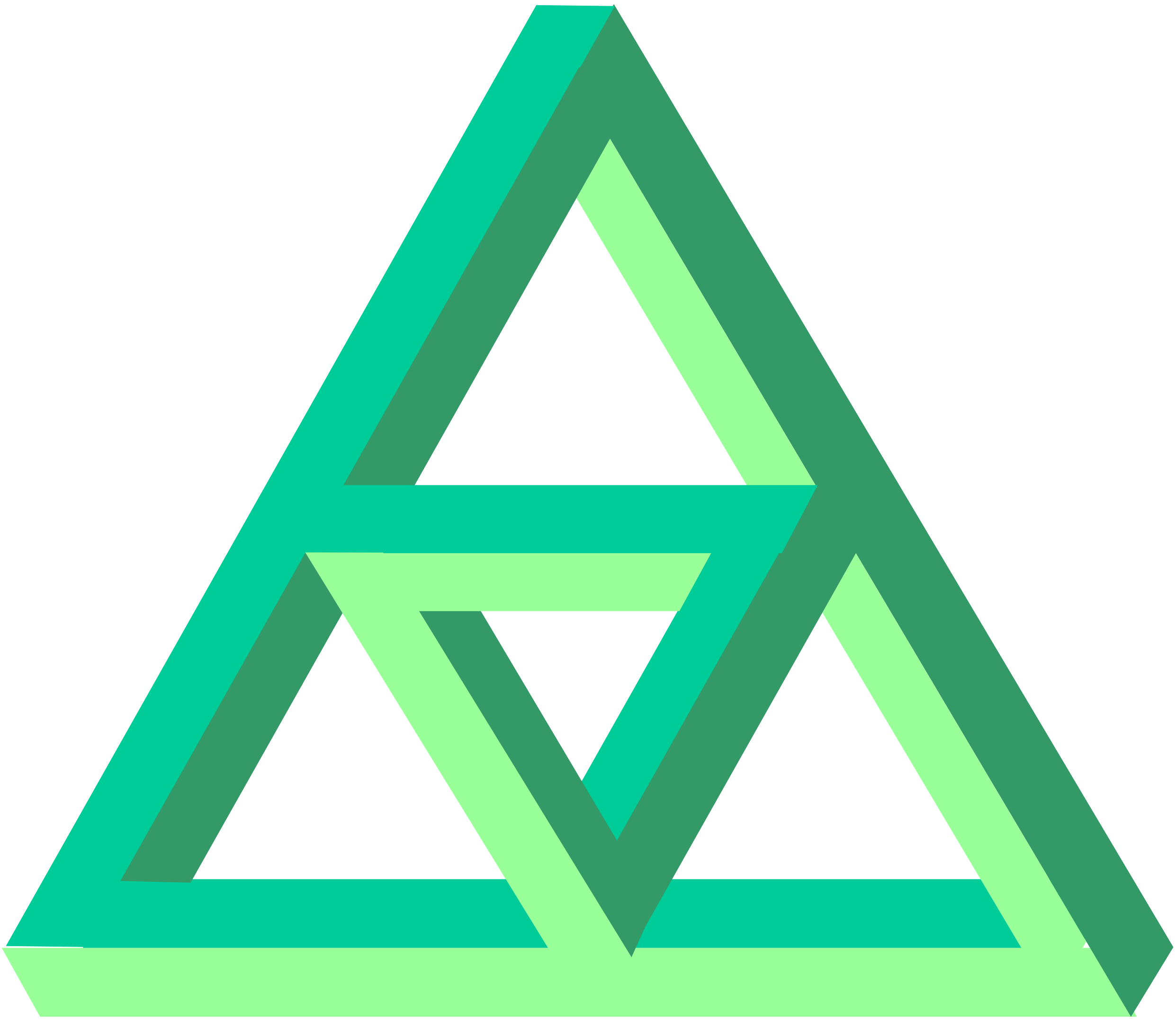
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft September 2021 20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben thematische Schwerpunkte ausgewählt (in diesem Heft das Thema 8 in Bezug auf die 4. Runde der 60. MO). Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Die Seitenumbrüche sind hier so gewählt, dass sich diese Seiten auch separat ausdrucken lassen.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10 haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Mit einem statistischen Blick wird die Entwicklung der Wettbewerbe beleuchtet. Auszüge aus alten Büchern über Mathematik sollen unterhaltsam zeigen, dass für manche heutige Wettbewerbsaufgabe die inhaltlichen Wurzeln in der Mathematikgeschichte zu finden sind.

Fakultät – der Umgang mit großen Zahlen [1]

Die Anzahl der Ziffern von *n!* wächst mit zunehmenden *n* schnell an. Während 6! noch eine dreistellige Zahl ist, besitzt 10! bereits 7 Ziffern und 20! gar 19 Stellen. Dies war Inhalt der

Aufgabe MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an.

Zwei Jahre vorher wurden bereits ähnliche Problemstellungen mit gleichartigem Fragetext in der 4. Stufe gestellt:

[1] vgl. Gardner, M. Mathematische Hexereien. Verlag Ullstein GmbH Berlin 1990. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-5B, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Aufgabe MO330944. 22! = 11240007277**607680000
Aufgabe MO331044. 23! = 2585201673*8849*6640000

Lösungshinweise: In diesen beiden Aufgaben ist es ein nahe liegender Lösungsansatz, die fehlenden Ziffern anhand von Teilbarkeitsregeln zu ermitteln. Die Division durch 9 und durch 11 liefert hierfür ausreichende Argumente. In der Aufgabe der 35. MO war zudem zunächst die Anzahl der Endnullen zu ermitteln. Dann verbleiben wiederum nur zwei Ziffern, die es zu finden gilt.

Will man abschätzen, wie viele Stellen 1000! besitzt, so könnte man zunächst so vorgehen: In 1000! trägt jeder Faktor, der kleiner als 1000 ist, höchstens 3 Stellen zu 1000! bei. Folglich ist die Abschätzung $1000! < 10^{3000}$ sicherlich richtig.

Eine Verbesserung der Abschätzung ist wie folgt möglich: Aus der bekannten Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels von n Zahlen und der Summenformel der ersten n natürlichen Zahlen weiß man, dass auch folgende Abschätzung gilt:

$$\sqrt[1000]{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 1000} \leq \frac{1+2+\ldots+1000}{1000} = \frac{500\cdot 1001}{1000} = 500{,}5\ .$$

Also ist

$$1000! < 501^{1000} < \left(2^9\right)^{1000} < \left(2^{13}\right)^{693} < 10000^{693} = 10^{2772}.$$

Dabei beinhalten die mittleren Abschätzungen lediglich Umformungen, die eine Berechnung ohne Taschenrechner erleichtern, denn die Zweierpotenzen $501 < 512 = 2^9$ und $2^{13} = 8\cdot 2^{10} = 8\cdot 1024 < 10000$ sind bekannt (bzw. leicht ermittelbar). Mit TR geht es auch so:

$$1000! < 501^{1000} < \left(10^{2,7}\right)^{1000} = 10^{2700}\ .$$

Die Güte der Abschätzung lässt sich nur schwer bewerten. Hilfreich ist da die STIRLINGSCHE Formel[2], die die Fakultät mit den beiden mathematischen Konstanten e und π in Verbindung bringt: Es gilt

