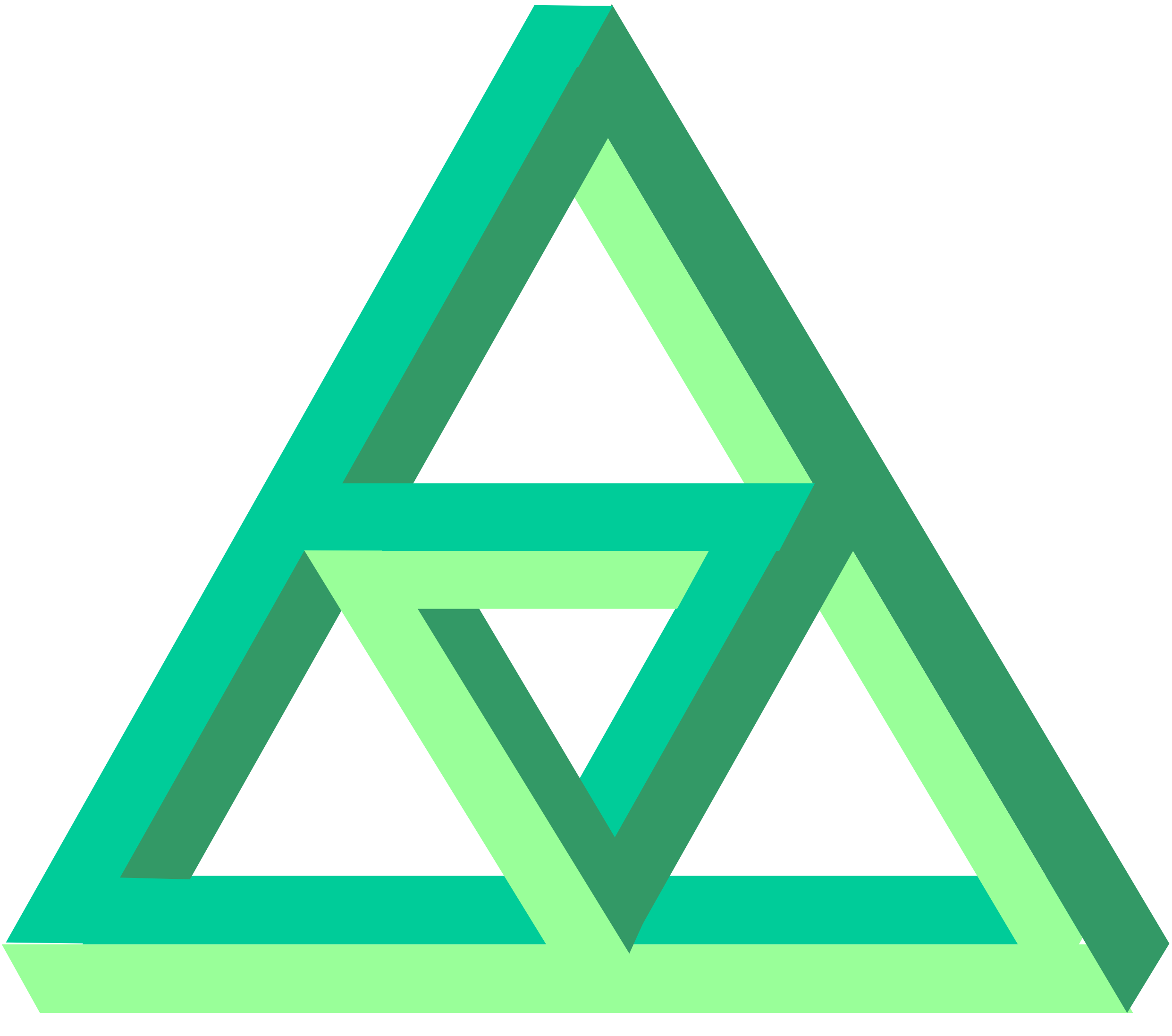
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Oktober 2021

20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10 haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Mit einem statistischen Blick wird die Entwicklung der Wettbewerbe beleuchtet. Auszüge aus alten Büchern über Mathematik sollen unterhaltsam Einblicke in der Mathematikgeschichte geben.

In diesem Heft blicken wir in Thema 09 auf die Bundesrunde der 60. MO zurück. Einerseits ist der Unterschied im Schwierigkeitsgrad der Aufgaben **MO600945** und **MO601046** bemerkenswert. Andererseits wird in den Lösungshinweisen zur Aufgabe **MO601046** ausdrücklich auf die Aufgabe **MO601033** verwiesen – eine Motivation für intensive Nachbereitung von MO-Aufgaben.

Angeregt durch die Aufgabe **MO611012** greifen wir noch einmal das Thema 01 auf. Obwohl zur Lösung dieser Aufgabe keine Fertigkeiten im Umgang mit Funktionalgleichungen erforderlich waren, könnte die Vertiefung der Thematik für ähnliche Fragestellungen förderlich sein.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich das Thema 07 in der Aufgabe **MO611011** wiederfand.

