Teilkörpern zusammengesetzt sein. Dagegen leistet ein $4 \times 4 \times 4$-Würfel das gewünschte, d.h., er kann aus 16 Teilkörpern gebildet werden, weil in einer Schicht 4 Teilkörper problemlos zusammengefügt werden können, zum Beispiel in folgender Weise:



Vier derartige Reihen übereinander gelegt ergeben einen vollständigen Würfel. Also genügen 16 Körper der gegebenen Form, um einen Würfel zusammenzusetzen. ❑

Ergänzende Bemerkung: Suchen wir den nächstgrößeren Würfel, so entfällt der mit der Kantenlänge 5 als Lösung. Weiter stellen wir fest, dass eine 6×6-Schicht nicht vollständig aus diesen Teilkörpern gebildet werden kann (Beweis der

Unmöglichkeit?). Aber der $6 \times 6 \times 6$-Würfel lässt sich aus 54 Teilkörpern der obigen Form zusammensetzen!



In ähnlicher Weise können wir die Fragestellung für Körper der nebenstehenden Form stellen. Die Kantenlänge des kleinsten Würfels muss mindestens 4 betragen und es bereitet keine Schwierigkeiten, einen solchen Würfel aus acht Körpern zusammenzusetzen. Den $6 \times 6 \times 6$-Würfel aus 27 Quadern der Abmessung $4 \times 2 \times 1$ zusammenzusetzen, erscheint im Volumenvergleich $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 = 27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$ ebenfalls problemlos – doch gefehlt, diese Aufgabe ist nicht lösbar (warum?).

Nachtrag zu Quersummen in Wettbewerbsaufgaben

Für die Aufgabe 2-1 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik[8] der Klassenstufen 9/10 finden wir in den Aufgaben der Mathematik-Olympiade eine verallgemeinernde Formulierung:

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) – q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Es sie n eine natürliche Zahl. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Zahl n endet nicht auf die Ziffer 9.
   In diesem Fall ist die letzte Ziffer von $n + 1$ um 1 größer als die letzte Ziffer von n. In allen vorangehenden Ziffern (falls es solche gibt) stimmen $n + 1$ und n überein. Also ist $q(n + 1) = q(n) + 1$ und folglich gilt $d(n) = 1$.

2. Die Zahl n endet auf genau k Ziffern 9 ($k > 0$).
   Vor den k Ziffern 9 steht eine von 9 verschiedene Ziffer. Wir bilden deren Summe $s(n)$. Steht vor den k Ziffern 9 keine Ziffer mehr, so gilt $s(n) = 0$. Dann finden wir $q(n) = s(n) + k \cdot 9$ und $q(n + 1) = s(n) + 1$. Folglich gilt $d(n) = 9k - 1$.

Die gesuchte Menge aller Zahlen $d(n)$ enthält also genau die Zahl 1 und alle Zahlen der Form $9k - 1$ mit ganzzahligem.

[8] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

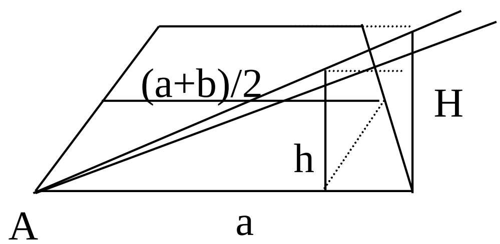
Folgerung (Aufgabe 2-1 des KZM, Klassenstufen 9/10). Die Zahl n = 2.899.999 ist die kleinste natürliche Zahl, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als die Quersumme ihres Nachfolgers $Q(n+1)$ durch 11 teilbar sind.

Lösungshinweise: Wir suchen die kleinste durch 11 teilbare Zahl m der Form $m = 9k - 1$. Durch systematisches Probieren finden wir dafür mit $k = 5$ den Wert $m = 44$. Daraus folgt, dass die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft auf fünf Ziffern 9 enden muss. Ist die Quersumme der vor diesen Ziffern 9 stehenden Ziffern gleich a (offenbar gilt $a > 0$), so erhalten wir $Q(n) = Q(a) + 5 \cdot 9 > 45$. Es muss also $a \geq 10$ gelten. Die Ziffernfolge 19 entfällt, weil dann n auf sechs Ziffern 9 enden würde. Die Ziffernfolge 28 erfüllt aber alle Bedingungen (wie durch eine Probe noch zu bestätigen ist).

