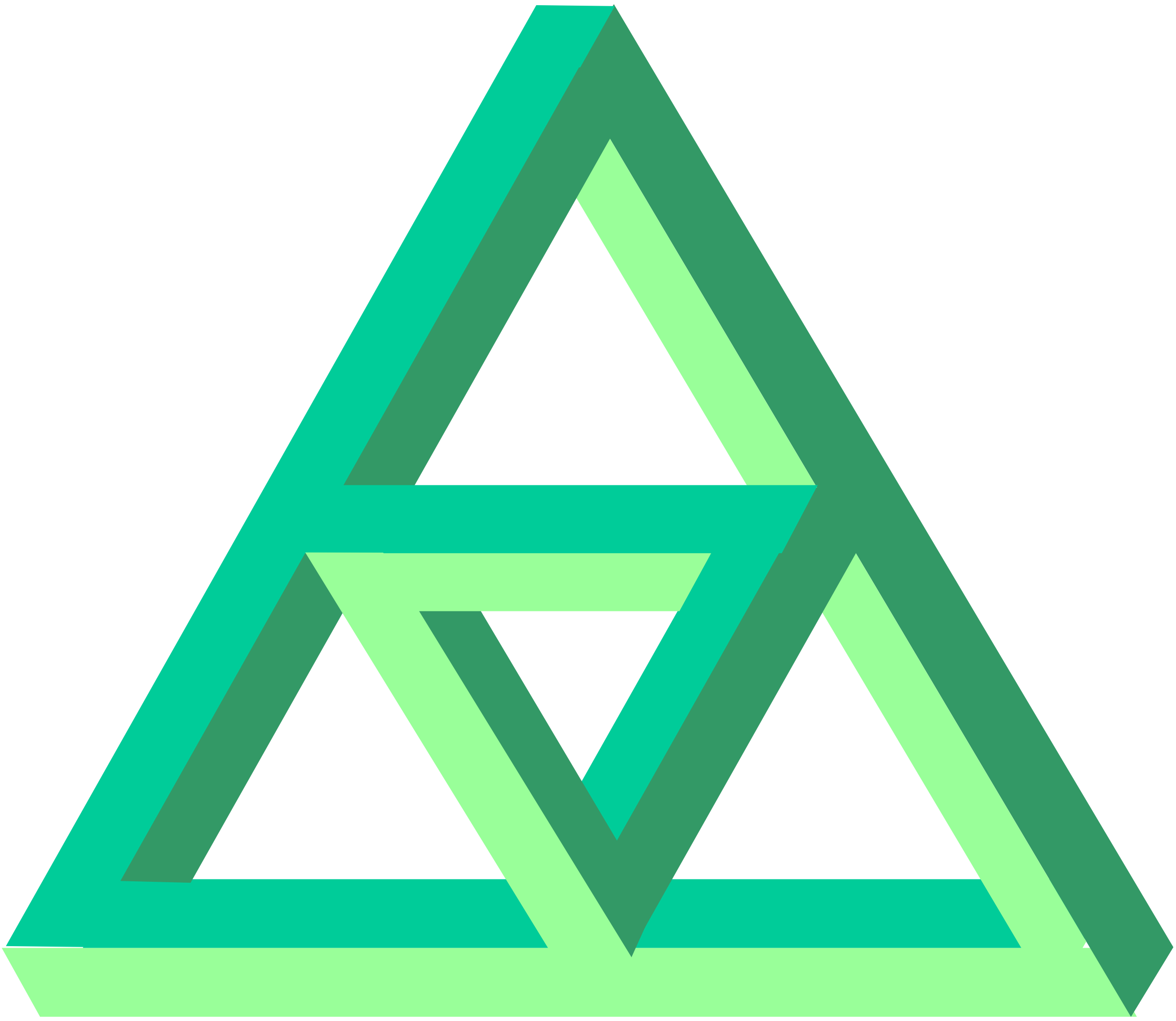
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2022 (Juni 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Es war vorgesehen, die bislang diskutierten Themen fortzuschreiben, wenn sich im Wettbewerbsverlauf entsprechende Aufgaben thematisch wiederholen. In diesem Heft blicken wir deshalb mit Bezug zur Aufgabe **MO610945** auf das Thema 06 – „Einbeschriebene Figuren und Körper“ zurück und diskutieren Aufgaben, in denen diesmal Kreise in Figuren einzubeschreiben sind. Diese Aufgaben motivieren, die Packungsdichten von kongruenten Kreisen in einem Einheitsquadrat zu untersuchen.