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n}\ .$$

Diese Abschätzung liefert praktikable Aussagen zur Stellenzahl:

$$lg(n!) \sim n\cdot lg\left(\frac{n}{e}\right) + 0{,}5\cdot lg(2\pi\cdot n).$$

[2] JAMES STIRLING, schottischer Mathematiker (1692 bis 1770)

Für $n = 20$ findet man auf diese Weise $\lg(n!) \approx 18{,}38$. Der daraus resultierende Wert $n! \approx 2{,}39 \cdot 10^{18}$ stimmt recht gut mit dem wirklichen Wert überein. Verlässt man sich (hier ohne weiteren Beweis) darauf, dass die Güte dieser Abschätzung auch bei großen n gilt, erhält man für $n = 1000$:

$$lg(1000!) \sim 2566{,}61$$

so dass 1000! insgesamt 2567 Ziffern umfassen könnte. Es kann bewiesen werden, dass der relative Fehler der STIRLINGSCHEN Formel mit wachsendem n kleiner wird, so dass die Formel eine verlässliche Abschätzung liefert. Für Werte über $n = 20$ beträgt der Fehler weniger als 0,5%.

Wenn man auch im Alltag kaum etwas mit solchen Zahlenriesen anfangen kann, dem Mathematiker fällt immer etwas ein. So suchte man alle Fakultäten, die man als Pyramide schreiben kann, also in einer solchen Zifferanordnung, dass in jeder folgenden Zeile zwei Ziffern mehr stehen. Wird die Pyramide mit n vollständigen Zeilen geschrieben, werden insgesamt $1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)$ Ziffern benötigt.

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen führt auf die Quadratzahl n^2. Jede Fakultätszahl, für die die Anzahl ihrer Ziffern der Dezimaldarstellung eine Quadratzahl ist, kann folglich in einer solchen Pyramiden- oder Dreiecksform aufgeschrieben werden. So lässt sich 7! = 5040 in der beschriebenen Weise darstellen:

5
040

Die nächste Fakultätszahl mit dieser Eigenschaft ist 12! = 479001600:

4
790
01600

Aber nicht für jede Quadratzahl existiert eine Fakultät mit entsprechender Ziffernzahl. So gibt es keine Fakultätszahl mit 25 Ziffern, wie man leicht aus den obigen Angaben zu 23! nachprüfen kann. Die Zahl 105! wird mit 169 Ziffern geschrieben, die unterste Zeile der Pyramide besteht genau aus den 25 Endnullen der Zahl. Dass man nun in ähnlicher Weise auch Darstellungsformen als Sechseck (z.B. 477! mit 1073 Ziffern) oder Achteck (z.B. 2206! mit 6421 Ziffern) fand, verwundert wohl nicht.

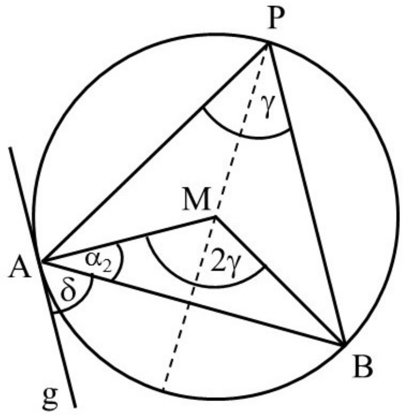
Thema 08 – Sehnen-Tangenten-Winkelsatz

Bei vielen geometrischen Aufgaben am Kreis oder mit einem Kreis als Hilfsfigur spielen Winkel eine wichtige Rolle. Besonders häufig anwendbar sind folgende Sätze:

- **Peripheriewinkelsatz.** Alle Peripheriewinkel über einem Kreisbogen (über einer Sehne) sind gleich groß.
- **Zentri-Peripherie-Winkelsatz.** Jeder Zentriwinkel (in der gleichen Halbebene) über einem Kreisbogen ist doppelt so groß wie der dazugehörige Peripheriewinkel.
- **Satz über die Winkel im Sehnenviereck.** Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck (d.h. die Eckpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises), wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Seltener findet dagegen folgender Satz Anwendung:

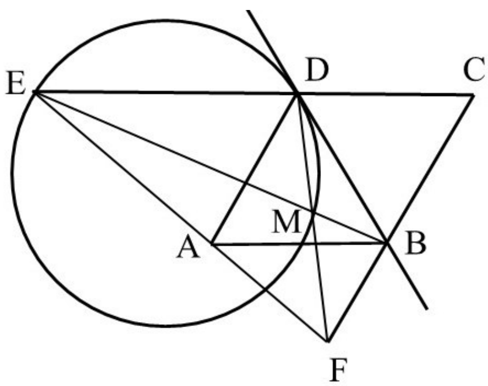
Aufgabe 8.01 – Sehnen-Tangenten-Winkelsatz. Der Sehnen-Tangenten-Winkel eines Kreisbogens ist so groß wie der zugehörigen Peripheriewinkel und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.



Lösungshinweise: Wir setzen als bekannt voraus, dass der Peripheriewinkel $\sphericalangle APB = \gamma$ halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel $\sphericalangle AMB = 2 \cdot \gamma$. Dann gilt für den Innenwinkel $\sphericalangle BAM = \alpha_2$ im gleichschenkligen Dreieck ABM die Beziehung $\alpha_2 = 90° - \gamma$. Da aber die Tangente im Punkt A rechtwinklig auf $\overline{AM}$ steht, gilt ebenso $\delta = 90° - \alpha_2$. Daraus folgt die Behauptung $\delta = \gamma$. ❑

In der Bundesrunde der 60. MO basierte ein Lösungsvorschlag auf diesem Satz. Man beachte, dass in geometrischen Aufgabenstellungen oft keine Abbildung gezeigt wird – die Umsetzung des Aufgabentextes in eine (möglichst exakt gezeichnete) Skizze ist somit der erste Schritt für die Lösungsfindung.

Aufgabe 8.02 – MO601045[3]. Gegeben sei eine Raute[4] $ABCD$ mit $|\sphericalangle DCB| = 60°$. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus sei ein Punkt E beliebig gewählt. Die Gerade durch E und A schneide die Gerade BC im Punkt F. M sei der Schnittpunkt der Geraden BE und DF.



Zeigen Sie, dass die Gerade BD den Umkreis des Dreiecks MDE berührt.

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

[4] Hinweis: Statt Raute sagt man häufig auch Rhombus.