Flächenhalbierung

In Anlehnung an Aufgabe 2-4 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik[9] der Klassenstufen 9/10 diskutieren wir die Flächenhalbierung eines Trapezes *ABCD* [10], wobei die Teilungsgerade g durch den Punkt A verlaufen soll. Für die Konstruktion des Punktes X (der Schnittpunkt der Flächenhalbierenden durch A mit der gegenüberliegenden Trapezseite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$) sind mehrere Lösungsvarianten möglich:

(1) Da es genügt, die Höhe h des Dreiecks ABX zu ermitteln, können wir unter Ausnutzung der Parallelität für die Höhe h und die Trapezhöhe H und die Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{CD}| = b$ die Gleichung über die Flächeninhalte



$$\frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \cdot H\right)$$

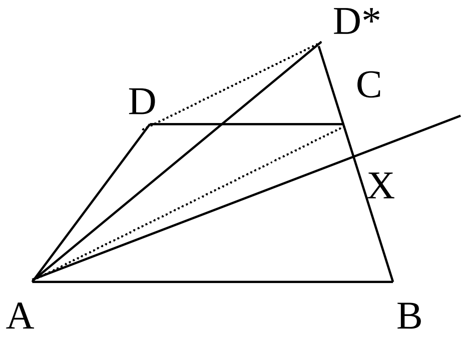
umformen zu

$$h : H = \frac{a+b}{2} : a$$

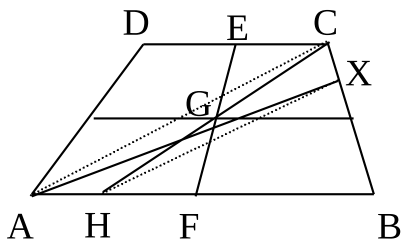
[9] Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

[10] nach MNU Vol. 47 (1994) Heft 6, S. 348-352

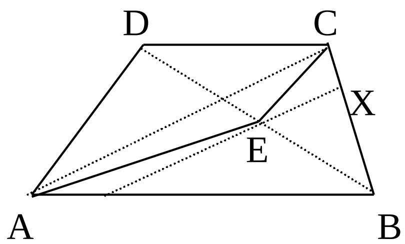
Diese Verhältnisgleichung können wir unmittelbar in der Trapezfigur wiederfinden. Dazu projizieren wir die Mittellinie (wie in der Skizze angedeutet) auf die Grundseite, zeichnen zudem die Höhe H im Punkt B ein und erhalten h.



(2) Ein anderer Lösungsweg besteht in der Scherung des Dreiecks ACD. Geschieht dies nämlich so, dass das entstehende Dreieck ABD^* (mit C auf BD^*) flächengleich zum Trapez $ABCD$ wird, so ist X offensichtlich die Seitenhalbierende von BD^*.

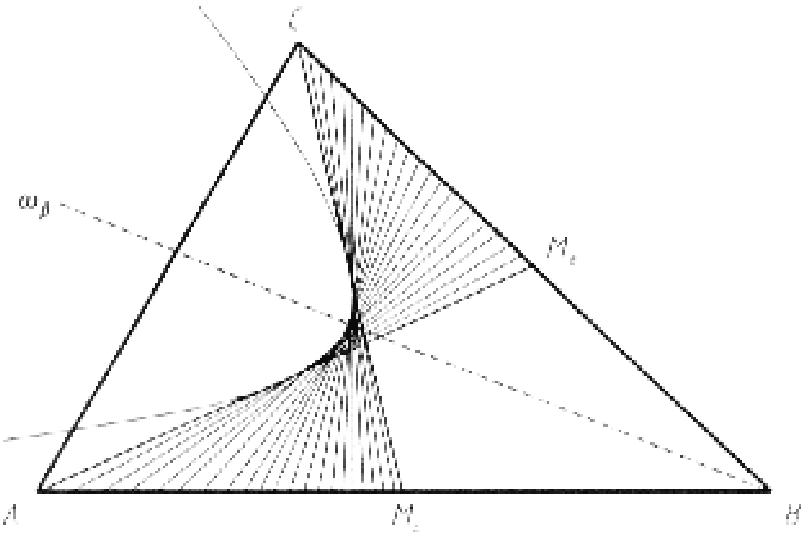


(3) Eine weitere Lösungsidee beruht auf der Verwendung einer trivialen Teilung, nämlich der Geraden durch die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten. Diese Gerade schneidet die Mittellinie in G. Drehen wir die Gerade EF um G, so sind die Dreiecke HEG und CFG inhaltsgleich (sogar kongruent). Somit teilt die Gerade HC die Trapezfläche in zwei flächengleiche Figuren. Mit Scherung des Dreiecks AHC bzgl. $\overline{AC}$ in das (inhaltsgleiche) Dreieck AXC ist der gesuchte Punkt gefunden.



(4) Diese Idee lässt sich verallgemeinern: Wir suchen überhaupt eine Halbierung und versuchen, diese dann geeignet zu modifizieren. Ist E der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$, dann halbiert der Streckenzug AEC die Trapezfläche, weil die Teildreiecke ABD und BCD jeweils halbiert werden. Durch Scherung des Dreiecks AEC bzgl. $\overline{AC}$ zum Dreieck AXE finden wir den gesuchten Punkt.