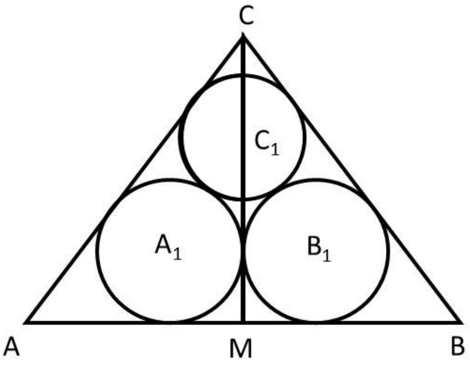
Ein Auszug aus einem Lehrbuch zur Geometrie aus dem 18. Jahrhundert zeigt, wie das Einbeschreiben eines Kreises in reguläre Vielecke gelehrt wurde.

Ergänzend werden Summen und Produkte mit vielen Gliedern betrachtet, deren Berechnung durch Kürzen benachbarter Glieder vereinfacht werden können.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 06 - Einbeschriebene Kreise (III)

Aufgabe 06.09 – MO610945[3]. Gegeben ist ein Dreieck ABC, in dem drei Kreise k_A, k_B und k_C so liegen, dass sie sich paarweise von außen und jeweils zwei der drei Seiten des Dreiecks berühren wie in der Abbildung dargestellt. Es ist bekannt, dass für jedes Dreieck ABC solche Kreise k_A, k_B und k_C existieren und eindeutig bestimmt sind.



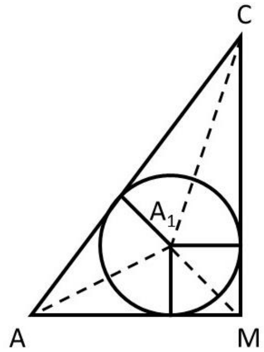
Berechnen Sie die Radien der drei Kreise, wenn $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = 5$ cm und $|\overline{AB}| = 6$ cm gilt.

Lösungshinweise: Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sei M. Die drei Kreise k_A, k_B und k_C mögen die Mittelpunkte A_1, B_1 bzw. C_1 und die Radien r_A, r_B bzw. r_C haben. In der Lösung werden alle Längen in der Einheit cm und alle Flächen in der Einheit cm^2 verstanden[4]. Diese Einheiten werden in der Lösungsdarstellung weggelassen.

Da Tangentenabschnitte an einen Kreis gleich lang sind, liegen die Mittelpunkte A_1, B_1 bzw. C_1 auf den Winkelhalbierenden der Winkel bei A, B bzw. C des Dreiecks ABC.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist und damit die Winkelhalbierende durch C zugleich Symmetrieachse ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung für die Kreise, dass $r_A = r_B$ gilt und die Gerade CM gemeinsame Tangente von k_A und k_B ist.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind die Dreiecke AMC und MBC kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen $|\overline{AM}| = |\overline{MB}| = 3$, $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = 5$, $|\overline{MC}| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ und den Inkreisen k_A bzw. k_B. Wir betrachten im Folgenden nur das Dreieck AMC und berechnen zunächst r_A als Inkreisradius in diesem rechtwinkligen Dreieck.



