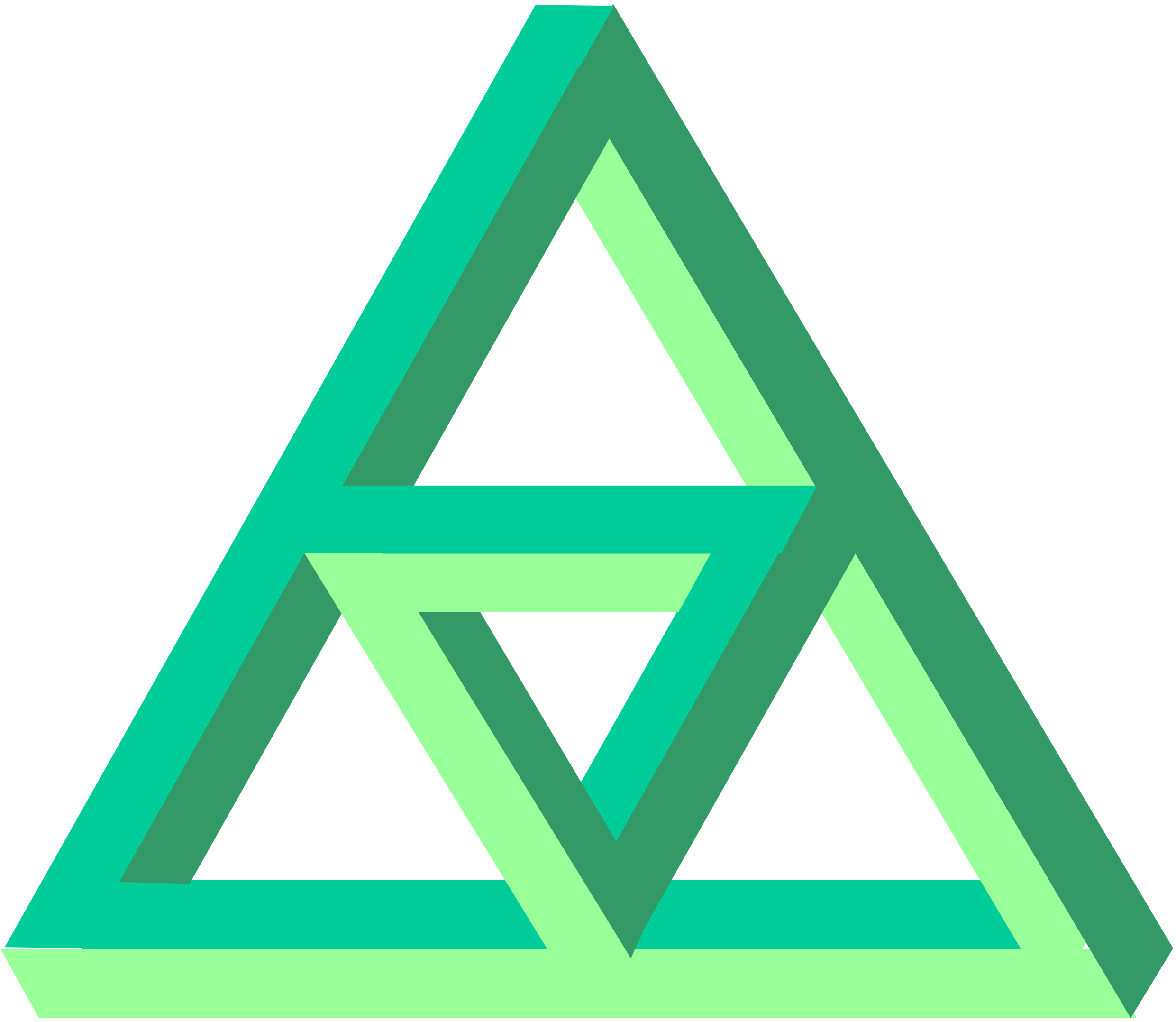
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Juli/August 2021 20. Jahrgang

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [1]

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

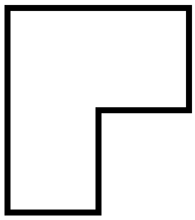


Abbildung 1a

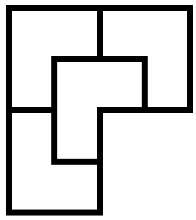


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden.

Bezeichnet a die Länge der langen Seite und b die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \qquad \text{also} \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst. Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes

[1] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-4, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn wir die Seitenlängen geeignet wählen – aber wie?

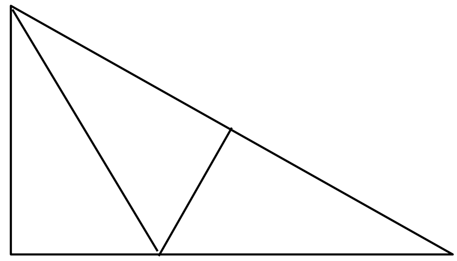
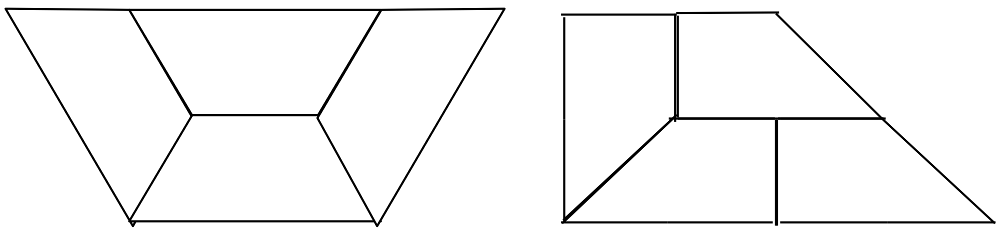
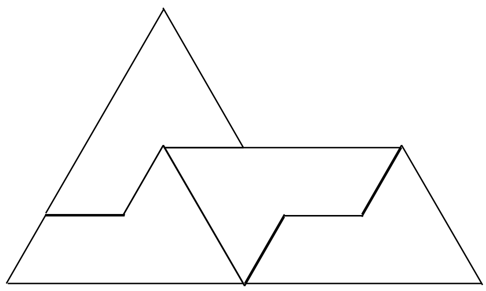