Thema 09 – Pythagoreische Zahlentripel

Aufgabe 9.01 – MO600945[1]. Untersuchen Sie, ob es eine fünfgliedrige Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadraten positiver ganzer Zahlen gibt, bei der jedes Folgenglied, beginnend mit dem dritten, die Summe der beiden vorangehenden Folgenglieder ist.

Hinweis: Es gibt unendlich viele dreigliedrige Folgen (a_1^2, a_2^2, a_3^2) mit dieser Eigenschaft, also mit $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2$, die pythagoräischen Zahlentripel.

Lösungshinweise: Nehmen wir an, es gäbe eine Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadraten positiver ganzer Zahlen, für die

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2,\ a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 \text{ und } a_3^2 + a_4^2 = a_5^2 \tag{1}$$

gilt. Haben a_1 und a_2 einen gemeinsamen Teiler d, so folgt aus (1), dass auch a_3, a_4 und a_5 diesen Teiler haben. Dann hat die durch d geteilte Folge ebenfalls die Eigenschaft (1). Zu jeder Folge von Quadratzahlen, die (1) erfüllt, gibt es also eine solche Folge, in der a_1 und a_2 teilerfremd sind.

Wir untersuchen nun, ob es eine Folge mit der Eigenschaft (1) gibt, in welcher a_1 und a_2 teilerfremd sind, und verwenden im Weiteren die Eigenschaft, dass eine gerade Quadratzahl durch 4 teilbar ist und eine ungerade Quadratzahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.

Die Zahlen a_1 und a_2 können nicht beide ungerade sein, denn dann ließe $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$ bei Division durch 4 den Rest 2. Also ist eine der beiden Zahlen a_1 und a_2 gerade und die andere ungerade. Daraus folgt, dass a_3 ungerade ist. a_2 kann nicht ungerade sein, denn sonst ließe $a_4^2 = a_2^2 + a_3^2$ bei Division durch 4 den Rest 2.

Also ist a_1 ungerade und a_2 gerade, folglich neben a_3 auch a_4 ungerade. Wegen $a_3^2 + a_4^2 = a_5^2$ ließe dann aber a_5^2 bei Division durch 4 den Rest 2. Das ist nicht möglich.

Unsere Annahme führt also in jedem Fall auf einen Widerspruch. Folglich kann es keine fünfgliedrige Folge $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2)$ von Quadratzahlen mit der Eigenschaft (1) geben. ❑

Aufgabe 9.02 – MO280931. Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, dass in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist.

[1] [1] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

Lösungshinweise: Ist eine Zahl nicht durch 5 teilbar (lässt also bei Division durch 5 einen der Reste 1, 2, 3 oder 4), so lässt das Quadrat dieser Zahl bei Division durch 5 einen der Reste 1 oder 4: $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9 = 5 + 4$, $4^2 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$.

Ist bereits eine der beiden Zahlen durch 5 teilbar, ist nichts weiter zu beweisen. Wir nehmen deshalb an, dass beide Zahlen a und b nicht durch 5 teilbar sind. Die Quadrate beider Zahlen können jedoch nicht beide gleichzeitig den Rest 1 bei Division durch 5 lassen, weil es keine Zahl c gibt, deren Quadrat bei Division den Rest $1 + 1 = 2$ lässt. Die Quadrate beider Zahlen können aber auch nicht beide gleichzeitig den Rest 4 bei Division durch 5 lassen, weil es keine Zahl c gibt, deren Quadrat bei Division durch 5 den Rest $4 + 4 = 8 = 5 + 3$ lässt. Folglich lässt bei Division durch 5 eine dieser Quadratzahlen den Rest 1 und die andere den Rest 4. Dann ist aber deren Summe c^2 durch $1 + 4 = 5$ teilbar. Weil 5 eine Primzahl ist, ist damit auch c durch 5 teilbar. ❑

Aufgabe 9.03 – MO101022. Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Es ist zu beweisen, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2 \cdot m \cdot n, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist.

Lösungshinweise: Der Nachweis der geforderten Eigenschaft wird in gleicher Weise wie eben bewiesen. Ist mindestens einer der Zahlen m und n durch 5 teilbar, so ist x durch 5 teilbar. Sind m und n beide nicht durch 5 teilbar, so haben ihre Quadrate entweder gleiche Reste (jeweils 1 oder 4) – dann ist y durch 5 teilbar – oder sie haben verschiedene Reste (1 und 4) – dann ist z durch 5 teilbar. ❑

Der Zusammenhang zwischen der Formulierung in Aufgabe MO101022 und den pythagoreischen Zahlentripel wurde in folgender Aufgabe thematisiert.

Aufgabe 9.04 – MO121122. Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.

a) Man beweise, dass dann $x = uv$, $y = \frac{u^2-v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2+v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d.h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel ist.
b) Man gebe je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt.

Nun war in der 60. MO die Umkehrung der Teilaufgabe a) zu beweisen.

Aufgabe MO601033. Einen Punkt im kartesischen Koordinatensystem nennen wir rational, wenn beide Koordinaten rationale Zahlen sind. Eine Gerade nennen wir rational, wenn sie einer Gleichung $ux + vy = w$ mit ganzen Zahlen u, v und w genügt, wobei u und v nicht gleichzeitig null sein dürfen.