Zerlegen wir das Dreieck AMC in die drei Dreiecke AMA_1, MCA_1 und CAA_1 (für die der Radius r_A des Kreises um A_1 jeweils der Höhe dieser Dreiecke entspricht), so folgt

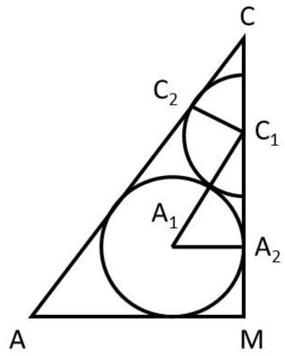
[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formulier, s. www.mathematik-olympiaden.de

[4] Ein solcher Hinweis sollte zu Beginn der Lösungsdarstellung gegeben werden, um Missverständnisse zu vermeiden.

aus dem Flächenvergleich des gesamten Dreiecks und der Summe dieser drei Teildreiecke:

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot|\overline{AM}|\cdot|\overline{MC}|=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(|\overline{AM}|+|\overline{MC}|+|\overline{CA}|)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(3+4+5)$$

der Wert $r_A=1$.



Das rechtwinklige Dreieck CC_2C_1 ist ähnlich dem Dreieck AMC (weil die Winkelgrößen übereinstimmen). Folglich finden wir mit der abkürzenden Schreibweise $|\overline{C_2C_1}|=r_c$

$$\frac{|\overline{CC_1}|}{r_c}=\frac{|\overline{CA}|}{|\overline{AM}|}=\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad|\overline{CC_1}|=\frac{5}{3}\cdot r_c$$

Im rechtwinkligen Dreieck $A_1A_2C_1$ gilt $|\overline{A_1C_1}|=r_A+r_C=1+r_C$. Mit dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck $A_1A_2C_1$ mit dem rechten Winkel bei A_2 folgt

$$|\overline{A_1C_1}|^2=(1+r_c)^2=|\overline{A_1A_2}|^2+|\overline{A_2C_1}|^2=1+\left(4-1-\frac{5}{3}\cdot r_c\right)^2$$

Die daraus folgende Gleichung $\frac{16}{9}\cdot r_c^2-12\cdot r_c+9=0$ lösen wir mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf und erhalten $r_c=\frac{8}{9}\cdot\left(3\pm\sqrt{5}\right)$.

Die Lösung mit positivem Rechenzeichen innerhalb der Klammer ist offensichtlich größer als $|\overline{AM}|=3$ und korrespondiert daher zu einem Kreis, dessen Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks AMC liegt. Daher ist die Lösung mit negativem Rechenzeichen der gesuchte Wert. Wir erhalten als Ergebnis, dass die drei Kreise die Radien $r_A=r_B=1$ cm und $r_c=\frac{8}{9}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)\approx 0.86$ cm[5] haben. ❑

Hinweis: Für den Inkreisradius r eines rechtwinkligen Dreiecks gilt der Zusammenhang $r=2\cdot A/U$ mit Flächeninhalt A und Umfang U. Im konkreten Fall der Aufgabenstellung erhalten wir unmittelbar

$$r_A=\frac{2\cdot\frac{3\cdot 4}{2}}{3+4+5}=1$$

[5] Sind in der Aufgabenstellung konkrete Maßzahlen angegeben, ist eine Antwort (zumindest in Lösungsdarstellungen von Hausaufgaben oder wenn die Berechnung ohne rechentechnische Hilfsmittel möglich ist) in der zugehörigen Maßeinheit günstig.