Abbildung 2

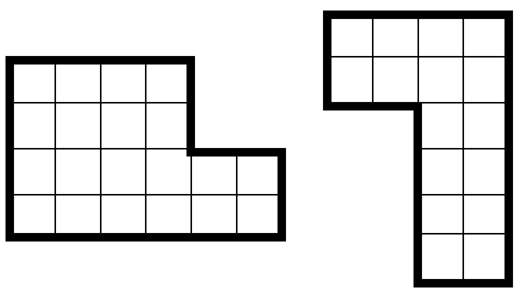
Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:



Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



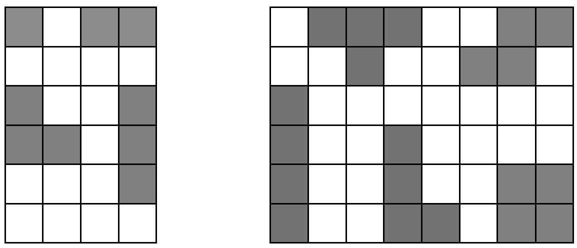
Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert (finden Sie diese):



Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen für jedes vorgegebene n bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es ein n-teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich einfach lösen. Aber für $n = 5$ oder größere n?

Haben wir ein n-teiliges Gerücht, können wir daraus schnell ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n-minos für n = 1, 2, 3, 4

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form können wir vergrößern, indem wir nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzen?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus 4 Domino-Steinen können wir ein 2 x 4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden (warum nicht?).

Setzen wir 5 Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte.

So könnten wir die Reihe der n-minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt (n = 6), sollten wir diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese könnten wir zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

Ungeordnete Reihenfolgen [2]

Wir betrachten unterschiedliche Reihenfolgen der Ziffern 1 bis 9. Insgesamt gibt es $9! = 362880$ verschiedene Möglichkeiten, diese Ziffern anzuordnen. Die natürliche Reihenfolge des Abzählens 1 2 3 4 5 6 7 8 9 weckt sicher wenig Aufmerksamkeit. Für die Anordnung 1 3 5 7 9 2 4 6 8 finden wir leicht eine Beschreibung. Reihenfolgen wie 1 9 2 8 3 7 4 6 5 heißen alternierend, und zwar in dem Sinne, dass es in dieser Anordnung keine drei aufeinanderfolgende Ziffern *a, b, c* gibt, für die $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt. Merkwürdig sieht folgende Reihenfolge aus: 8 3 1 5 9 6 7 4 2; finden Sie eine Beschreibung[3]?

Wir können nun folgende Fragen stellen: Was ist vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet die „unnatürlichste" Reihenfolge? Für welche Reihenfolge ist die „Unordnung" am größten?

Um die größte Unordnung zu finden, ist ein Maß notwendig, mit der die (Un-) Ordnung gemessen werden kann. Wir untersuchen folgenden Ansatz:

Gegeben sei eine Reihenfolge *F* der Ziffern 1 bis 9, geschrieben als $F = F(a_1,\ldots,a_9)$. Wir bestimmen in dieser Folge von jedem Paar aufeinanderfolgender Ziffern den Betrag der Differenz (d.h. $|a_i - a_{i+1}|$ für $i = 1$, ..., 8) und bilden die Summe *S(F)* aller acht Beträge:

$$S(F) = \sum_{i=1}^{8} |a_i - a_{i+1}| = |a_1 - a_2| + \ldots + |a_8 - a_9|$$

S(F) sei der Unordnungswert der Reihenfolge *F*, je höher diese Summe, desto größer die Unordnung der Folge.

Die natürliche Reihenfolge hat die Unordnung 8. Es gibt offensichtlich keine Reihenfolge mit kleinerer Unordnung, denn jeder der acht Summanden ist größer oder gleich 1. Diese einfache Folgerung motiviert die Begriffswahl: Die natürliche Ordnung besitzt die geringste Unordnung. Auch die Umkehr der natürlichen Reihenfolge führt zu einer Reihenfolge mit Unordnung 8. Weitere Möglichkeiten kann es aber für die minimale Unordnung nicht geben.

Da es nur endlich viele Anordnungen der 9 Ziffern gibt, gibt es mindestens eine Reihenfolge mit maximaler Unordnung. Eine grobe obere Abschätzung (obere

[2] Nach Engelhaupt, H. Aufgaben mit Ziffern. In: alpha (1996) 9, S. 22f. Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 1-5A, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

[3] Die Ziffern sind alphabetisch geordnet: acht, drei, eins, ...

Schranke) über den maximalen Wert können wir mit $8 \cdot 8 = 64$ angeben, denn jeder der 8 Beträge kann 8 nicht übersteigen. Aber diese Schätzung ist sicherlich viel zu hoch. Wie groß ist aber nun die maximale Unordnung, welche Reihenfolgen haben diese und wie viele derartige gibt es?

Ohne Schwierigkeiten erkennen wir, dass für eine gegebene Reihenfolge F die Umkehrung der Ziffernfolge den Wert der Unordnung $S(F)$ nicht ändert. Ebenso einfach finden wir, dass das Ersetzen jeder Ziffer z einer gegebenen Reihenfolge durch die Ziffer $z' = (10 - z)$ die Unordnung nicht verändert. Sind nämlich a und b zwei benachbarte Ziffern, so beträgt deren Beitrag zur Summenbildung nach dem Ersetzen

$$|(10-a)-(10-b)| = |b-a| = |a-b|,$$

d.h. alle acht Beträge und damit deren Summe ändern ihren Wert nicht.

Satz. Jede Folge mit maximaler Unordnung ist alternierend.