Lösungshinweise: Es ist zu zeigen, dass die Gerade durch B und D eine Tangente am Umkreis des Dreiecks MDE ist. Wir erkennen aus der Skizze, dass $\overline{EB}$ eine Sekante des Umkreises ist. Wenn wir nun zeigen können, dass die Größengleichheit der Winkel $\sphericalangle MDB$ und $\sphericalangle MED$ erfüllt ist, so folgt aus der Umkehrung des **Sehnen-Tangenten-Winkelsatzes** die Behauptung. Dazu suchen wir geeignete ähnliche Dreiecke:

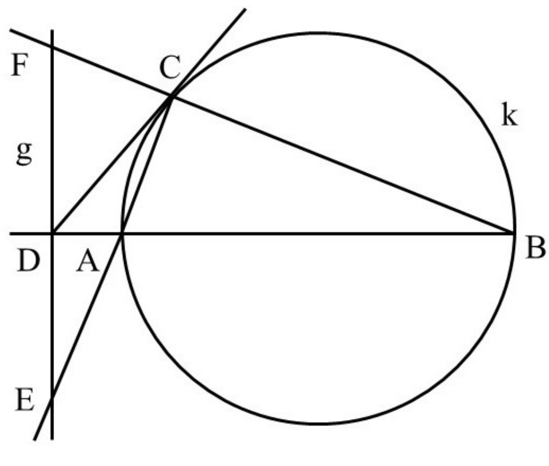
Die Dreiecke EAD und AFB haben drei Paare paralleler Seiten und sind folglich ähnlich zueinander. Insbesondere gilt $|\overline{DE}| : |\overline{DA}| = |\overline{BA}| : |\overline{BF}|$. Wegen der Gleichheit der Seitenlängen im Rhombus $|\overline{AD}| = |\overline{DB}| = |\overline{AB}|$ folgt daraus $|\overline{DE}| : |\overline{DB}| = |\overline{DB}| : |\overline{BF}|$.

Wegen $|\sphericalangle EDB| = |\sphericalangle DBF| = 120°$ sind auch die Dreiecke EBD und DFB ähnlich zueinander, und zwar mit $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle BED|$. Da die Punkte B und E auf verschiedenen Seiten der Geraden MD liegen, folgt die Behauptung aus der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Winkelsatzes zur Sehne MD im Umkreis des Dreiecks MDE. ❑

Aufgabe 8.03 – MO570945. Gegeben ist ein nicht gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C und Umkreis k. Ferner sei D der Schnittpunkt der Geraden AB mit der Tangente durch C an k, g die Senkrechte zu AB in D sowie E der Schnittpunkt von g mit AC und F der Schnittpunkt von g mit BC.

Beweisen Sie: D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$.

Lösungshinweise: Die Punkte D, E und F liegen außerhalb des Kreises k, da D auf einer Tangente an k durch C liegt und E und F auf der Senkrechten zu AB durch D liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir davon ausgehen, dass A zwischen B und D liegt, denn den anderen Fall können wir durch Spiegelung an g und Vertauschung der Bezeichnungen A und B sowie E und F auf diesen zurückführen. Dann liegen auch C zwischen F und B sowie A zwischen E und C.



Wie üblich bezeichnen wir mit $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ und $\beta = |\sphericalangle CBA|$ die Innenwinkelgrößen im Dreieck ABC. Nach Voraussetzung gilt $\alpha + \beta = 90°$. Aus den Lagebeziehungen folgt

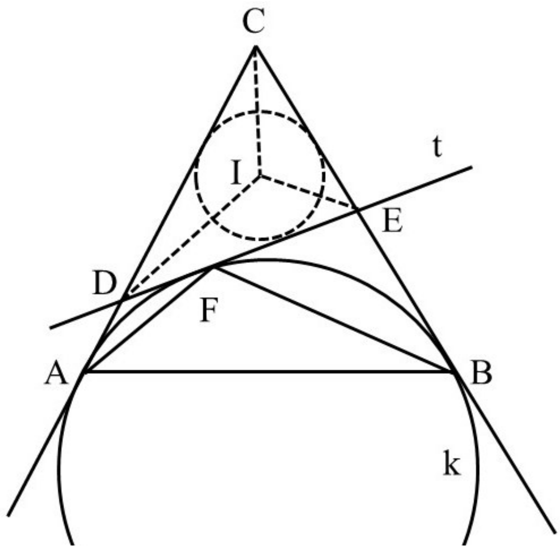
$$|\sphericalangle FBD| = |\sphericalangle CBA| = \beta \text{ und } |\sphericalangle DFB| = |\sphericalangle DFC| = 90° - \beta = \alpha.$$

Nach dem **Sehnen-Tangenten-Winkelsatz** gilt außerdem $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle FCD| = \alpha$, wobei $\sphericalangle FCD$ der Scheitelwinkel des Sehnen-Tangenten-Winkels zur Sehne $\overline{BC}$ ist. Es folgt $|DC| = |DF|$.

Analog zeigt man nacheinander $|\sphericalangle DAE| = \alpha,$ $|\sphericalangle AED| = 90° - \beta = \alpha$ sowie $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle DCE| = \beta$, woraus $|DC| = |DE|$ folgt und sich zusammen $|DE| = |DF|$ wie behauptet ergibt. ❑

Aufgabe 8.04 – MO581046. Gegeben sind ein Kreis *k*, ein Punkt *C* außerhalb des Kreises, die Tangenten *CA* und *CB* an den Kreis *k* mit *A*, *B* auf *k* sowie eine weitere Tangente *t* an den Kreis *k* durch einen Punkt *F* auf *k*, wobei *F* ein innerer Punkt des Dreiecks *ABC* ist. Die Punkte *D* und *E* sind die Schnittpunkte von *t* mit den Geraden *CA* und *CB*.

Zeigen Sie, dass für die Flächeninhalte A_{ABF} und A_{CDE} der Dreiecke *ABF* und *CDE* stets $A_{ABF} < 2 \cdot A_{CDE}$ gilt.



Lösungshinweise: Es sei *I* der Inkreismittelpunkt des Dreiecks *CDE*. Nach dem **Sekanten-Tangenten-Winkelsatz** gilt

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle EBF|$$

und damit im Dreieck *FBE* für den Außenwinkel

$$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle EBF| + |\sphericalangle BFE| = 2 \cdot |\sphericalangle BAF|.$$

Somit folgt

$$|\sphericalangle IED| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle BAF|.$$

Analog erkennt man, dass $|\sphericalangle EDI| = |\sphericalangle FBA|$ gilt. Die Dreiecke *ABF* und *DEI* sind also ähnlich. Insbesondere folgt

$$\frac{A_{ABF}}{A_{DEI}} = \frac{|AB|^2}{|DE|^2} \qquad (1)$$

Nun sei *r* der Inkreisradius des Dreiecks *CDE*. Dann gilt:

$$A_{CDE} = A_{DEI} + A_{ECI} + A_{CDI} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot |DE| + \frac{1}{2} \cdot r \cdot |EC| + \frac{1}{2} \cdot r \cdot |CD|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|DE| + |EC| + |CD|).$$

Hieraus folgt

$$\frac{A_{DEI}}{A_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r \cdot |DE|}{\frac{1}{2} \cdot r \cdot (|DE| + |EC| + |CD|)} = \frac{|DE|}{(|DE| + |EC| + |CD|)} \qquad (2)$$

Da die beiden Tangentenabschnitte von einem Punkt an denselben Kreis gleich lang sind, gilt $|AD| = |DF|$ und $|EF| = |EB|$, somit $|DE| = |AD| + |BE|$ und daher

$$|DE| + |EC| + |CD| = |BE| + |EC| + |CD| + |AD| = |AC| + |BC|,$$

weil *F* ein innerer Punkt des Dreiecks *ABC* ist und deshalb *D* und *E* innere Punkte der Strecken $|\overline{AC}|$ bzw. $|\overline{BC}|$ sind.