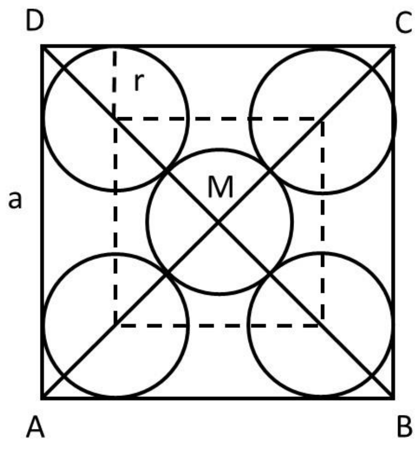
Entsprechend der einleitenden Hinweise auf jedem Aufgabenblatt zur MO sind *„zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann“.* Da die Formel keinen eigenen Namen hat, kann es im Ermessen der Korrektoren oder Jury liegen, ob der Zusammenhang ohne Beweis verwendet werden darf. Es ist deshalb ratsam, zumindest die Beweisidee anzugeben, etwa „… es gilt …, wie wir aus … herleiten können.“

Aufgaben mit einbeschriebenen Kreisen waren zu Beginn der Mathematik-Olympiaden häufig zu finden.

Aufgabe 06.10 – MO031014. In einem Quadrat der Seitenlänge a sollen fünf kongruente Kreise, von denen keine zwei zusammenfallen, so gezeichnet werden, dass einer der Kreise den Mittelpunkt des Quadrates als Mittelpunkt hat und jeder der vier übrigen Kreise sowohl diesen Kreis als auch je zwei benachbarte Quadratseiten berührt.

a) Berechnen Sie den Radius dieser Kreise.
b) Beschreiben Sie eine Konstruktion dieser fünf Kreise, bei der nur Zirkel und Lineal verwendet wird.

Lösungshinweise: a) Wenn sich zwei der fünf Kreise berühren, so müssen sie außerhalb voneinander liegen, da sie gleichlange Radien haben und nicht zusammenfallen. Berührt ein Kreis zwei benachbarte Quadratseiten, so liegt sein Mittelpunkt auf der Diagonalen, die von der gemeinsamen Ecke dieser Seite ausgeht, da er von beiden Seiten gleichen Abstand hat.



Die vier Mittelpunkte Kreise, die Quadratseiten berühren (im Weiteren „Eck-Kreise“ genannt) bilden ebenfalls ein Quadrat, und zwar mit der Seitenlänge $a - 2r$. Die Diagonale dieses Quadrates besitzt die Länge $4 \cdot r$. Weil die Diagonalenlänge eines Quadrates das $\sqrt{2}$-fache der Seitenlänge ist, erhalten wir die Gleichung

$$(a - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot r$$

Daraus erhalten wir nach Umformung $r = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.207 \cdot a$.

Lösungshinweise b) Den Mittelpunkt M des mittleren Kreises erhalten wir als Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates. Den Berührungspunkt E des mittleren Kreises mit dem Eck-Kreis beim Punkt A finden wir als Schnittpunkt der Diagonalen AC und des Kreises um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, denn

$$[\overline{AM}] - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = r.$$

Mit dem Doppelten dieses Radius können wir ausgehend von M auf den Diagonalen die Mittelpunkte der anderen vier Kreise markieren. ❑

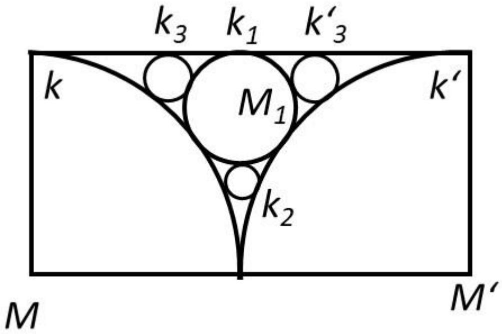
Ergänzung: Stimmt der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Mittelpunkt des Quadrates (Schnittpunkt der Diagonalen) überein, so kann der Radius dieses Kreises (im Weiteren „Mittel-Kreis" genannt) auch anders als die vier kongruenten Eck-Kreise gewählt werden. Der maximale Radius des Mittel-Kreises beträgt $\frac{a}{2}$, wenn der Mittelkreis alle vier Seiten des Quadrates berührt. Mit ähnlicher Argumentation wie oben finden wir dafür die Gleichung

$$(a - 2 \cdot r) \cdot \sqrt{2} = a + 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \approx 0.086 \cdot a.$$