Der *Beweis* basiert auf dem Extremalprinzip: Es sei F eine Folge mit maximalem Unordnungswert $S(F)$ und F sei nicht alternierend. Dann enthält F drei aufeinanderfolgende Ziffern (hier a, b und c genannt) für die $a < b < c$ (oder $a > b > c$) gilt. Dann ist der Unordnungswert der Folge F', die aus F entsteht, wenn b weggelassen wird und damit aus 8 Ziffern besteht[4], ebenfalls $S(F)$, denn die Differenz der in F' benachbarten Ziffern a und c beträgt $c - a = (c - b) + (b - a)$. Setzen wir nun b an den Anfang der Folge F', so hat diese neue neungliedrige Folge einen größeren Ordnungswert als F', da ja ein positiver Summand zur Zahl $S(F')$ hinzukommt. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass F eine (neungliedrige) Folge mit maximaler Unordnung ist.

❑

Wir betrachten nun eine alternierende Reihenfolge $F = F(a_1, \ldots, a_9)$ mit $a_1 < a_2$. Dann finden wir für die Unordnung unter Beachtung der Größenverhältnisse von benachbarten Ziffern den Wert

$$\begin{aligned} S(F) &= (a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_8 - a_9) = \\ &= 2 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 + a_9) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Unordnung am größten, wenn im ersten Klammerausdruck für die Variablen möglichst große Ziffern gewählt werden (also 6, 7, 8, 9) und im zweiten Ausdruck die doppelt gezählten Ziffern möglichst klein sind (1, 2, 3). Die maximale Unordnung beträgt dann 39. Beispielsweise realisiert die Reihenfolge 4 9 3 8 2 7 1 6 5 dieses Maximum. Insgesamt gibt es 576 verschiedene Anordnungen der neun Ziffern mit dem Unordnungswert 39 (warum?).

---

[4] Der Unordnungswert $S(F)$ lässt sich in Analogie auf Reihenfolgen mit n Zahlen ($n > 1$) verallgemeinern.

Wie verändert sich die Aufgabe, wenn wir die 9 Ziffern im Kreis anordnen? Wie lauten unter diesen Bedingungen der kleinste und der größte Unordnungswert. Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es jeweils, die diese Extremwerte realisieren. (Dabei sollen zwei Anordnungen, von denen sich eine aus der anderen durch eine Drehung erzeugen lässt, nicht als verschieden angesehen werden.)

Suchen Sie nach anderen Definitionen für Unordnung und versuchen Sie, dafür die gleichen Fragestellungen nach Extremwerten und Anzahl der möglichen Anordnungen zu beantworten!

Thema 07– Kryptogramme (Teil I) [5]

Aufgabe 1 – MO301021[6]. In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe O braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt werden.

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

a) Beweisen Sie, dass in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe O durch die Ziffer 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für A befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Lösungshinweise: Da K nur als Übertrag entstehen kann, muss $K = 1$ gelten. An der Tausenderstelle kann im Ergebnis nur R stehen, wenn $M = 9$ (mit Übertrag aus der Hunderterstelle) oder $M = 0$ steht. Letzteres ist nicht möglich, weil damit der erforderliche Übertrag für die Zehntausenderstelle nicht erzeugt wird. Mit $M = 9$ kann aber aus der Zehnerstelle kein Übertrag erfolgen, da $R \neq U$ vorausgesetzt und somit die Zehnerstelle im Ergebnis höchsten 8 erreichen kann, wenn aus der Einerstelle bereits ein Übertrag erfolgt. Wäre zugelassen, dass Anfangsziffern 0 sein dürfen, wäre auch $K = 0$ möglich. Da in der Tausenderstelle dann kein Übertrag entstehen darf, führt dies zu $M = 0$ im Widerspruch zu $K \neq M$.

a) Setzen wir $O = 0$, so muss aus der Zehnerstelle ein Übertrag entstehen, weil andernfalls $A = I$ gelten würde. Dies wurde aber bereits ausgeschlossen.
b) Wir untersuchen, ob es für $A = 0, 2, 3, \ldots, 8$ Lösungen des Kryptogramms gibt:

[5] Seit Anfang 2021 werden Texte zur Nach- und Vorbereitung der Mathematik-Olympiade angeboten, die angeregt durch aktuelle MO-Aufgaben Lösungswege ähnlicher Aufgaben vergleichen und weitere Aufgaben als Übungsmaterial zusammenstellen, siehe S. 20 dieses Heftes. Thema 07 ist für die Sommerpause gedacht.

[6] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert.

$\boldsymbol{A = 0}$: Da in der Hunderterstelle ein Übertrag entstehen muss, ist Fall $O = 9$ erforderlich (mit Übertrag aus der Zehnerstelle) im Widerspruch zu $M = 9$.

Aus $\boldsymbol{A = 2}$ folgt $O = 8$ und $I = 0$. Die Aussage $I = 0$ bedeutet $D + B = 10$ und somit ein Übertrag für die Zehnerstelle. Für R sind noch die Ziffern, 3, 4, 5, 6 und 7 möglich.

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & \mathrm{R} & \mathrm{D} \\ + & & \mathrm{R} & 2 & \mathrm{U} & \mathrm{B} \\ \hline = & 1 & \mathrm{R} & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

- Aus $R = 7$ folgt wegen des Übertrags $U = 1$ im Widerspruch zu $K = 1$.
- Für $R = 6$ müsste $U = 2$ im Widerspruch zu $A = 2$ gelten.
- Für $R = 4$ müsste $U = 4$ im Widerspruch zu $R \neq U$ gelten.

Für jedes $R = 3$ und $R = 5$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 5$ bzw. $U = 3$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 4, 6, 7. Wegen $D + B = 10$ ist also nur $D = 4$ oder $D = 6$ mit $B = 6$ bzw. $B = 4$ möglich.

Insgesamt gibt es für $A = 2$ vier Möglichkeiten. Beispiel:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 2 & 5 & 4 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

(*Hinweis:* Diese Herleitung war nicht verlangt. Es genügte, ein Beispiel anzugeben).

Aus $\boldsymbol{A = 4}$ folgt $O = 6$ und $I = 0$. Für R sind noch die Ziffern, 2, 3, 5, 7 und 8 möglich.