Wir betrachten nun den Einheitskreis, beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

a) Weisen Sie nach, dass jede rationale Gerade, die den Einheitskreis nicht tangiert, mit dem Kreis entweder keinen oder genau 2 gemeinsame rationale Punkte hat.

b) Zeigen Sie, dass jeder von $(-1,0)$ verschiedene rationale Punkt des Einheitskreises auf einer rationalen Geraden durch den Punkt $(-1,0)$ liegt. Bestimmen Sie anschließend die Koordinaten dieses rationalen Punktes in Abhängigkeit von den Parametern v und w der Gleichung $u \cdot x + v \cdot y = w$ der zugehörigen rationalen Geraden.

c) Zeigen Sie: Zu jedem Zahlentripel (a, b, c) nichtnegativer ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und einander teilerfremden a und b, wobei b gerade ist, existieren zwei teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $0 \leq w < v$ derart, dass $a = v^2 - w^2$, $b = 2 \cdot v \cdot w$ und $c = v^2 + w^2$ gilt.

Lösungshinweise Teil c) Es seien a, b, c nichtnegative ganze Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ derart, dass a und b zueinander teilerfremd sind und b gerade ist. Wir betrachten zunächst den Fall $b = 0$. Weil a zu b teilerfremd ist, folgt $a = 1$ und somit $c = 1$. Die Zahlen $v = 1$ und $w = 0$ haben die gewünschten Eigenschaften.

Nun sei $b > 0$. Dann ist auch $c > 0$, und $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ ist ein von $(-1,\ 0)$ verschiedener rationaler Punkt des Einheitskreises. Gemäß Aufgabenteil b) gibt es also teilerfremde ganze Zahlen v und w mit $v > 0$ und $\frac{a}{c} = \frac{v^2-w^2}{v^2+w^2}$, $\frac{b}{c} = \frac{2vw}{v^2+w^2}$. Wegen $b, c > 0$ ist mit v auch w positiv, und aus den beiden Gleichungen folgt durch Division $\frac{a}{b/2} = \frac{v^2-w^2}{vw}$. Da v und w teilerfremd sind, ist $v^2 - w^2$ zu v, zu w und damit auch zu $v\ w$ teilerfremd. Weil auch a zu $\frac{b}{2}$ teilerfremd ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Bruchdarstellung von positiven rationalen Zahlen als Quotient zweier teilerfremder positiver Zahlen, dass $a = v^2 - w^2$ und $\frac{b}{2} = vw$, also $b = 2vw$ ist. Aus (5) folgt dann direkt $c = v^2 + w^2$. Weil b gerade ist und a teilerfremd zu b, muss a ungerade sein und deshalb $a > 0$ gelten. Aus $a = v^2 - w^2$ folgt also $w < v$. Die Zahlen v und w haben also die gewünschten Eigenschaften. ❑

Auf dem ersten Blick erscheint der Unterschied der folgenden Aufgabe zur Aufgabe MO600946 nicht so groß, aber die Beschränkung auf eine viergliedrige Folge anstatt der fünfgliedrigen Folge erfordert einen anderen Lösungsansatz.

Aufgabe MO601046. Beweisen Sie: Es gibt keine vier positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und $b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

Lösungshinweise: Ein primitives pythagoreisches Tripel (ppT) ist ein Tripel (a, b, c) paarweise teilerfremder positiver ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$.

Im Weiteren werden die folgenden bekannten Sätze über derartige Tripel benutzt:

- (P1) Ist (a, b, c) ein beliebiges pythagoräisches Tripel positiver ganzer Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$ und ist g der größte gemeinsame Teiler zweier dieser Zahlen, dann ist g auch ein Teiler der dritten Zahl und $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}, \frac{c}{g}\right)$ ist ein ppT.
- (P2) In einem ppT (a, b, c) ist genau eine der Zahlen a oder b gerade, c ist ungerade.
- (P3) (a, b, c) ist genau dann ein ppT mit geradem b, wenn es zwei teilerfremde positive ganze Zahlen m, n gibt mit $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Hinweis: Obwohl es im Text als „bekannte Sachverhalte“ genannt wurde, sollten die drei Aussagen bewiesen werden. Allerdings reichte es in der Schülerlösung für (P3) aus, auf die Lösung der Aufgabe 601033 c) zu verweisen.

Nehmen wir an, es gäbe vier Zahlen gemäß der Aufgabenstellung. Dann betrachten wir vier solche Zahlen a, b, c, d mit minimalem c. Dann sind (a, b, c) und (b, c, d) ppT wegen (P1), also sind c und d ungerade wegen (P2). Es folgt, dass b gerade und a ungerade ist. Auch a und d sind teilerfremd, denn wäre p ein gemeinsamer (ungerader) Primteiler von a und d, so wäre $d^2 - a^2 = 2b^2$ durch p^2, also b^2 und damit auch b durch p teilbar, und (a, b, c) wäre wegen (P1) kein ppT.