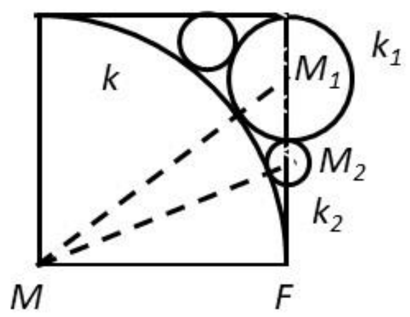
Sind dagegen die Eck-Kreise maximal, betragen deren Radien $\frac{a}{4}$. Den Radius r des zugehörigen Mittel-Kreises können wir in ähnlicher Weise berechnen:

$$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{2} + 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{4} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.104 \cdot a.$$

Aufgabe 06.11 – MO061013. In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornamentes treten als Grundformen Kreise und Kreisbögen auf, die einander in der aus dem Bild ersichtlichen Weise berühren. Es sollen die Radien r_1, r_2 und r_3 der Kreise k_1, k_2 bzw. k_3 und k_3' in Abhängigkeit vom Radius r von k und k' berechnet werden.



Lösungshinweise: Wir fällen das Lot vom Mittelpunkt M_1 auf die Gerade durch M und M' und bezeichnen den Fußpunkt mit F. Dann ist das Dreieck MFM_1 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt F. Für die Seitenlängen gilt:



$$|\overline{MM_1}| = r + r_1 \;;\quad |\overline{MF}| = r \;;\quad |\overline{M_1F}| = r - r_1$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MFM_1 mit der Hypotenuse $\overline{MM_1}$ und den Katheten $\overline{MF}$ und $\overline{M_1F}$:

$$(r + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2$$

Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach r_1 finden wir $r_1 = \frac{r}{4}$.
Bezeichnen wir mit M_2 den Mittelpunkt des Kreises k_2 (der ebenfalls auf dem Lot $\overline{M_1F}$ liegt), so ist auch das Dreieck MFM_2 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt F. Für die Seitenlängen gilt:

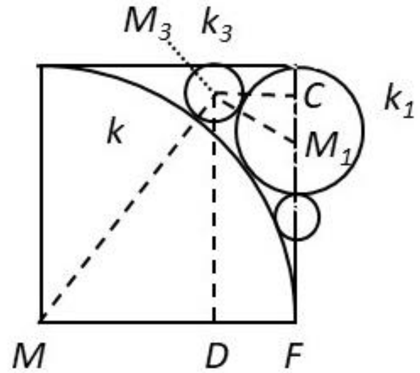
$$|\overline{MM_2}| = r + r_2 \;;\quad |\overline{MF}| = r \;;\quad |\overline{M_2F}| = r - 2 \cdot r_1 - r_2$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MFM_2 mit der Hypotenuse $\overline{MM_2}$ und den Katheten $\overline{MF}$ und $\overline{M_2F}$:

$$(r + r_2)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot r - r_2\right)^2$$

Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach r_2 finden wir $r_2 = \frac{r}{12}$.

Bezeichnen wir mit M_3 den Mittelpunkt des Kreises k_3 und fällen von M_3 das Lot auf $\overline{MF}$ mit dem Fußpunkt D, so ist auch das Dreieck MDM_3 rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt D. Für die Seitenlängen gilt:



$$|\overline{MM_3}| = r + r_3;\; |\overline{MD}| = x \;;\; |\overline{M_3D}| = r - r_3$$