- Aus $R = 8$ folgt wegen des Übertrags $U = 0$ im Widerspruch zu $I = 0$.
- Für $R = 7$ müsste $U = 1$ im Widerspruch zu $K = 1$ gelten.
- Für $R = 2$ müsste $U = 6$ im Widerspruch zu $O = 6$ gelten.

Für jedes $R = 3$ und $R = 5$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 5$ bzw. $U = 3$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 2, 7, 8. Wegen $D + B = 10$ ist nur $D = 2$ oder $D = 8$ mit $B = 8$ bzw. $B = 2$ möglich.

Insgesamt gibt es für $A = 4$ vier Möglichkeiten. Beispiel:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

Für $\boldsymbol{A = 6}$ und $\boldsymbol{A = 8}$ gilt die Argumentation wie für $A = 4$ bzw. $A = 6$ wegen der Vertauschbarkeit der Buchstaben A und O.

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 2 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 8 & 5 & 4 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 4 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 6 & 5 & 2 \\ \hline = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

Wegen $K = 1$ und $M = 9$ kann nicht $\boldsymbol{A = 1}$ oder $\boldsymbol{A = 9}$ gelten.

Für $\boldsymbol{A = 5}$ folgt $O = 5$ im Widerspruch zu $A \neq O$.

Aus $\boldsymbol{A = 3}$ folgt $O = 7$ und $I = 0$. Für R sind noch die Ziffern, 2, 4, 5, 6 und 8 möglich.

- Aus $R = 8$ folgt wegen des Übertrags $U = 0$ im Widerspruch zu $I = 0$.
- Für $R = 5$ müsste $U = 3$ im Widerspruch zu $A = 3$ gelten.

- Für $R = 4$ müsste $U = 4$ im Widerspruch zu $R \neq U$ gelten.

Für jedes $R = 2$ und $R = 6$ ist U eindeutig bestimmt, $U = 6$ bzw. $U = 2$. Somit verbleiben für die Buchstaben D und B die Ziffern 4, 5, 8. Aus diesen Ziffern kann die Summe 10 nicht erzeugt werden.

Durch Vertauschen der Buchstaben finden wir, dass auch für $\boldsymbol{A = 7}$ keine Lösung besteht. Es gibt also keine weiteren Lösungen.

Mit dieser vollständigen Analyse (die zur Lösung der Fragestellung aber nicht erforderlich war) finden wir: Das Kryptogramm hat 16 verschiedene Lösungen.

❑

Aufgabe 2 – MO330923. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & M & O & R & D \\
+ & & R & A & U & B \\
\hline
= & K & R & I & M & I
\end{array}
$$

Geben Sie eine Lösung an! Beweisen Sie, dass es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Mit der Aufgabe MO301021 ist diese Fragestellung bereits vollständig diskutiert.

Lösungshinweise: Wenn wir eine Lösung gefunden haben, dann können wir in dieser – jeweils unabhängig voneinander – die Ziffern

- für die Buchstaben A und O
- für die Buchstaben R und U
- für die Buchstaben D und B

vertauschen und erhalten damit bereits $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verschiedene Lösungen. In jeder dieser Lösung können wir gleichzeitig die Ziffern für O und D bzw. A und B vertauschen und erhalten weitere 8 verschiedene Lösungen, insgesamt also 16 verschiedene Lösungen. ❑

Aufgabe 3 – MO331023. Im Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
+ & E & I & N & S \\
\hline
= & F & \ddot{U} & N & F
\end{array}
$$

Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!

Lösungshinweise: Da $F = 0$ ausgeschlossen ist, muss S ungerade und damit $F = 5$ gelten. Damit kann an der Tausenderstelle nur für $E = 1$ ohne Übertrag $F = 5$ folgen. Wir führen nun folgende Fallunterscheidung:

(I) $S = 1$ ist wegen $E = 1$ nicht möglich.
(II) Wäre $S = 3$, so müsste wegen des Übertrags aus $5 \cdot 3$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 1$ auf N enden, also $4 \cdot N + 1$ durch 10 teilbar sein. Da $4 \cdot N + 1$ aber eine ungerade Zahl ist, kann dies nicht sein.
(III) $S = 5$ ist wegen $F = 5$ nicht möglich.
(IV) Wäre $S = 7$, so müsste wegen des Übertrags aus $5 \cdot 7$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 3$ auf N enden, also $4 \cdot N + 3$ durch 10 teilbar sein. Da $4 \cdot N + 3$ aber eine ungerade Zahl ist, kann dies nicht sein.

Wenn es eine Lösung gibt, muss also $S = 9$ gelten. Dann muss wegen des Übertrags aus $5 \cdot 9$ an der Zehnerstelle $5 \cdot N + 4$ auf N enden, also $4 \cdot N + 4$ durch 10 teilbar sein. Dies ist nur möglich, wenn $4 \cdot N$ auf 6 endet, also $N = 4$ gilt (weil $N = 9$ wegen $S = 9$ nicht zulässig ist). Für die Hunderterstelle gilt: Zu $5 \cdot I$ kommt ein Übertrag 2 aus der Zehnerstelle hinzu und es wird kein Übertrag für die Tausenderstelle erzeugt. Also muss gelten: $5 \cdot I + 2 < 10$. Wegen $E = 1$ kann dies nur durch $I = 0$ erfüllt werden. Eine Probe bestätigt, dass damit eine Lösung gefunden wurde. Zudem zeigten wir, dass keine weiteren Lösungen existieren. ❑

Aufgabe 4. Finden Sie alle Lösungen des folgenden Kryptogramms. Dabei bezeichnen A und B (mit $B > 1$) zwei verschiedene Ziffern.