Gibt es ein Quadrupel, welches die Aufgabenstellung erfüllt, so gibt es also auch vier positive ganze Zahlen a, b, c, d, für die gilt:

$c^2 - b^2 = a^2$, (1)
$c^2 + b^2 = d^2$, (2)
a, b, c, d sind paarweise teilerfremd, (3)
a, c, d sind ungerade und b ist gerade (4)
und c ist minimal mit diesen Eigenschaften (1)–(4). (5)

Aus diesen Annahmen wollen wir einen Widerspruch herleiten. Multiplikation von (1) und (2) ergibt $c^4 - b^4 = a^2d^2$ und damit die pythagoreische Gleichung $(ad)^2 + (b^2)^2 = (c^2)^2$. Wegen (3) und (4) gibt es deshalb nach (P3) teilerfremde positive ganze Zahlen m, n ($m > n, m$ ungerade, n gerade) mit

$$ad = m^2 - n^2 \quad ; \quad b^2 = 2mn \quad ; \quad c^2 = m^2 + n^2$$

Somit ist (m, n, c) ein ppT mit geradem n. Es gibt deshalb teilerfremde positive ganze Zahlen p, q verschiedener Parität mit $m = p^2 - q^2, n = 2pq, c = p^2 + q^2$. Setzen wir m und n in b^2 ein, finden wir

$$b^2 = 2mn = 2(p^2 - q^2)2pq = 4(p - q)p(p + q)q\,.$$

Daher muss das Produkt $(p - q)p(p + q)q$ ein Quadrat sein. Da p und q teilerfremd und von verschiedener Parität sind, sind alle vier Faktoren des Produkts paarweise teilerfremd, also ist jeder von ihnen ein Quadrat. Wir setzen nun $r^2 = p - q$, $s^2 = q$, $t^2 = p$, $u^2 = p + q$. Dann sind r, s, t, u vier positive ganze Zahlen mit $r^2 + s^2 = t^2$ und $s^2 + t^2 = u^2$. Nun gilt aber $c = p^2 + q^2 > p^2 \geq p = t^2 \geq t$, und das ist ein Widerspruch zur Minimalität von c. ❑

Thema 01 –Funktionalgleichungen (Teil III): Periodische Funktionen[2]

In der **Aufgabe MO611012** wird die Schreibweise für Funktionalgleichungen verwendet. Es sind die Werte von z mittels

$$z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$$

zu berechnen mit $f(x) = 3x + 7$. Für die Lösung dieser Olympiade-Aufgabe sind Zusammenhänge über Funktionalgleichungen allerdings nicht erforderlich. Es genügt, z explizit als Funktion von x darzustellen, um die Antworten auf die Teilaufgaben a) bis d) zu finden. Im Rückblick auf das **Thema 01 Funktionalgleichungen (Teil II)**[3] wollen wir jedoch folgende Frage untersuchen:

Aufgabe 1.11. Finden Sie alle monotonen[4] reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und die folgende Gleichungen erfüllen:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 7;\ f(1) = 10.$$

Lösungshinweise: Da wir in der gegebenen Gleichung die Grundstruktur der CAUCHYschen Funktionalgleichung erkennen, vermuten wir eine ähnliche Lösung und verwenden einen Substitutionsansatz. Wir definieren die Funktion $g(x) = f(x) - 7$ mit $g(1) = 3$. Für die Funktion g gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - 7 = (f(x) + f(y) - 7) - 7 \\ &= (f(x) - 7) + (f(y) - 7) \ = \ g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Also erfüllt g die CAUCHYsche Funktionalgleichung und somit gilt $g(x) = cx$ mit dem Koeffizient $c = g(1) = 3$. (Die Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung darf als bekannt angegeben werden, wenn in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich formuliert wurde, dass diese Lösung hergeleitet werden soll.)

Also kann nur $f(x) = 3x + 7$ Lösung der Funktionalgleichung sein. ❑

Um den Umgang mit Funktionalgleichungen zu vertiefen, betrachten wir die

Definition. Die reelle Funktion $f: R \to R$ heißt periodisch mit der Periode $a \neq 0$, wenn für alle reellen Zahlen $x \in R$ die Gleichung $f(x+a) = f(x)$ erfüllt ist.

Die trigonometrischen Funktionen gelten sicher als die bekanntesten periodischen Funktionen und viele Eigenschaften lassen sich an diesen Funktionen demonstrieren. Aber auch in der Mathematik-Olympiade wurden häufig Aufgaben über periodische Funktionen gestellt. Zur Erklärung war jeweils ein Hinweis im Sinne obiger Definition angefügt.

[2] Nach Sprengel, H.-J.; Wilhelm, O.: Funktionen und Funktionalgleichungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984.

[3] Mathematische Kostproben, Heft Januar 2021

[4] Die Eigenschaft der Monotonie wird hier verwendet, um den Definitionsbereich der Funktionen von rationalen Zahlen auf reelle Zahlen erweitern zu können.

Aufgabe 1.12 – MO141232. Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p)=\frac{f(x)}{3\cdot f(x)-1}$$

a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist.
b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an!