Für die Länge der Strecke $\overline{MD}$ ermitteln wir im Hilfsdreieck M_3M_1C mit C als Fußpunkt des Lotes von M_3 auf die Verlängerung von $\overline{M_1F}$ über M_1 hinaus den Zusammenhang $|\overline{MD}| = r - \sqrt{r \cdot r_3}$.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt folglich im rechtwinkligen Dreieck MDM_3 mit der Hypotenuse $\overline{MM_3}$ und den Katheten $\overline{MD}$ und $\overline{M_3D}$:

$$(r + r_3)^2 = \left(r - \sqrt{r \cdot r_3}\right)^2 + (r - r_3)^2$$

Durch Ausmultiplizieren finden wir

$$r - 3 \cdot r_3 = 2 \cdot \sqrt{r \cdot r_3}$$

Wir quadrieren beide Seiten und erhalten die quadratische Gleichung

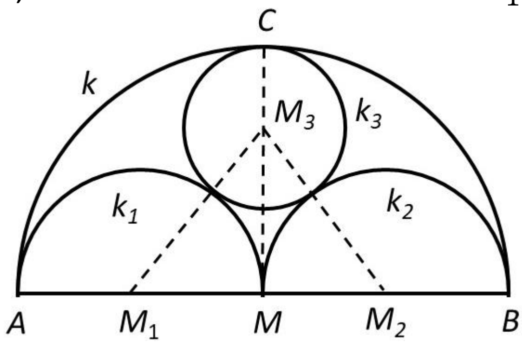
$$r^2 - 10 \cdot r \cdot r_3 + 9 \cdot r_3^2 = 0$$

Aufgelöst nach r_3 mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen führt dies zu

$$r_{3.1,2} = \frac{5}{9} \cdot r \pm \sqrt{\frac{(25 \cdot r^2 - 9 \cdot r^2)}{81}} = \frac{5}{9} \cdot r \pm \frac{4}{9} \cdot r$$

Es ist also $r_{3.1} = r$ und $r_{3.2} = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ kann nur die zweite Lösung möglich sein und wir haben alle geforderten Radien gefunden. ❑

Aufgabe 06.12 – MO011132. Gegeben sei eine Strecke AB mit dem Mittelpunkt M, M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Strecken AM bzw. MB. Es werden ein Halbkreis k, der den Mittelpunkt M und den Radius AM hat, und zwei weitere Halbkreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $\frac{1}{2} \cdot |\overline{AM}|$ gezeichnet, die in derselben von der Geraden g_{AB} begrenzten Halbebene wie k liegen. Der Kreis k_3 berühre den Halbkreis k von innen und jeden der beiden Halbkreise k_1 und k_2 von außen (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie die Lage des Mittelpunktes M_3 von k_3.

Lösungshinweise: Aus Symmetriegründen liegt M_3 auf der Mittelsenkrechten $\overline{MC}$. Wir bezeichnen mit x die Länge des Radius des Kreises k_3. Aufgrund der sich berührenden Kreise k_1, k_2 und k_3 gilt:

$$|\overline{M_1M_3}| = |\overline{M_2M_3}| = \frac{|\overline{AM}|}{2} + x$$

Ist r die Länge des Radius des Kreises k, so gilt auch $|\overline{MM_3}| = r - x$. Somit finden wir mittels Satz von PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck M_1MM_3 mit der Hypotenuse $\overline{M_1M_3}$ und den Katheten $\overline{M_1M}$ und $\overline{MM_3}$ die Gleichung

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2 = \left(\frac{r}{2} + x\right)^2$$

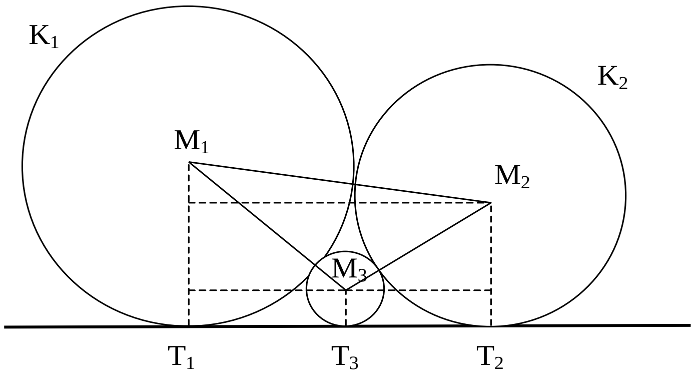
Durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach x erhalten wir (wegen $r \neq 0$) das Ergebnis $x = \frac{1}{3} \cdot r$. Also liegt M_3 auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ im Abstand von $\frac{2}{3} \cdot r$ über M.