$$A^B + B^A = (A + B^B)^B$$

Lösungshinweise: Es gilt die grobe Abschätzung $(A + B^B)^B > A^B + (B^B)^B$. Deshalb muss $B^A > B^{B^2}$, also $A > B^2$ gelten. Weil A eine Ziffer ist ($A < 10$) finden wir $B = 2$. Die Gleichung vereinfacht sich deshalb zu

$$A^2 + 2^A = (A + 4)^2.$$

Dies ist gleichbedeutend zu $2^A = 8 \cdot A + 16 = 8 \cdot (A + 2)$. Weil auf der linken Seite der Gleichung eine Zweierpotenz steht, muss auch $A + 2$ eine Zweierpotenz sein. Dies ist für $A < 10$ nur für $A = 0$, $A = 2$ und A=6 möglich:

$$A = 0{:}\quad 0^2 + 2^0 = 1 \neq (0 + 2^2)^2 = 16$$
$$A = 2{:}\quad 2^2 + 2^2 = 8 \neq (2 + 2^2)^2 = 36$$
$$A = 6{:}\quad 6^2 + 2^6 = 100 = (6 + 2^2)^2$$

Somit ist nur $A = 6$ und $B = 2$ eine Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe 5 – MO431034. Das Kryptogramm soll in einem n-adischen Positionssystem gelöst werden. Ermitteln Sie das kleinste n, für welches das Kryptogramm eine Lösung hat.

		A	S	T	A
+		E	R	N	I
=	N	A	M	E	N

Anmerkung:

(1) Für eine Lösung des Kryptogramms gelten die Regeln wie in den oberen Aufgaben.

(2) Ein n-adisches Positionssystem ist ein Positionssystem zur Basis n mit den Ziffern 0, 1, ..., $n - 1$.

Lösungshinweise: Da in dem Kryptogramm acht verschiedene Buchstaben auftreten, gilt $n \geq 8$. Wir suchen zunächst eine Lösung für $n = 8$. Offenbar kann für N als Übertrag der Tausenderstellen nur $N = 1$ gelten. Damit sich der erforderliche Übertrag ergibt, muss $E = n - 1 = 7$ gelten. Außerdem muss auch in den Einerstellen ein Übertrag entstehen, damit die Einerstelle des Ergebnisses 1 ergibt. Damit folgt $T = 5$. Wir sehen nun, dass die 0 nur für M angenommen werden kann. Da aus den Zehnerstellen kein Übertrag folgt, müssen S und R die Summe 8 ergeben – dafür sind nur 2 und 6 verfügbar. Damit müssten die Einerstellen mit 3 und 4 belegt werden. Doch dann finden wir $N = 7$ im Widerspruch zu $N = 1$. Es kann also keine Lösung im 8-adischen Positionssystem geben.

Für $n = 9$ finden wir das nebenstehende Beispiel (eine Herleitung ist nicht erforderlich, kann aber ähnlich wie für $n = 8$ diskutiert werden).

		3	4	6	3
+		8	5	1	7
=	1	3	0	8	1

Damit ist $n = 9$ die Lösung der Aufgabe. ❑

Thema 07 – Kryptogramme (Teil II)

Aufgabe 6 – MO560931/MO561031. In der Gleichung

$$* \cdot * * * = 6 \cdot * * 5 + 2017$$

ist jedes der sechs Sternchen so durch eine der Ziffern 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sternchen dürfen durch die gleichen Ziffern ersetzt werden. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

Lösungshinweise: Zunächst können wir die mit a und b bezeichneten Sternchen untersuchen: $a \cdot * * b = 6 \cdot * * 5 + 2017$

Damit die linke Seite der Gleichung vierstellig wird, muss a größer als 1 sein. Die rechte Seite ist nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar. Folglich kann auch a nicht durch 2, 3 und 5 teilbar sein, also gilt $a = 7$. Da die Einerstelle der rechten Seite 7 ist, muss zudem $b = 1$ sein. Nun lässt sich die Gleichung mit zweistelligen Zahlen x und y schreiben als

$$7 \cdot (10 \cdot x + 1) = 6 \cdot (10 \cdot y + 5) + 2017, \text{ d.h. } \quad 7 \cdot x = 6 \cdot y + 204$$

Da die rechte Seite durch 6 teilbar ist, ist auch x durch 6 teilbar. An der Zehnerstelle von y kann nicht die 0 oder die 1 (weil bereits $b = 1$) stehen, also ist y mindestens 23. Hieraus folgt $x \geq 49$. Nun können wir für die verbleibenden durch 6 teilbaren Zahlen systematisch probieren:

x	54	60	66	72	78	84	90	96
y	29	36	43	50	57	64	71	78

Nur das erste Zahlenpaar erfüllt alle Bedingungen. Bei den anderen Zahlenpaaren treten entweder Ziffern doppelt auf oder unter den Ziffern befindet sich die 7 (was wegen a = 7 nicht zulässig ist). Eine Probe bestätigt die Belegung als Lösung:

$$7 \cdot 541 = 3787 = 6 \cdot 295 + 2017. \qquad \square$$

Aufgabe 7 – MO020911. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt.

```
x x x x x x x x : x x x = x x x x x
  x x x
-------
      x x x x
        x x x
      -------
        x x x x
        8 x x x
        -------
              0
```

Lösungshinweise: Wenn wir von einer n-stelligen Zahl ein $(n-1)$-stellige Zahl subtrahieren und das Ergebnis $(n-1)$-stellig ist, muss der Minuend mit 1 beginnen. Also ist die erste Ziffer des Dividenden und des ersten Restes eine 1. Jedoch ist die Teilaufgabe 1*xxx* – *xxx* = 1 nur durch 1000 – 999 = 1 erfüllbar.