Lösungshinweise: a) Als Lösungsansatz vermuten wir, dass $2p$ eine Periode ist und berechnen der Wert der Funktion f an der Stelle $x + 2p$:

$$f(x+2p)=\frac{f(x+p)}{3\cdot f(x+p)-1}=\frac{\frac{f(x)}{3\cdot f(x)-1}}{3\cdot\frac{f(x)}{3\cdot f(x)-1}-1}$$

Durch Zusammenfassen auf der rechten Seite erhalten wir für alle x tatsächlich $f(x+2p)=f(x)$. Folglich ist $2p$ eine Periode der Funktion f.

b) Die Existenz solcher Funktionen ist durch Angabe eines konkreten Beispiels nachgewiesen (und wird wie hier in den Wettbewerbsaufgaben meist gefordert). Dabei ist die Konstruktion recht einfach: Ist ein Zusammenhang für die Funktionswerte $x+a$ für um a verschobene Argumente x bekannt, so haben die angegebenen Beispiele stets die Form

$$f(x + a) = F(f(x)),$$

d.h., die weiteren Funktionswerte ergeben sich durch eine geeignete Funktion F von $f(x)$. Deshalb genügt es, im Intervall $0\le x<a$ die Funktion $f(x)$ beliebig zu definieren und dann die Werte im Intervall $a\le x<2a$ mittels F zu berechnen. Nutzen wir beispielsweise im ersten Intervall eine Konstante, wird auch für das zweite Intervall eine Konstante entstehen.

Setzen wir (willkürlich) $f(x)=1$ im Intervall $[0,p)$, so finden wir für das Intervall $[p,2p)$ für $0\le x<p$ die Funktionswerte

$$f(x+p)=\frac{f(x)}{3\cdot f(x)-1}=\frac{1}{3\cdot 1-1}=\frac{1}{2}$$

Verwenden wir noch einmal die Funktionalgleichung, erhalten wir im Intervall $[2p,3p)$ für $0\le x<p$ die Funktionswerte

$$f(x+2p)=\frac{f(x+p)}{3\cdot f(x+p)-1}=\frac{\frac{1}{2}}{3\cdot\frac{1}{2}-1}=1$$

und können $2p$ als Periode bestätigen.

An der Stelle $x = p$ ist ein Sprung notwendig, wenn f nicht eine konstante Funktion sein soll. Im Falle $f(x) = \frac{2}{3}$ würden wir dagegen eine konstante Funktion erhalten, weil auch $f(x+p)$ den Wert $\frac{2}{3}$ annimmt.

Mit einem linearen Ansatz im ersten Intervall gelingt es, eine nichtkonstante Funktion f ohne solche Sprünge zu konstruieren, wenn die Koeffizienten geeignet gewählt werden. Dazu setzen wir zunächst $f(x) = mx + n$ mit reellwertigen Koeffizienten m und n. Offensichtlich gilt $f(0) = n$ und $f(p) = mp + n$. Wir können aber den Funktionswert für p auch über die Funktionalgleichung bestimmen:

$$mp + n = f(p) = f(0+p) = \frac{f(0)}{3 \cdot f(0) - 1} = \frac{n}{3n - 1}$$

Legen wir nun (willkürlich) $m = -\frac{1}{2p}$ fest, erhalten wir eine Gleichung für n:

$$-\frac{1}{2} + n = \frac{n}{3n - 1}$$

für die wir $n = 1$ als eine Lösung erkennen. Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2p} + 1$ leistet das Gewünschte: Es ist $f(p) = \frac{1}{2}$ und $f(0+p) = \frac{f(0)}{3 \cdot f(0) - 1} = \frac{1}{2}$, d.h. an der Stelle p stimmen die Funktionsabschnitte überein. ❑

Aufgabe 1.13 - MO051222. Es sei a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
2. Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist.
b) Geben Sie für $f(x)$ einen rechnerischen Ausdruck an, der die obigen Eigenschaften hat!

Lösungshinweise: a) Als ersten Lösungsversuch vermuten wir wieder, dass $2a$ eine Periode sei und berechnen den Wert der Funktion f an der Stelle $x + 2a$:

$$f(x+2a) = \frac{1 + f(x+a)}{1 - f(x+a)} = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{\frac{1 - f(x) + 1 + f(x)}{1 - f(x)}}{\frac{1 - f(x) - 1 - f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{1}{f(x)}$$

Offenbar kann $2a$ keine Periode sein, jedoch finden wir für $4a$ den Zusammenhang

$$f(x+4a)=\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

Also erweist sich der Wert $4a$ als Periode der Funktion f.

b) Wir suchen wieder eine stückweise konstante Funktion und definieren in dieser Aufgabe (willkürlich) für das Intervall $[0, a)$ den Wert $f(x)=2$. Nach obiger Funktionalgleichung gilt dann im Intervall $[a, 2a)$

$$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

Ohne die obige Herleitung zu verwenden berechnen wir die Funktionswerte im Intervall $[2a, 3a)$ und $[3a, 4a)$ entsprechend der Funktionalgleichung:

$$f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

$$f(x+3a)=f(x+2a+a)=\frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}$$

In beiden Fällen erkennen wir, dass wir tatsächlich für den Funktionswert an der Stelle $x+2a$ das Reziproke des Funktionswertes an der Stelle x erhalten. ❑

Offensichtlich gilt für periodische Funktionen folgende Eigenschaft: Ist a eine Periode, dann ist $2a$ ebenfalls eine Periode, denn es gilt für alle x

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=f(x+a)=f(x)$$

Verallgemeinernd gilt sogar

Aufgabe 1.14. Die Zahlen $a_1,\ a_2$ seien Perioden der Funktion f. Dann ist für beliebige ganzzahlige Zahlen m und n die Zahl $a_3=m\cdot a_1+n\cdot a_2$ ebenfalls eine Periode von f (falls $a_3\neq 0$).