Die beiden letzten Lösungsvarianten legen die Frage nahe, wie sich die Lagen der Flächenhalbierenden in der KZM-Aufgabe 2-4 ändern, wenn sich die Position des Punktes D ändert. Die folgende Abbildung möge Anregungen für eigene Untersuchungen geben. Wir erkennen beispielsweise, dass der Schwerpunkt des Dreiecks nur in Grenzfällen auf der gesuchten Flächenhalbierenden liegt.



Bundeswettbewerb Mathematik 2022

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung e.V. von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Als Projekt von Bildung & Begabung steht der Bundeswettbewerb Mathematik unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen ihn und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs 2021 war die LEPPER Stiftung.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In *zwei Hausaufgabenrunden* werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.
In der dritten Runde, dem *Kolloquium*, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt.

Die Teilnehmerzahlen[11] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1479 (im Jahr 2018/19).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2018/19	1479	485 (32.8%)	46 (3.1%)	24 (52.2%)
2019/20	1177	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2020/21 in Sachsen erstmals nicht mehr weit über dem Durchschnitt! Unter den 45 sächsischen Teilnehmern wurden 9 erste, 5 zweite und 6 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (44.4%, bundesweit 36.6%). Dazu kamen noch 22 Anerkennungsurkunden (48.9%, bundesweit 43.1%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2018/19	265	69 (26.0%)	14 (5.3%)	6 (42.9%)
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)

[11] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2020/21 wurden 3 erster und 3 zweite Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 6 der 9 Starter!), darunter 2 Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2022 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter **https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik** erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Dr. E. Bardeys

Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik

Vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten.
Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906.[12]

Zweiter Teil. Algebra (Bestimmungsgleichungen)

XX. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten

A. Theorie

Unter einer quadratischen Gleichung oder einer Gleichung vom zweiten Grade versteht man eine Gleichung, welche auf die Form gebracht werden kann

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$
(allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.)

1. Spezialfälle a) a=0…
b) b=0 …
c) c=0…

2. A. Um die allgemeine Gleichung zweiten Grades aufzulösen, bringen wir dieselbe durch Division mit a und durch nachheriges Transponieren des von x freien Gliedes auf die Form

$x^2 + p \cdot x = q$ (1. Normalform der Gleichung zweiten Grades)[13]

Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt durch die Methode der quadratischen Ergänzung. Addiert man nämlich beiderseits das Quadrat des halben Koeffizienten von x, so wird die linke Seite ein vollständiges Quadrat. Man erhält

$$x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^4}{4} + q$$

oder

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 4 \cdot q}{4}$$

[12] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[13] Man beachte die von heutiger Schreibweise abweichende Form $x^2 + px + q = 0$.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2}$$

Es ergeben sich daher die beiden Wurzelwerte

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2} \qquad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4 \cdot q}}{2}$$

Bemerkung: Ist $p^2 + 4q > 0$, so ist $\sqrt{p^2 + 4q}$ reell, und es ergeben sich zwei von einander verschiedene reelle Wurzeln,

Ist $p^2 + 4q = 0$, so erhält man zwei reelle aber gleiche Wurzeln.

Ist $p^2 + 4q < 0$, so ist $\sqrt{p^2 + 4q}$ imaginär, also von der Form ib, falls i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Die Wurzeln x_1 und x_2 nehmen dann die Gestalt $a + ib$ und $a - ib$ werden komplexe Zahlen genannt (Gaußsche Zahlenebene!).

Es folgen die Abschnitte

3. Einführung einer neuen Unbekannten
4. Gleichungen 3. Und 4. Grades, die sich auf Gleichungen 2. Grades zurückführen lassen

B. Aufgaben

№ 1 bis 348, zum Beispiel

46. $\sqrt{5x + 4a - 3b} - \sqrt{5x - 4a - 3b} = 2 \cdot \sqrt{x + b}$

297. $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{8 - 2x} + \sqrt{x - 1}$

332. $(x^2 - 10) \cdot (x^2 - 18) = 13 \cdot x^2$

346. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

№ 1 bis 165 Sachaufgaben, zum Beispiel

53. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 29 m lang. Wie lang sind die Katheten, wenn die größere 1 m länger ist als die kürzere?

99. Zwei Maurer A und B können zusammen in 18 Tagen eine Mauer aufführen. Wie lange müßte jeder allein arbeiten, wenn B noch 15 Tage mehr braucht als A?

154. Wie groß ist die Länge der von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangente, wenn eine von demselben Punkt durch den Kreis gelegte Sekante doppelt so groß wie die Tangente, vermindert um eine Strecke a, und der äußere Abschnitt derselben doppelt so groß wie die Tangente, vermindert um eine Strecke b ist $(a < b)$?

Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021

Es sei $\{a_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 57. Weiter gelte $a_{40} = 24$ und $a_{80} = 12$. Bestimmen Sie die ersten drei Folgeglieder a_1, a_2 und a_3.

Inhaltsverzeichnis Heft Dezember 2021

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.