Nun erkennen wir, dass 999 das m-fache des Divisors ist (erster Divisionsschritt, $0 < m < 10$) und dass das n-fache des Divisors größer als 8000 ist (letzter Divisionsschritt, $0 < n < 10$). Dies ist nur mit dem Divisor 999 erfüllbar und die vorletzte Zeile des Divisionsalgorithmus ergibt sich aus $999 \cdot 9 = 8991$. Somit können wir das Schema bereits wie folgt ausfüllen:

```
1 0 0 0 x x x 1 : 9 9 9 = 1 0 0 x 9
  9 9 9
-------
      1 x x x
        x x x
      -------
        8 9 9 1
        8 9 9 1
        -------
              0
```

Die vorletzte Ziffer des Quotienten kann aber nur 1 sein, weil im mittleren Teil des Algorithmus nur eine dreistellige Zahl entsteht. Damit lautet das vollständig ausgefüllte Schema:

$$
\begin{array}{cccccccc l}
1&0&0&0&8&9&8&1& : \ 999 = 10019\\
&9&9&9&&&&&\\ \cline{1-4}
&&&1&8&9&8&&\\
&&&&9&9&9&&\\ \cline{4-7}
&&&&8&9&9&1&\\
&&&&8&9&9&1&\\ \cline{5-8}
&&&&&&&0&
\end{array}
$$

Die Richtigkeit der Divisionsausführung können wir bestätigen. Wie die Herleitung zeigte, kann es auch keine andere Lösung geben. ❑

Aufgabe 8 – MO330944. Jemand findet die Aufgabe

22! = 11240007277**607680000.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die beiden fehlenden Ziffern mit x und y. Weil 9 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 22! durch 9 teilbar. Deshalb ist auch die Quersumme

$$1 +1 +2 +4 +0 +0 +0 +7 +2 +7 +7 + x + y +6 +0 +7 +6 +8 +0 +0 +0 +0$$
$$= x + y + 58$$

durch 9 teilbar und somit auch $x + y + 4$. Dies ist für Ziffern x und y nur für $x + y = 5$ oder $x + y = 14$ möglich.

Weil 11 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 22! durch 11 teilbar. Deshalb ist die alternierende Quersumme

$$1 -1 +2 -4 +0 - 0 +0 -7 +2 -7 +7 - x + y -6 +0 -7 +6 -8 +0 -0 +0 -0$$
$$= y - x - 22$$

durch 11 teilbar und somit auch $y - x$. Dies kann für Ziffern nur für $x = y$ erfüllt werden und deshalb kann nur $x + y = 14$, also $x = y = 7$ gelten. ❑

Aufgabe 9 – MO351033. Die Zahl 20! ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20. Im Dezimalsystem ist diese Zahl 19-stellig. Jürgen hat den Rechnerausdruck

20! = 24329020*81766*****

erhalten. Darin sind die Ziffern an den Stellen * unleserlich. Kann er, wenn die anderen Ziffern korrekt sind, die fehlenden Ziffern ermitteln, ohne einen Rechner zu nutzen oder Multiplikationen mit zehn- oder mehrstelligen Zahlen auszuführen? Wenn das möglich ist, begründen Sie dies und geben Sie die fehlenden Ziffern an!

Lösungshinweise: In Erweiterung der Aufgabe MO330944 suchen wir zunächst die Anzahl der Nullen am Ende von 20! Da mit jedem Faktor 5 in 20! eine Endnull entsteht (weil mehr Faktoren 2 als 5 in dem Produkt auftreten), endet 20! wegen der Faktoren 5, 10, 15 und 20 insgesamt auf 4 Nullen. Wir bezeichnen die beiden fehlenden Ziffern mit x und y.

Weil 9 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 9 teilbar. Deshalb ist auch die Quersumme

$$2 + 4 + 3 + 2 + 9 + 0 + 2 + 0 + x + 8 + 1 + 7 + 6 + 6 + y + 0 + 0 + 0 + 0$$
$$= x + y + 50$$

durch 9 teilbar und somit auch $x + y + 5$. Dies ist für Ziffern x und y nur für $x + y = 4$ oder $x + y = 13$ möglich.

Weil 7 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 7 teilbar. Deshalb ist die alternierende 3er-Quersumme

$$600 + y - 176 + 8 + 10x - 902 + 432 - 2$$
$$= 10 \cdot x + y - 40$$

durch 7 teilbar und somit auch $3 \cdot x + y + 2$.

Gilt $x + y = 4$, so muss $2 \cdot x + 6$ durch 7 teilbar sein, also entweder $x = 4$ (und damit $y = 0$) oder $x = 7$ (dieser Wert entfällt jedoch wegen $4 = x + y > x$).

Gilt $x + y = 13$, so muss $2 \cdot x + 15$ und folglich $2 \cdot x + 1$ durch 7 teilbar sein, also entweder $x = 3$ (und damit $y = 10$, doch dieser Wert entfällt wegen der Ziffer $y < 10$) oder $x = 10$ (doch dieser Wert entfällt wegen der Ziffer $x < 10$).

Somit lauten die unleserlichen Ziffern (von links nach rechts) 0, 4, 0, 0, 0, 0.

Lösungsvariante: Wollen wir wie in Aufgaben MO330944 die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 9 und 11 anwenden, lassen sich die fehlenden Ziffern nicht eindeutig finden.

Weil 11 als Faktor in der Fakultät enthalten ist, ist 20! durch 11 teilbar. Deshalb ist die alternierende Quersumme

$$0 - 0 + 0 - 0 + y - 6 + 6 - 7 + 1 - 8 + x - 0 + 2 - 0 + 9 - 2 + 3 - 4 + 2$$
$$= x + y - 4$$

durch 11 teilbar sein

Ist wie oben $x + y = 4$, dann ist es nicht möglich, x und y eindeutig zu finden. Ist dagegen $x + y = 13$, ist die alternierend Quersumme nicht durch 11 teilbar.

Um die meist unbekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 7 zu umgehen, ist es zulässig, die letzten Ziffern von 20! durch wiederholte Multiplikationen zu ermitteln (für diese Multiplikationen sind durch die Beschränkung auf die Endziffern lediglich kleine Zahlen erforderlich und somit muss keine Rechentechnik eingesetzt werden). Wir finden auf diese Weise, dass 20! auf 40000 endet, also $y = 4$ gilt.

Diese Information genügt nicht für die Teilbarkeitsregel der Zahl 9, weil dann $x = 0$ oder $x = 9$ möglich bleibt.