Setzen wir dies in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir $\frac{A_{DEI}}{A_{CDE}} = \frac{|DE|}{(|AC|+|BC|)}$. Nach Multiplikation mit (1) gelangen wir zu:

$$\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} = \frac{|DE|^2}{|DE|\cdot(|AC|+|BC|)}$$

Nun gilt nach der Dreiecksungleichung $|AC| + |BC| > |AB|$ und wegen (3) und der Dreiecksungleichung $2 \cdot |DE| = |AD| + |DE| + |EB| > |AB|$.

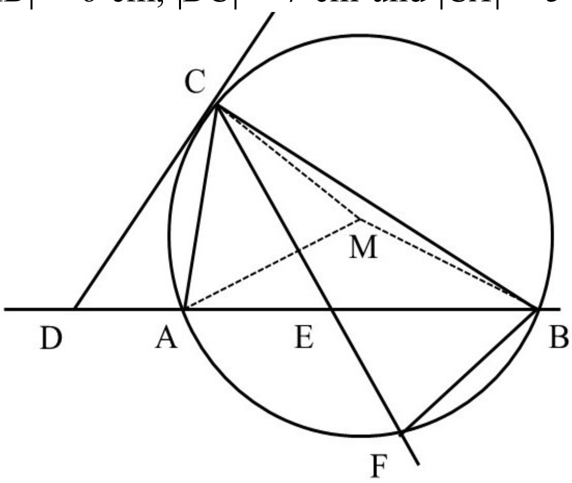
Damit können wir die Verhältnisgleichung der Flächeninhalte fortsetzen zu

$$\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} = \frac{2\cdot|AB|^2}{2\cdot|DE|\cdot(|AC|+|BC|)} < \frac{2\cdot|AB|^2}{|AB|\cdot|AB|} = 2\,.$$ ❑

Anmerkung: Untersucht man die verwendeten Dreiecksungleichungen eingehender, so lässt sich leicht zeigen, dass in der Ungleichung $\frac{A_{ABF}}{A_{CDE}} < 2$ die rechte Seite nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Aufgabe 8.05 – MO540932/MO541032. Eine im Punkt *C* an den Umkreis *ABC* gelegte Tangente schneide die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über *A* hinaus in einem Punkt *D*. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide die Strecke $\overline{AB}$ in *E* und den Bogen $\widehat{AB}$ in *F*.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur aus $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 7$ cm und $|CA| = 5$ cm.
b) Beweisen Sie, dass $|AC| = |FB|$ gilt.
c) Beweisen Sie, dass $|DC| = |DE|$ gilt.

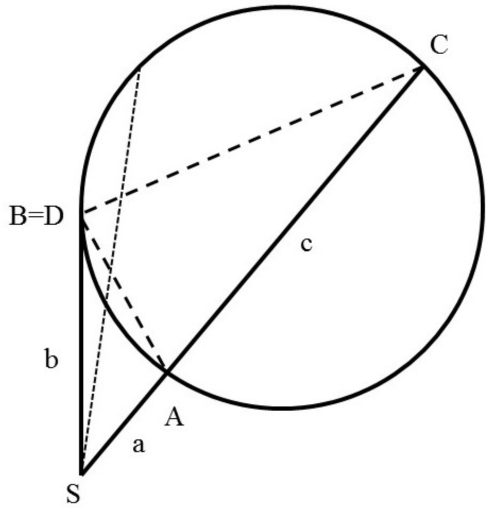


Lösungshinweise zu c): Bezeichnen wir mit γ den Winkel $\sphericalangle ACB$, so gilt $\sphericalangle ACE = \frac{1}{2}\cdot\gamma$ laut Definition des Punktes E. Mit dem **Sehnen-Tangenten-Winkel** $\sphericalangle DCA = \delta$ finden wir $\sphericalangle DCE = \delta + \frac{1}{2}\cdot\gamma$. Der Winkel $\sphericalangle CED$ ist ein Außenwinkel am Dreieck *EBC*, also gilt nach dem Außenwinkelsatz $\sphericalangle CED = \beta + \frac{1}{2}\cdot\gamma$. *MC* steht senkrecht auf der Tangente, also gilt für den Basiswinkel ε im gleichschenkligen Dreieck *AMC* die Beziehung $\delta + \varepsilon = 90°$. Andererseits gilt $|\sphericalangle CMA| = 2\cdot\beta$ als Zentriwinkel zu β, also insgesamt

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot(180° - 2\cdot\beta) = 90° - \beta$$

Also folgt $\delta = \beta$. Deshalb ist das Dreieck *DEC* gleichschenklig mit der Basis $\overline{EC}$ und es gilt die Behauptung $|DC| = |DE|$. ❑

Thema 08 – Sekanten-Tangenten-Satz



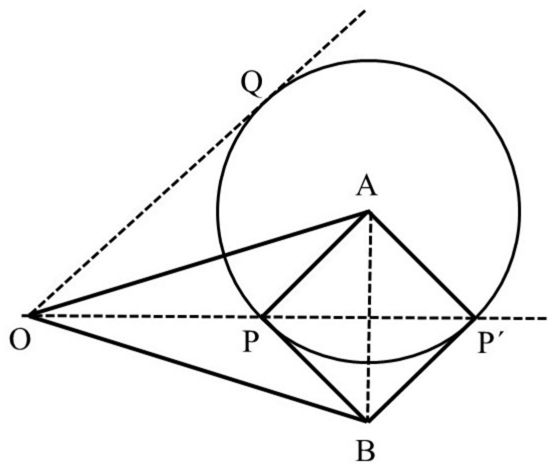
Sekanten-Tangenten-Satz[5] (auch Sehnen-Tangenten-Satz genannt). Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekanten-Abschnitten.

Mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Skizze lautet der Satz: Es gilt $|\overline{SB}|^2 = |\overline{SA}| \cdot |\overline{SC}|$.

Dieser Satz fand bereits in der 3. MO (Schuljahr 1963/64) seine Anwendung:

Aufgabe 8.06 – MO031043[6]**.** Der „Inversor[7]" von PEAUCELLIER[8] besteht aus zwei gelenkig verbundenen Stäben OA und OB derselben Länge, die in A und mit einem „Gelenkrombus" $APBP'$ verbunden sind. Es sei $|OA| > |PA|$.

Man zeige, dass das Produkt der Entfernungen $|OP|$ und $|OP'|$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.



Lösungshinweise: Wir betrachten den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass OA festliegt.

Die Punkte O, P und P' liegen auf derselben Geraden, welche Sekante des Kreises mit dem Radius $|PA|$ um A. Die Behauptung folgt dann aus dem **Sekanten-Tagenten-Satz**:

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2,$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist. ❑

Aufgabe 8.07 – MO320933. Gegeben sind eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.