Lösungshinweise: Zum Beweis führen wir ohne Probleme mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion den Nachweis, dass mit a auch jedes ganzzahlige Vielfache von a eine Periode ist. Dann genügt noch nachzuweisen, dass für zwei Perioden a, b auch deren Summe eine Periode ist. Dazu finden wir für alle reellen Zahlen x des Definitionsbereiches

$$f(x+(a+b))=f((x+a)+b)=f(x+a)=f(x).$$

❑

Thema 01 – Funktionalgleichungen (Teil III) – Aufgaben

Aufgabe 1.15 – MO111032. Eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, sei periodisch mit der Periode P. Die kleinste positive Zahl, die Periode von f ist, sei p. Jede weitere Periode P ist dann ein ganzzahliges Vielfaches von p. Welche kleinste Periode hat dann die Funktion

a) $F(x) = \frac{1}{2} f(x)$ b) $G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$?

Aufgabe 1.16. Die folgenden Funktionen f seien jeweils für alle reellen Zahlen x definiert. Man zeige, dass sie periodisch sind, ermittle die kleinste Periode und gebe für (a) bis (c) ein konkretes Beispiel an.

a) $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x)$

b) $f(x+1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$

c) $f(x+1) = \sqrt{4 - f(x)^2}$

d) $f(x) = (-1)^{[x]}$

e) $f(x) = x - [x]$

(Hinweis: $[z]$ bezeichne die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Aufgabe 1.17. Die Funktionen f_1, f_2 seien periodisch mit den Perioden a_1 beziehungsweise a_2. Wenn ganze Zahlen $m,\ n \neq 0$ mit $m \cdot a_1 = n \cdot a_2$ existieren (also der Bruch $\frac{a_1}{a_2}$ eine rationale Zahl ist) dann sind

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$f_4(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$
$$f_5(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad falls \quad f_2(x) \neq 0$$

ebenfalls periodische Funktionen mit der Periode $a_3 = m \cdot a_1 = n \cdot a_2$.

Pythagoreische 4-Tupel [5]

Quadrupel (a, b, c, d) von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P-4-Tupel.

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da wir andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnten). Ein teilerfremdes P-4-Tupel, also mit ggT$(a;b;c;d) = 1$, kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P-4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P-4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen a, b und c sind ungerade und folglich auch d. Somit gibt es ganze Zahlen a', b', c' und d', so dass die Gleichung

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c' + 1)^2 = (2d' + 1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot \left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + a' + b' + c'\right) + 2 = 4 \cdot d' \cdot (d' + 1)$$

erkennen wir, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen a, b und c sind ungerade, die dritte und folglich auch d sind gerade. Wir betrachten also o.B.d.A. den Fall

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c')^2 = (2d')^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot \left(a'^2 + b'^2 + a' + b'\right) + 2 = 4 \cdot \left(d'^2 - c'^2\right)$$

erkennen wir ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen a, b und c ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist d ungeradzahlig. ❑

Satz. In einem teilerfremden P-4-Tupel (a, b, c, d) ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

[5] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

Beweis: Ist a, b oder c durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, keine der drei Zahlen a, b und c sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl a^2, b^2 und c^2 den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist d^2 und damit auch d durch 3 teilbar.

Satz. Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.
Beweis: Seien $a = 4a' \pm 1$ und $d = 4d' \pm 1$ die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$b^2 + c^2 = d^2 - a^2 = 16d'^2 \pm 8d' + 1 - \left(16a'^2 \pm 8a' + 1\right)$$
$$= 8 \cdot \left(2\left(d'^2 - a'^2\right) \pm d' \mp a'\right)$$

die Summe der beiden geradzahligen Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar. ❑

Wir suchen nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich. Aufgrund der Umformung $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$ können wir uns auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 - 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)
(b) $m = 2 \cdot a^2$
(c) $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
(d) $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ (mit natürlichen Zahlen n, r, a, b)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$
$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$
$$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$$ ❑

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Beweisskizze: Leicht sehen wir den Fall (a), denn ist $2k + 1$ eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$. Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 P-4-Tupel. Ordnen wir diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl d, so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte wir das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ führen müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird m in zwei Faktoren $d + c = t_1,\;\; d - c = t_2,\;\; t_1 \geq t_2,$ zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit (m; 1) und $\left(\sqrt{m}; \sqrt{m}\right)$ gegeben. Die Zahl d erhalten wir daraus als $d = \frac{t_1+t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [6]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, HENRI NANNEN, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk

[6] www.jugend-forscht.de

des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.

Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[7] Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu 3 Schülern können Mädchen und Jungen bis 16 Jahre („Schüler experimentieren“) bzw. Jugendliche zwischen 16 und 22 Jahre („Jugend forscht“) teilnehmen. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres kann eine etwa 15-seitige Darstellung der Forschungsergebnisse vorgelegt werden. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb (falls das Pandemie-Geschehen eine Präsenzveranstaltung wieder zulässt) öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmern Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Poster und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2017/18	12.069	*Merck KGaA Darmstadt*
2018/19	12.150	*Fraunhofer-Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik Chemnitz*
2019/20	11.768	*ÖVB-Arena Bremen (ausgefallen)*
2020/21	8.998	*Experimenta gGmbH Heilbronn (Online-Veranstaltung)*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **Fachgebiet Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch wieder im Jahr 2021 bundesweit mit 730 Teilnehmern (8.1%) beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft und deutlich weniger als im FG Physik (1185) oder FG Technik (1712). In Sachsen waren es immerhin 18.2% aller Teilnehmer der 1. Runde (Regionalausscheide), die sich mit Projekten in Mathematik/Informatik beschäftigen.

[7] Schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.

Sowohl der sächsische Landeswettbewerb[8] als auch das Bundefinale wurden aufgrund der Corona-Pandemie 2021 als Online-Veranstaltungen durchgeführt.
Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und gegebenenfalls der Partnersuche gegeben – aber jeder Mathematik- oder Informatik-Lehrer ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik (alphabetisch geordnet, 2020 ausgefallen):

Barylla, Philipp & Herrmann, Philipp (Rossbach-Schule, BSZ Leipzig) **Jugend forscht to go** *2. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus, Sonderpreis futureSAX*	2016
Borodi, Vlad Samuel & Seibt, Annegret (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Analyse von Kartenmischtechniken** *2. Platz*	2018
Jandura, Sven (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse der Restfehlerwahrscheinlichkeiten zweier Decodierer von linearen Blockcodes** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis futureSAX*	2016
Juppe, Pascal (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Identifikation organischer Verbindungen mittels Infrarot-spektroskopie und neuronalen Netzen** *3. Platz, Sonderpreis Jahresabonnement „Spektrum der Wissenschaft“*	2018
Kandratavicius, Mantas (Goethe-Gymn. Chemnitz) **Lösungsansätze der Beal-Vermutung** *3. Platz, Sonderpreis Forschungspraktikum Leibnitz-Institut*	2018
Ketelsen, Margarete (Nexö-Gymn. Dresden) **Drei- und Vierdimensionale Fraktale** *2. Platz*	2017
König, Josie (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Das lineare Regressionsmodell in Theorie und Praxis** *3. Platz, Sonderpreis Studienseminar „Kerchensteiner Kolleg“*	2016
Krabbes, Felix (Ostwald-Gymn. Leipzig) **Praxisorientierter Steuerungsalgorithmus für ein autonomes RC-Segelboot** *Landessieger für interdisziplinäre Arbeit, Teilnahme am Bundesfinale*	2017

[8] www.jugend-forscht-sachsen.de

Kraft, Maximilian **Neuronale Netzwerke in der autonomen Robotik** *2. Platz, Sonderpreis Mobilität, Sonderpreis Elektrostatik, Elektrotechnik und Mikroelektronik*	2021
Loos, Felix (Freies Gymn. Borsdorf) **Entwicklung einer künstlichen Intelligenz für Industrieroboter** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2018
Meyer, Julian (Sächs. Landesgymn. St. Afra Meißen) **Simulationen von Strukturen aus Holz** *Sonderpreis Qualitätssicherung*	2018
Mogdans, Sarah (Freies Gymn. Penig) **Wurzelziehen – keine schmerzhafte Angelegenheit** *3. Platz*	2016
Petrich, Moritz **Zirkusnummer mit Quadraten** *2. Platz*	2021
Ristic, Nikola **Analyse und Visualisierung von Molekülstrukturen** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2021
Schmidt, Conrad (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Erstellung einer Android App als smartes Hausaufgabenheft** *3. Platz, Sonderpreis des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus*	2017
Skaliks, Eric (Sächsisches Landesgymn.St. Afra Meißen) **Neural AMT** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale*	2017
Weiß, Konrad **Neuronale Netze und Algorithmen bei „Snake“** *3. Platz, Sonderpreis PM Magazin, futureSAX Sonderpreis*	2021

Den 56. Bundeswettbewerb richtete die Stiftung Jugend forscht e. V. gemeinsam mit der experimenta gGmbH in Heilbronn vom 26. bis 30. Mai 2021 als Online-Veranstaltung aus. Insgesamt 169 Finalisten hatten sich mit ihren 113 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 24 Teilnehmende mit 18 Projekten im Fachgebiet Mathematik/Informatik. Den 1. Preis errang hier **Jonathan Hähne**, Technische Universität München, Garching bei München (Bayern) mit seiner Arbeit **„Echtzeit-Raytracing auf Adaptively-Sampled Distance Fields“**. Der Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre zu lesen:

> *Spiele und Kinofilme verblüffen heute mit erstaunlich realistischen Computer-animationen. Für die tollen Bilder sorgt unter anderem ein Verfahren namens Raytracing: Die Software errechnet den Verlauf eines jeden Lichtstrahls und erlaubt eine realitätsnahe Darstellung etwa von Reflexen. Allerdings ist die*

Methode aufwendig und erst seit Kurzem in Echtzeit anwendbar – vorteilhaft insbesondere für Spiele. Jonathan Hähne entwarf den Prototyp einer neuartigen echtzeitfähigen Raytracing-Software. Diese hat unter anderem das Potenzial, Rundungen besser abzubilden als die üblichen Algorithmen. Als Herausforderung erwies sich der Speicherbedarf: Der Jungforscher musste sich ein paar ausgefeilte Tricks einfallen lassen, um ein Überlaufen des Speichers beim Rechenvorgang zu verhindern.