Jedoch genügt diese Information für die Teilbarkeitsregel der Zahl 11, denn $x + y - 4 = x$ ist als Ziffer nur für $x = 0$ durch 11 teilbar.,

Thema 07 – Kryptogramme (Aufgaben[7])

Aufgabe 1a – MO330923. Das folgende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Z} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ + & \mathrm{D} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{I} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{\ddot{U}} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

a) Geben Sie eine Lösung an!
b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 2a. Das folgende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffern (für T und S) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{O} \\ + & & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \mathrm{R} & \mathrm{E} & \mathrm{E} \\ + & & \mathrm{S} & \mathrm{E} & \mathrm{V} & \mathrm{E} & \mathrm{N} \\ \hline = & \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{L} & \mathrm{F} & \mathrm{E} \end{array}$$

[7] Lösungshinweise zu diesen Aufgaben können unter norman.bitterlich@t-online.de angefordert werden.

Finden Sie alle Lösungen des Kryptogramms und weisen Sie nach, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 3a – MO451044. In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne * durch die Ziffern 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

$$\begin{array}{cccc} & * & * & * \\ + & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline = & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & * & * & * \\ + & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4a. Bestimmen Sie alle vierstelligen Zahlen $\overline{ABCD}$ (mit den Ziffern $A, B, C, D \neq 0$), für die gilt:

$$A \cdot B = C + D \;\; ; \;\; B \cdot D = A + C \;\; ; \;\; A \cdot C \cdot D = (A + D)^3$$

Aufgabe 5a – MO331044. Jemand findet die Aufgabe

23! = 2585201673*8849*6640000.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen. Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jeder positive ganze Zahl *n* wird *n*! als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis *n* definiert.

Aufgabe 6a – MO561013. In der Gleichung

* * * * * – * * * * * = 2017

ist jeder Stern so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
b) Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

Aufgabe 7a. Das Aufschreiben des nachfolgend angegebenen Polynoms als Produkt zweier Linearfaktoren erfolgte so hastig, dass einige Ziffern unleserlich sind. (Jedes Sternchen bedeutet eine unlesbare Ziffer.)

$$x^2 + {*}\,x - {*}\,1 = (x + {*}{*}) \cdot (x - {*}).$$

Vervollständigen Sie diese Gleichung und untersuchen Sie, ob es verschiedene Möglichkeiten gibt, diese Gleichung zu vervollständigen.

Aufgabe 8a. Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, dass es nur eine Lösung gibt. (Der Divisor beginnt nicht mit 0.)

```
x x x x x x x : x x = x 0 8 0 x
x x x
-----
    0 x x
      x x
      ---
        x x x
        x x x
        -----
            0
```

Wettbewerbe: Bundesrunde der 60. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 60. Mathematik-Olympiade sollte als Jubiläumsveranstaltung in Berlin stattfinden. Das Pandemie-Geschehen führte wie schon im Jahr 2020 dazu, dass dieser Wettbewerb (wie schon die diesjährigen Regional- und Landesrunden) nur virtuell durchgeführt werden durfte. Als Veranstalter übernahm der Verein Mathematik-Olympiade e.V. als Träger des Wettbewerbs die Organisation und Durchführung und gestaltete die Bundesrunde zu einem digitalen Erlebnis auf hohem technischen Niveau! Unter www.mo2021.de sind vielfältige Informationen verfügbar.

Bei der Eröffnungsveranstaltung am 13. Juni begrüßte Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN und ging in seinem Beitrag mit Blick auf die Jubiläumsveranstaltung auf die MO-Geschichte ein. Wie von den Begleitheften früherer Bundesrunden gewohnt, wurden alle Mannschaften vorgestellt. Die persönlichen Grußworte von

- ANJA KARLICZEK, Bundesministerin für Bildung und Forschung, und
- BRITTA ERNST, Ministerin für Bildung, Jugend und Sport im Land Brandenburg, Präsidentin der Kultusministerkonferenz

zeigten die öffentliche Wertschätzung, die der Wettbewerb genießt. Am 20. Juni gestaltete LISA SAUERMANN (erfolgreichste Teilnehmerin an den Internationalen Mathematik-Olympiaden) den Festvortrag „Das Kartenspiel SET und ein Resultat von J. ELLENBERG und D. GIJSWIJT“. In sehr anschaulicher Weise demonstrierte sie den wissenschaftlichen Weg von einem Kartenspiel zu einer spannenden mathematischen Herausforderung – ein sehenswerter Vortrag! Schließlich wurde die Bundesrunde mit der Preisverleihung am 22. Juni beendet. Wieder begrüßte Prof. Dr. JÜRGEN PRESTIN die Zuschauenden. Prof. Dr. GÜNTER M. ZIEGLER, Präsident der Freien Universität Berlin, überbrachte die Gratulation. In seinem Beitrag ermutigte er unter anderem, das Motto „Mathematik - leider schwierig" mit Stolz wie ein Markenzeichen zu verbreiten. Alle Videos stehen in YouTube noch zur Verfügung (letztmalig besucht: 03.07.2021), Einwahlinformationen unter www.mo2021.de.

Wie bei regulären Präsenzrunden auch, gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern und 5 Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 14 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 75 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 28 Anerkennungsurkunden[8] Die sächsische Mannschaft konnte leider in der (inoffiziellen) Länderwertung nicht an die vorderen Positionen der vergangenen Jahre anknüpfen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 13 Punkten den 7. Platz. Niedersachsen mit 35 Wertungspunkten und Bayern (32) führen die Länderliste souverän an. Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II und III. Preise bedeuten für Sachsen ein II. Preis und vier III. Preise sogar nur Platz 10. Auch hier führen Niedersachsen (10 Preise) und Bayern (9 Preise).

Den sächsischen Preisträgern unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

II. Preis	MELIA HAASE (Kl. 9, Gymn. Zschopau)
III. Preise	JIEOH AHN (Kl. 9, Nexö-Gymn. Dresden)
	TIM THIEME (Kl. 9, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	ANTON NÜSKE (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	JOHANN KRETZSCHMAR (Kl. 12, Nexö-Gymn. Dresden)
Anerkennung:	LUKAS TANNENBERG (Kl. 8, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	MORITZ PETRICH (Kl. 12, Sächs. Landesgymn. St. Afra, Meißen).