[5] Siehe: „Mathematische Kostproben", Heft Juli/August 2021. Bekannte Sätze der Mathematik: Sehnen-, Sekanten- und Sekanten-Tangenten-Satz

[6] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert. www.mathematik-olympiaden.de

[7] Der Inversor von PEAUCELLIER ist ein Koppelgetriebe zur Überführung einer Kreisbewegung in eine Geradenbewegung und umgekehrt.

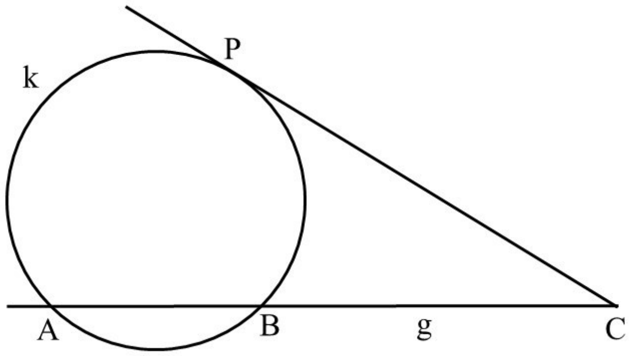
[8] CHARLES-NICOLAS PEAUCELLIER (geb. 16. Juni 1832 in Saarlouis; gest. 4. Oktober 1919 in Paris)

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises *k*, der durch *A* und *B* geht und eine durch *C* gehende Tangente besitzt, die auf *g* senkrecht steht.
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis *c* um *C* gibt, auf dem alle Berührungs-punkte der Tangente liegen, die von *C* an alle diejenigen Kreise *k* gelegt werden, die durch *A* und *B* gehen.

Lösungshinweise zu a): Es seien *M* der Mittelpunkt des geforderten Kreises *k*, *P* der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente vom Punkt *C* und *D* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann ist laut Konstruktion dieser Punkte *DCPM* ein Rechteck mit der Seitenlänge (die gleich dem Radius *r* ist)

$$r = |MP| = |DC| = \frac{1}{2} \cdot |AB| + |BC| = \frac{1}{2} \cdot a + b\ .$$

zu b): Ist *P* der Berührungspunkt einer Tangente, die von *C* an einen durch *A* und *B* gehenden Kreis gelegt wird, so gilt nach dem **Sekanten-Tangenten-Satz** die Gleichung $|\overline{CP}|^2 = |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|$. Deshalb liegt *P* auf dem Kreis c um *C* mit dem Radius



$$R = \sqrt{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \sqrt{(a+b) \cdot b}.$$

Damit ist dieser Radius unabhängig von der Lage des Mittelpunktes des durch *A* und *B* gehenden Kreises und der Beweis ist erbracht. ❑

Hinweis: In den Lösungshinweisen zur MO wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Sekanten-Tangenten-Satz als bekannter Sachverhalt zitiert werden darf, dass aber auch über die nachzuweisende Ähnlichkeit der Dreiecke *CPB* und *CAP* die Gleichung selbst hergeleitet werden kann. Die Anwendung des Sekanten-Tangenten-Satzes verkürzt folglich die Lösungsdarstellung erheblich.

Aufgabe 8.08 – MO401024. *AB* sei der Durchmesser eines Kreises *k* und *t* die Tangente in *B* an *k*. Ferner sei *P* ein beliebiger von *B* verschiedener Punkt der Tangente *t*. Die Gerade *AP* schneide den Kreis in einem weiteren Punkt *C*.

Beweisen Sie, dass dann gilt: $|\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}| = |\overline{AB}|^2$.

Lösungshinweise: Nach **Sekanten-Tangenten-Satz** gilt $|\overline{PA}| \cdot |\overline{PC}| = |\overline{BP}|^2$. Formen wir die diese Gleichung um, erhalten wir

$$|\overline{BP}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{PC}| = |\overline{PA}| \cdot (|\overline{PA}| - |\overline{AC}|) = |\overline{PA}|^2 - |\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}|$$

also $|\overline{PA}|^2 - |\overline{BP}|^2 = |\overline{PA}| \cdot |\overline{AC}|$.

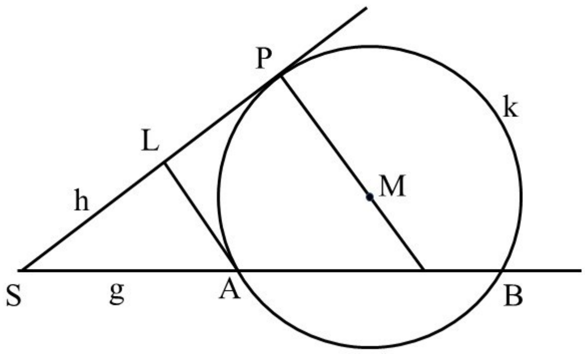
Da das Dreieck *ABP* rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt *B* ist, erhalten wir nach Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS auf der linken Seite der letzten Gleichung unmittelbar die Behauptung. ❑

Hinweis: Auch in dieser Aufgabe kann die Aussage des **Sekanten-Tangenten-Satzes** über den Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke *ABP* und *ACB* direkt hergeleitet werden. Es wurde laut Lösungshinweise sogar akzeptiert, nach Feststellung der beiden rechten Winkel bei *B* bzw. *C* den Satz des EUKLIDs anzuwenden (im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt aus der Länge des zugehörigen Hypotenusenabschnitts und der Hypotenusenlänge).

Aufgabe 8.09 – MO501036. Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitelpunkt *S* und den Schenkeln *g* und *h*. Die Punkte *A* und *B* mögen auf dem Schenkel *g* so liegen, dass *A* zwischen *S* und *B* liegt. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu *h* durch *A* sei mit *L* bezeichnet. Ein Punkt *P* liege auf dem Schenkel *h* so, dass *h* eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks *ABP* ist.

Zeigen Sie: Falls die Bedingung $\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|}=\frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}$ erfüllt ist, so ist das Dreieck ABP rechtwinklig in P.

Lösungshinweise: Es sei *k* der Umkreis des Dreiecks *ABP* mit dem Mittelpunkt *M*. Die Tangente *h* an *k* steht senkrecht auf dem Berührungsradius $\overline{PM}$. Dieser Radius schneide *g* in *K*. Das Dreieck *ABP* ist rechtwinklig, wenn der Punkt *K* mit dem Mittelpunkt seines Umkreises zusammenfällt. Wir versuchen also, die gegebene Bedingung so umzuformen, dass wir auf *M* = *K* schließen können.



(*Hinweis:* In der Skizze sollte ausdrücklich vermieden werden, bereits der Lösung vorzugreifen und *M* = *K* anzunehmen. Es besteht die Gefahr, dass sonst Zusammenhänge als offensichtlich angesehen werden, die aber im Allgemeinen nicht erfüllt sein müssen. Das könnte zum Ringschluss „Wenn *M* = *K* dann *M* = *K*“ führen.)