Die Jury hat die Stringenz beeindruckt, mit der Jonathan Hähne die Aufgabenstellung anging. Obwohl aktuell sehr viel auf diesen Gebieten gearbeitet wird, ist die angewandte Methode geeignet, 3-D-Rendering in Echtzeit breiter und auf schwächerer Hardware verfügbar zu machen. Von der Anwendung mathematischer Methoden bis zur effizienten Programmierung hat er alle Probleme hervorragend gelöst.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Summenformel für die ersten natürlichen Zahlen war bereits in der vorgriechischen Mathematik bekannt. Dennoch wird sie als GAUßsche Summenformel bezeichnet und darf auch so in Wettbewerbsaufgaben zitiert werden. Die Namensgebung resultiert aus der Überlieferung, dass der neujährige CARL FRIEDRICH GAUß[9] die Beschäftigungsaufgabe im Unterricht, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, durch aufmerksames Beobachten und kreativer Vorüberlegung löste. Er entdeckte die Summenformel, mit der er das sture Rechnen umgehen konnte.

Wir können diese Geschichte als Ansporn für die Teilnahme am Wettbewerb „Jugend forscht“ nehmen: Man kann durch eigene Forschung auch mit Themen Aufmerksamkeit erwecken, die schon bekannt und in der Literatur nachzulesen sind. Die Summenformel wird beispielsweise im 2. Rechenbuch von ADAM RIES[10]

Rechenung auff der Linihen // vnd Federn in zal / maß vnd gewicht auff // allerley handierung / gemacht vnnd zu // samen gelesen durch Adam Riesen zu Erffurdt im // 1522 Jar.

im Kapitel **„Progressio“** beschrieben (die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten):

„Lehret in ein Summa bringen Zahlen / die nach einander folgen in natürlicher ordnung oder gleichen mitteln. Thu ihm also: Addir die erste zahl der letsten / was daraus wirdt / mach halb / so du magst / vnd multiplicir durch die zahl der stätt / so hastu wie viel die angegeben zahlen in einer Sum machen/. Magstu nicht / so medir die zahl der stätt / vnd multiplicir damit / als folgende zwey Exemple außweisen.

[9] geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 in Göttingen
[10] geb. 1496 in Staffelstein, gest. 1559 in Annaberg

Item / 7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25. wie viel machen sie in einer Sum? Thu ihm also: Addir 7 zu 25, kommen 32. die medir / werden 16. vnd multiplicir durch die zahl der stätt / als 19. kommen 504. so viel machen gefaßte zahlen.

Item / 3.6.9.12.15.18.21.24.27.30.33.36.39.42.45.48. wie viel? Machs also: Addir 3. Vnd 48. Warden 51, seyn ungerade. / Derhalben zehle die stätt / seind 16. Die medir / kommen 8. vnd multiplicir mit 51. werden 408. Die ganze Summa.

So aber ein zahl die andere vbertritt, zweyfältig / dreyfältig / vierfältig / etc. vnd wolltest die Summa wissen / so multiplicir die letste mit der vbertrettung / nimb von solchem die erst / was da bleibt /theil ab mit der vbertrettung / weniger 1 als hie in folgenden Exempeln."

(*Hinweis:* Gemeint sind geometrische Folgen, bei denen sich aufeinanderfolgende Glieder um einen konstanten Faktor (die „vbertrettung") unterscheiden. An zwei Beispielen wird die Summation vorgerechnet, und zwar für 2, 4, 8, …, 2048 und 3, 9, 27, … 6561. Dabei gibt ADAM RIES weder Herleitung noch Beweis an Sein Ausspruch „Machs also: …" beschreibt lediglich den Algorithmus. Mit einem Ausblick beendet er dieses Kapitel.)

„Die Wurzel / den Quadranten / vnnd Cubic aufzuziehen / will ich hie beruhen lassen / sondern zu seiner zeit / so ich das Visiern / und etliche Regeln der Coß erzehle / genugsam erklären."

(*Hinweis:* Mit „zu seiner zeit" kündigt Adam Ries sein drittes Rechenbuch an, die so genannte „Practica". Das Buch konnte er aber erst 1550 in Druck bringen. Dagegen wurde seine „Coß" nicht publiziert, obwohl die erhalten gebliebene Handschrift bereits auf 1524 datiert wird. Anlässlich seines 500. Geburtstages im Jahre 1992 gab der Teubner-Verlag Leipzig einen vollständigen Faksimiledruck heraus.)

Inhaltsverzeichnis Heft Oktober 2021

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben-bezug**
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. und Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.