Nun freuen wir uns auf die 61. Mathematik-Olympiade, deren Bundesrunde vom 15. bis 18. Mai 2022 in Magdeburg stattfinden wird – hoffentlich wieder als Präsenzveranstaltung.

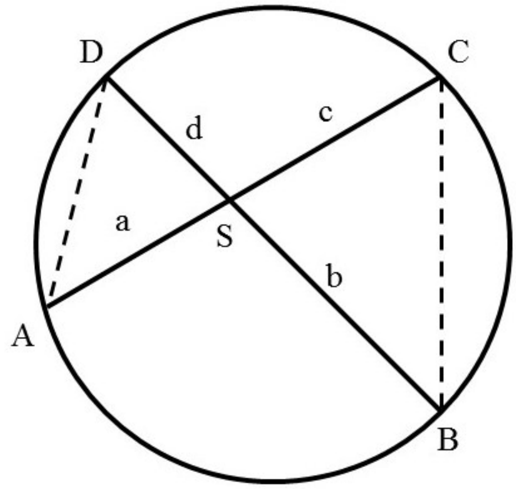
Bekannte Sätze der Mathematik

Aus der Vorbemerkung zum Aufgabenblatt der Mathematik-Olympiade: *„ ... Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus*

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2021.de verfügbar.
[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

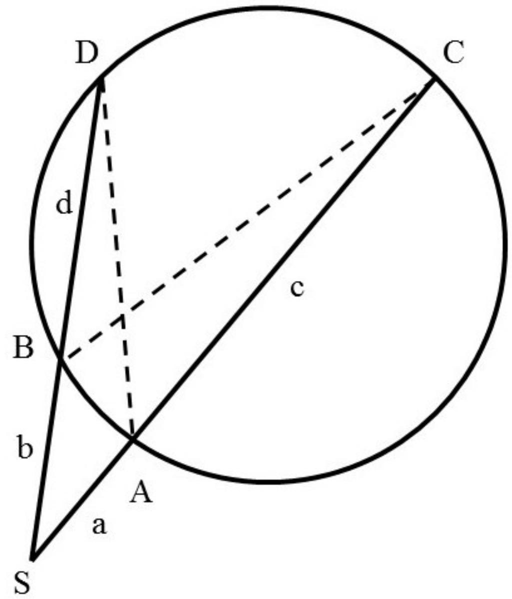
dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“

Sehnen-Satz. Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne.



Beweisskizze: Bezeichnen wir (wie in nebenstehender Abbildung ersichtlich) mit a, b, c und d die Sehnen-Abschnitte, so ist die Gleichheit $a \cdot c = b \cdot d$ zu zeigen.

Nun sind aber die Winkel $\angle CBD$ und $\angle CAD$ gleich groß, da es beide Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne $\overline{CD}$ sind. Ebenso stimmen die Größen der Winkel $\angle ADB$ und $\angle ACB$ (Peripheriewinkel über $\overline{AB}$). Folglich sind die Dreiecke ASD und BCS ähnlich (www). Damit gilt die Verhältnisgleichung $a : d = b : c$, woraus die behauptete Gleichung folgt. ❑

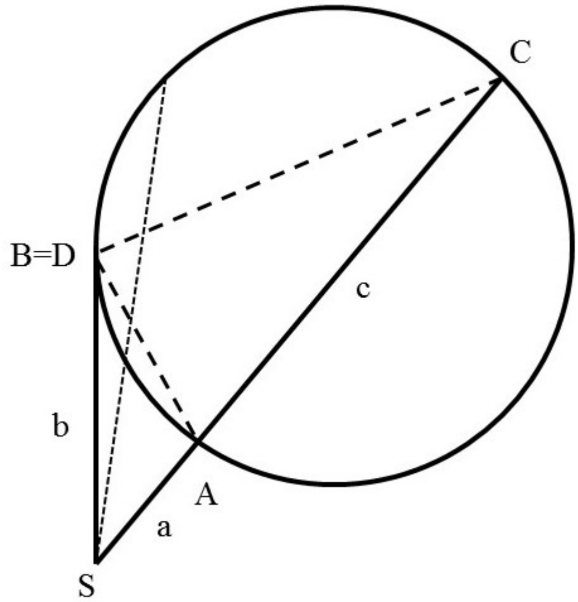


Sekanten-Satz. Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich.

Beweisskizze: Mit den Bezeichnungen wie in nebenstehender Abbildung ist zu beweisen, dass $a \cdot (a+c) = b \cdot (b+d)$ gilt.

Wie beim Sehnen-Satz beweisen wir die Ähnlichkeit der Dreiecke SCB und SAD. Während die Winkelgleichheit von $\angle BCA$ und $\angle BDA$ als Peripheriewinkel über $\overline{AB}$ unmittelbar folgt, sind die Winkel $\angle SBC$ und $\angle DAS$ als Nebenwinkel von $\angle CBD$ bzw. $\angle CAD$ (Peripheriewinkel über $\overline{CD}$) gleich groß. Also gilt die Verhältnisgleichung $a : (b + d) = b : (a + c)$, woraus die Behauptung folgt. ❑

Sekanten-Tangenten-Satz
(auch Sehnen-Tangenten-Satz[10] genannt)
Jede Tangente von einem Punkt an einem Kreis ist mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekanten-Abschnitten.



Beweisskizze: Um die geforderte Gleichung $b^2 = a \cdot (a + c)$ zu beweisen, genügt es anschaulich, im obigen Sekanten-Satz die Sekante $\overline{BD}$ so (nach links) zu verschieben, dass die Punkte B und D zusammenfallen und $b + d$ zu b wird. Um jedoch den Beweis vollständig zu führen, ist lediglich der Nachweis zu erbringen, dass die Dreiecke SAB und SCB ähnlich sind. Dann kann wie oben $a : b = b : (a + c)$ geschlossen werden. ❑

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabenbezug
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[10] Dieser Satz ist wesentliches Element der Lösungshinweise zu Aufgabe MO600946.
[11] Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.