Laut Konstruktion ist das Dreieck *SAL* ist zum Dreieck *SKP* ähnlich (Winkelgleichheit aufgrund zweier paralleler Seiten). Ausgehend von der gegebenen Bedingung erhalten wir

$$\left(\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|}\right)^2=\left(\frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}\right)^2=\left(\frac{|\overline{KP}|}{|\overline{SK}|}\right)^2=\frac{|\overline{KP}|^2}{|\overline{SK}|^2}=\frac{|\overline{SK}|^2-|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2}$$

Dabei haben wir bei der rechten Umformung den Satz des PYTHAGORAS im Dreieck *SKP* mit dem rechten Winkel bei *P* angewandt. Wir formen die Ausdrücke um:

$$\left(\frac{|\overline{SB}|-|\overline{SA}|}{|\overline{SB}|+|\overline{SA}|}\right)^2=1-\frac{4\cdot|\overline{SB}|\cdot|\overline{SA}|}{(|\overline{SB}|+|\overline{SA}|)^2}\,;\,\frac{|\overline{SK}|^2-|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2}=1-\frac{|\overline{SP}|^2}{|\overline{SK}|^2}$$

Nach dem **Sekanten-Tangenten-Satz** gilt $|\overline{SP}|^2=|\overline{SA}|\cdot|\overline{SP}|$. Damit können wir die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen:

$$\frac{4 \cdot |\overline{SB}| \cdot |\overline{SA}|}{(|\overline{SB}| + |\overline{SA}|)^2} = \frac{|\overline{SA}| \cdot |\overline{SB}|}{|\overline{SK}|^2}$$

was gleichbedeutend zu $|\overline{SK}| = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{SA}| + |\overline{SB}|)$ ist.

Der Punkt *K* ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Da das Dreieck *SKP* rechtwinklig in *P* ist, steht die Gerade durch *P* und *K* nicht senkrecht auf der Geraden *g* durch *A* und *B*. Also schneidet sie die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ genau in *K*. Da der Umkreismittelpunkt *M* des Dreiecks *ABP* nach Konstruktion von *K* auf der Geraden durch *P* und *K* und bekanntlich auch auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AB}$ liegt, fällt *K* mit *M* zusammen. Damit ist der Innenwinkel des Dreiecks *ABP* bei *P* ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ und somit ein rechter Winkel. ❑

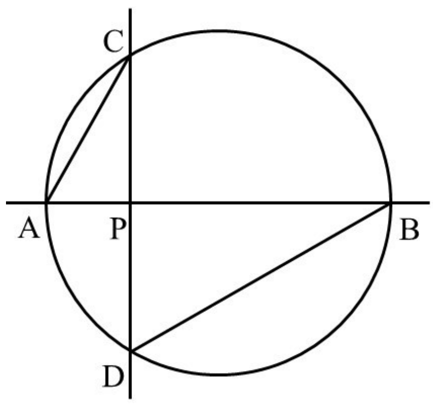
Aufgabe 8.10 – MO391034. Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser $d = |\overline{AB}|$. Eine zu *AB* senkrechte Gerade schneidet *AB* in *P* und den Kreis in *C* und *D*. Die Umfänge der Dreiecke *APC* und *BPD* verhalten sich zueinander wie 2 : 1.

Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen das Verhältnis $|\overline{AP}|:|\overline{PB}|$?

Lösungshinweise: Da die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ Sehnen im Kreis sind, gilt nach dem **Sehnensatz** $|\overline{AP}| \cdot |\overline{PB}| = |\overline{CP}| \cdot |\overline{PD}|$. Laut Konstruktion der Punkte *C* und *D* gilt die Gleichheit $|\overline{CP}| = |\overline{PD}|$. Folglich erhalten wir

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \left(\frac{|\overline{CP}|}{|\overline{PB}|}\right)^2$$

d.h. gesucht ist also das Verhältnis $|\overline{CP}|:|\overline{PB}|$.



Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BDC$ als Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{BC}$ gleich groß. Zudem sind die Winkel $\sphericalangle CPA$ und $\sphericalangle DPB$ rechte Winkel. Also sind die Dreiecke *APC* und *BPD* ähnlich. Das Verhältnis der Umfänge überträgt sich auf die Verhältnisse einander entsprechender Seiten. Insbesondere gilt deshalb auch $|\overline{CP}|:|\overline{BP}| = 1:2$. Somit finden wir $|\overline{AP}|:|\overline{BP}| = 1:4$. ❑

Hinweis: Die Anwendung des Sehnen-Satzes ist nicht erforderlich, hilft aber für die Lösungsfindung mit der Angabe des zu bestimmenden Verhältnisses. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *APC* und *BPD* folgt aufgrund des Umfangsverhältnisses für gleichliegende Seiten $|\overline{AP}|:|\overline{CP}| = |\overline{DP}|:|\overline{BP}| = 1:2$, also $|\overline{AP}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{CP}|$ und $|\overline{DP}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BP}|$. Wegen $|\overline{CP}| = |\overline{DP}|$ folgt daraus unmittelbar $|\overline{AP}| = \frac{1}{4} \cdot |\overline{BP}|$.

Thema 08 – Sekanten-Tangenten-(Winkel-)Satz – Aufgaben

Aufgabe 8.11 – MO601045. Gegeben sei eine Raute $ABCD$ mit $|\sphericalangle DCB| = 60°$. Auf der Verlängerung der Strecke $\overline{CD}$ über D hinaus sei ein Punkt E beliebig gewählt. Die Gerade durch E und A schneide die Gerade BC im Punkt F. M sei der Schnittpunkt der Geraden BE und DF. Wir nehmen an, dass die Gerade BD den Umkreis des Dreiecks MDE berührt (s. Aufgabe 8.02).

Bestimmen Sie die Länge $|\overline{MB}|$ in Abhängigkeit der Seitenlänge der Raute, wenn $|\sphericalangle FEC| = 30°$ gilt.

Aufgabe 8.12 – MO570932. Eine hölzerne Scheibe hat die Form eines geraden Zylinders mit einer Grundfläche vom Radius r und einer Höhe von 5 mm. Von dieser Scheibe wird durch einen ebenen Schnitt senkrecht zur Grundfläche ein Stück abgesägt. Die Schnittfläche beträgt 4 cm². Stellt man das Holzstück auf die Schnittfläche, so ist es 1 cm hoch.

Wie groß ist r?

Aufgabe 8.13 – MO081133. Es sei g die Gerade durch die voneinander verschiedenen gegebenen Punkt P_1, P_2 sowie E eine Ebene durch g. Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle diejenigen in E gelegenen Kreise, die P_1P_2 als Sehne haben, die Tangenten gelegt. Man beweise:

a) Die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen auf ein und demselben Kreis k_Q um Q.
b) Sind Q_1 und Q_2 zwei voneinander verschiedene Punkte auf g, von denen keiner auf P_1P_2 liegt, so sind k_{Q1} und k_{Q2} punktfremd.

Aufgabe 8.14 – MO501036. Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitel-punkt S und den Schenkeln g und h. Die Punkte A und B mögen auf dem Schenkel g so liegen, dass A zwischen S und B liegt. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu h durch A sei mit L bezeichnet. Ein Punkt P liege auf dem Schenkel h so, dass h eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABP ist.

Zeigen Sie: Falls ABP ein in P rechtwinkliges Dreieck ist, so ist folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{|\overline{SB}| - |\overline{SA}|}{|\overline{SB}| + |\overline{SA}|} = \frac{|\overline{AL}|}{|\overline{SA}|}$$

Aufgabe 8.15 – Satz über die Winkel im Sehnenviereck. Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck (d.h. die Eckpunkte liegen auf der Peripherie eines Kreises), wenn sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Beweisen Sie diesen Satz.

62. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 14. bis 24. Juli 2021 in St. Petersburg (Russland) statt. Zum zweiten Mal musste die IMO Corona-bedingt als virtueller Wettbewerb durchgeführt werden – nach der 61. IMO in St. Petersburg sprangen die Organisatoren auch dieses Jahr wieder ein, nachdem der vorgesehene Austragungsort absagen musste.

Mit 64 teilnehmenden Schülerinnen und 555 Schülern aus 107 Ländern lag die Teilnahme nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern).

Insgesamt wurden 303 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,9% aller Teilnehmer einen Preis. Mit zwei Gold-, zwei Silber- und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 129 Punkten von 252 möglichen Punkten (51.2%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den beachtlichen **12. Platz** erreichen (2020: 140 Punkte/26. Platz; 2019: 126 Punkte/32. Platz). Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China (208 Punkte, sechs Goldmedaillen), Russland (183 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille) und der Republik Korea (172 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille). Von den europäischen Ländern liegen nur die Ukraine, Italien und das Vereinigte Königreich vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 62. IMO

Aufgabe 1. Es sei $n \geq 100$ eine ganze Zahl. Wanja schreibt die Zahlen $n, n+1, \ldots, 2n$ auf Karten, jede auf eine eigene Karte. Er mischt diese $n + 1$ Karten und verteilt sie auf zwei Stapel. Man zeige, dass mindestens einer der Stapel zwei Karten enthält, deren Zahlen in Summe eine Quadratzahl ergeben.

Aufgabe 2. Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei D ein innerer Punkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB > AC$, für den $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$ gilt. Für den Punkt E auf der Strecke AC gilt $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, für den Punkt F auf der Strecke AB gilt $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, und für den Punkt X auf der Geraden AC gilt $CX = BX$. Es seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ADC beziehungsweise EXD.

Man beweise, dass die Geraden BC, EF und O_1O_2 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Aufgabe 4. Es sei Γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt I und $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD und DA den Kreis Γ berühren. Es sei Ω der Umkreis des Dreiecks AIC. Die Verlängerung von BA über A hinaus schneidet Ω in X, und die Verlängerung von BC über C hinaus schneidet Ω in Z. Die Verlängerungen von AD und CD über D hinaus schneiden Ω in Y beziehungsweise T. Man beweise

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Aufgabe 5. Die beiden Eichhörnchen Buschi und Hoppi haben 2021 Walnüsse für den Winter gesammelt. Hoppi nummeriert die Walnüsse von 1 bis 2021 und gräbt 2021 kleine Löcher in den Boden entlang eines Kreises um ihren Lieblingsbaum. Am nächsten Morgen bemerkt Hoppi, dass Buschi in jedes Loch eine Walnuss gelegt hat, aber ohne die Nummerierung zu beachten. Verstimmt beschließt Hoppi, die Walnüsse umzuordnen, und führt dazu eine Folge von 2021 Zügen aus. Im k-ten Zug vertauscht Hoppi die Positionen der beiden Walnüsse, die direkt neben Walnuss k liegen. Man beweise, dass es eine ganze Zahl k derart gibt, dass Hoppi im k-ten Zug zwei Walnüsse a und b mit $a < k < b$ vertauscht.

Aufgabe 6. Es seien $m \geq 2$ eine ganze Zahl, A eine endliche Menge von (nicht notwendigerweise positiven) ganzen Zahlen und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ Teilmengen von A. Es werde vorausgesetzt, dass für jedes $1 \leq k \leq m$ die Summe der Elemente von B_k genau m^k beträgt. Man beweise, dass A mindestens $m/2$ Elemente enthält.

Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen gelingen werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1: Untersuchen Sie, warum die Fragestellungen bei kleineren n (z.B. $n = 10$) nicht gültig ist. Finden Sie drei Zahlen zwischen 100 und 200, bei denen die Summe von je zwei dieser Zahlen eine Quadratzahl ist.

zu Aufgabe 2: Veranschaulichen Sie sich die Ungleichung für $n = 2$ und beweisen Sie diesen Spezialfall.

zu Aufgabe 3: Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und finden Sie eine Vermutung über die Lage des gemeinsamen Punktes in Abhängigkeit von der Figur.

zu Aufgabe 4: Zeichnen Sie eine Skizze zur Aufgabe und prüfen Sie für spezielle Vierecke die Behauptung.

Zu Aufgabe 5: Untersuchen Sie, ob die Fragestellung auch für kleinere Anzahlen an Walnüssen richtig ist.
zu Aufgabe 6: Diskutieren Sie die Fälle $m = 3$ und $m = 4$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis 18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[9] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum aktuellen Thema dieses Heftes wurden folgende Auszüge ausgewählt. Dabei wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten.

Dr. Johann Nicolaus Müller. Anweisung zur Geometrie für Anfänger. Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

Capitel IX
Von dem Cirkel

§28.1. (S. 24) In dem vorhergehenden Capitel, lernten wir die Nahmen kennen, die eine Ebene erhält, wenn sie in lauter geraden Linien eingeschlossen wird.
Aus dem 20. §. Erinnern wir uns auch noch sehr wohl, daß zwo gerade Linien keine Fläche einschliessen können; sondern, daß zum wenigsten drey geraden Linien erfordert werden, um eine Ebene damit einzuschliessen.

Mit den krummen Linien aber, ist es ganz anders beschaffen. Wir wollen jetzt gleich zeigen, daß nur eine einzige krumme Linie nöthig ist, um eine Ebene einzuschließen.
Ziehet in einer Ebene eine gerade Linie c a, und stellet euch vor, daß diese gerade Linie in dem Punct c, fest gemacht wäre, so, dass man die Linie c a, um den Punct c, beweglich drehen könnte: so wird der Punct a, in dem die Linie c a, so herum geführet wird, bis sie wieder dahin kommt, wo sie Anfangs war, eine krumme Linie beschreiben, die ein Stück von der ebenen Fläche einschliesset.

Diese krumme Linie, und die ebene Fläche, innerhalb der krummen Linie, machen zusammen einen Cirkel, oder Kreiß.
...

[9] Johann Nicolaus Müller (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologen, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Kapitel XI
Geraden Linien aufeinander senkrecht, oder perpendicular zu setzen

§38.1. Wie man überhaupt auf dem Papier, oder sonst einer ebenen Fläche, geraden Linien zieht, das ist leicht zu lernen.
Die Spitze eines fein gespitzten Bleistifts, nur an der Schärfe eines geraden Lineals, hingeführet, gibt allemal eine gerade Linie.

Die Linie wird desto feiner, oder verdient desto eher den Nahmen einer mathematischen Linie, je spitzer der Bleistift gewesen ist.

Obgleich solche Linie, niemals eine wahre mathematische Linie ist, denn sie ist und bleibt immer lang, breit und dick: so siehet man sie doch so an, als wäre sie wirklich mathematisch, das hißt, als wäre sie nur lang, aber nicht breit, und nicht dick.
Jetzt wollen wir zeigen ...

Kapitel XIX
Tangenten an einen Kreiß zu ziehen.

§81.1. Ist ein Kreiß a b c gegeben, und es soll in einem Punct a desselben, eine Tangente, das ist, eine gerade Linie gezogen werden, die den Kreis in dem Punct a, nur berühret, aber nicht schneidet: so verfahret auf folgende Weise:

Aus des Kreises Mittelpunct c, ziehet den Halbmesser c a:
Hierauf verlängert den Halbmesser soweit nach h zu, bis a h so lang ist, wie a c:
Nehmet alsdenn die ganze Linie c h in den Zirkel, und machet aus den Puncten, c und h, oberhalb c h, und auch unterhalb c h, jedesmal zween Bogen, wovon die Bogen über c h, sich in dem Punct t, die zween Bogen aber unter c h, sich in g, schneiden.
Durch die beyden Durchschnitte, t und g, ziehet die Gerade Linie t g: so wird t g den Kreis in dem Punct a nur berühren, abr nicht schneiden:
Folglich ist t g eine Tangente des Kreises a b c.

Liesse sich aber die gerade Linie, oder der Halbmesser c a, nicht soweit nach h verlängern, daß ah gleich ca würde: so richtet nur ans End des Halbmessers c a, in a eine Perpendicularlinie a t auf:

Das Perpendikel a t wird alsdenn den Kreis in dem Punkt a berühren, aber nicht schneiden: soweit man auch a t rückwärts nach g verlängern würde.

Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Wir können die Anzahl der Teiler einer Zahl formelmäßig ermitteln:

$$T\left(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\right) = (1+k_1) \cdot (1+k_2) \cdot \ldots \cdot (1+k_n)$$

Wie viele Teiler kann eine dreistellige Zahl maximal haben? Durch systematische Untersuchung der möglichen Fälle (was ist eine geeignete Systematik?) finden wir, dass $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$ mit 32 Teilern das Maximum erreicht. Unter den vierstelligen Zahlen besitzen übrigens die Zahlen 7560 und 9240 die meisten Teiler (jeweils 64).

Überprüfen Sie, dass es unter den drei- bzw. vierstelligen nicht mehr Teiler sein können!

Olympiade-Aufgaben, die sich durch Anwendung der allgemeinen Formel über die Anzahl der Teiler vorteilhaft lösen lassen, waren beispielsweise:

Aufgabe MO301035. Man untersuche, ob es eine Menge *M* von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Keine Zahl aus *M* enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus *M* ist eine Quadratzahl.

Lösungshinweise: Es gibt eine solche Menge. Mit allen elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 kann man folgende zusammengesetzte Zahlen bilden:

$$2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots \cdot 31^{k_{11}} \quad (k_i = 0 \text{ } oder \text{ } 1)$$

Das sind 2^{11}= 2048 verschiedene Zahlen. Keine hat einen Primfaktor größer als 31. Unter diesen Zahlen ist keine mit einer Quadratzahl als Teiler. Folglich erfüllt jede Teilmenge mit 1991 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe MO391041. *M* sei die Menge aller derjenigen Zahlen, die sich als Produkt von fünf aufeinander folgenden positiven geraden Zahlen darstellen lassen.

(a) Ermittle die größte ganze Zahl *t*, die ein Teiler aller dieser Zahlen aus *M* ist.
(b) Ermittle die größte natürliche Zahl *m*, für die gilt, dass jede Zahl aus *M* mindestens *m* positive Teiler hat.
(c) Ermittle die kleinste Zahl aus *M*, die mehr als 200 positive Teiler hat.

Lösungshinweise: Der größte ganze Teiler kann nicht größer sein als jedes Element der Menge *M*. Folglich gilt $t \le 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = 3840 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$. Nun zeigen wir, dass jede der Zahlen aus *M* diesen Teiler besitzt. *t* besitzt 36 Teiler. Alle Zahlen aus *M* haben mindestens diese 36 Teiler, *m* kann aber nicht größer sein, weil 3840 als kleinstes Element genau diese 36 Teiler hat. Um (c) zu beantworten, genügt es mittels der Primfaktorzerlegung der ersten Elemente von *M* die erste Zahl der geforderten Art zu finden. Es ist $14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ mit insgesamt $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ Teilern. ❑

Ohne den Formelansatz zur Berechnung der Anzahl aller Teiler einer Zahl wäre dies eine kaum lösbare Aufgabe. In der Musterlösung für die Korrektur wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der **Satz über die Anzahl der Teiler** einer Zahl vom Schüler als bekannt vorausgesetzt und zitiert werden darf.

Über die Summe aller Teiler einer Zahl

Es sei $S(n)$ die Summe aller Teiler der natürlichen Zahl n. Wir untersuchen das Verhältnis $v(n) = \frac{S(n)}{n}$ und entscheiden, ob $v(n)$ beliebig groß werden kann.

Da die Zahl selbst Teiler von sich ist, gilt stets $v(n) \geq 1$. Betrachten wir Primzahlen p, so finden wir $v(p) = \frac{1+p}{p} = 1 + \frac{1}{p}$, also einen Wert nahe 1. Untersuchen wir nun aus Primzahlen zusammengesetzte Zahlen, $n = p_1 \cdot p_2$, so wächst das Verhältnis:

$$v(p_1 \cdot p_2) = \frac{1 + p_1 + p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_2} = 1 + \frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

Für $n = 2 \cdot 3 = 6$ erhalten wir das Maximum für diese Zahlen, $v(6) = 2$, die vollkommen Zahl. Für $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ erhalten wir schon $v(30) = 2{,}4$. Wir könnten deshalb vermuten, dass der Wert $v(n)$ besonders groß wird, wenn n möglichst viele Teiler besitzt. Für $n = k^m$ können wir diese Vermutung bestätigen:

$$v(n) = \frac{\sum_{i=1}^{m} k^i}{k^m} = \frac{k^{m+1}-1}{k^m} = k - \frac{1}{k^m}.$$

Der Wert von $v(k^m)$ ist folglich nahe k. Wir müssen also nur k groß genug wählen, damit $v(n)$ ebenfalls groß wird. Auch für $n = k!$ finden wir eine interessante Abschätzung, wenn wir nur einige Teiler berücksichtigen:

$$v(k!) = \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + k!}{k!} > \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i}}{k!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

Die Summe der rechten Seite ist der Beginn der harmonischen Reihe, die trotz der immer kleiner werdenden Summanden beliebig groß werden kann. Um dies nachzuweisen, formen wir die Reihe wie folgt um ($k > 8$):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Wir sehen, wenn k nur groß genug ist, werden so viele Summanden mit Werten größer als ½ addiert, dass die Summe eine beliebig vorgegebene Zahl übersteigt.

Inhaltsverzeichnis Heft Sept. 2021

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[10]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben-bezug**
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.