Aufgabe 06.13. Gegeben seien drei Kreise k_1, k_2 und k_3 mit den Radien $r_3 < r_2 \leq r_1$, für die eine Gerade g die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Man beweise:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$

Lösungshinweise: Bezeichnen T_1, T_2 und T_3 die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente g (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\overline{T_2T_1}^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$$
$$\overline{T_2T_3}^2 + (r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$
$$\overline{T_1T_3}^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2$$



Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen finden wir

$$\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}, \overline{T_1T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_3}, \overline{T_2T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_2 r_3}.$$

Folglich gilt wegen $\overline{T_1T_3} + \overline{T_3T_2} = \overline{T_1T_2}$ die Gleichung $\sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_3 r_2} = \sqrt{r_1 r_2}$. Nach Division durch $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ❑

Hinweis: Die Gleichung kann als eine „Verwandte" des Satzes von PYTHAGORAS (im Sinne von $a^2 + b^2 = c^2$) betrachtet werden, wenn wir sie in folgender Form darstellen:

$$r_1^{-\frac{1}{2}} + r_2^{-\frac{1}{2}} = r_3^{-\frac{1}{2}}$$

In Analogie zu dieser Idee gilt mit c als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten p und q sowie mit h als der auf c stehenden Höhe:

$$p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} = (c + 2 \cdot h)^{\frac{1}{2}}$$

Ebenso gilt für die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks und für die auf der Hypotenuse stehenden Höhe h:

$$a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}$$

Packungsdichte von Kreisen im Einheitsquadrat

Die Ergänzung zur **Aufgabe 06.10** führt zum Begriff der Packungsdichte. Damit ist das Verhältnis der Summe der Kreisflächen zur umschreibenden Quadratfläche gemeint. Unter Packung verstehen wir, dass jeder Punkt des Quadrates (einschließlich seines Randes) in höchstens einem der Kreise (einschließlich ihrer Randpunkte) liegt. Dies entspricht der anschaulichen Vorstellung, Kreisscheiben in eine Quadratfläche so „einzupacken“, dass sich die Kreisscheiben nicht überlagern und möglichst wenig Platz übrig bleibt.

Im Folgenden betrachten wir ein Einheitsquadrat mit der Seitenlänge[6] 1. Bei dem in Aufgabe 06.10 untersuchten Fall mit fünf kongruenten Kreisen, jeweils mit Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$, beträgt die Packungsdichte

$$\rho = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{5}{4} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \pi \approx 0.673.$$

Wählen wir dagegen nur einen einbeschriebenen Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2}$, so beträgt die Packungsdichte

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

Bei vier kongruenten einbeschriebenen Kreisen (jeweils mit Radius $r = \frac{1}{4}$) kommen wir ebenfalls auf

$$\rho = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

Wir stellen fest, dass für alle Anordnungen von n^2 kongruenten einbeschriebenen Kreisen (mit den Radien $r = \frac{1}{2 \cdot n}$), angeordnet in einem Quadratgitter, die Packungsdichte konstant ist:

$$\rho = n^2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$

[6] Wir verzichten im Weiteren auf die Angabe von Längen- und Flächeneinheiten, da Missverständnisse ausgeschlossen werden können.

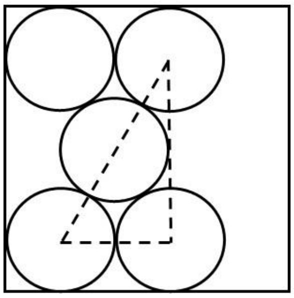
Offensichtlich ist die Packungsdichte bei den Beispielen zur Ergänzung der Aufgabe 06.10 mit maximalem bzw. minimalem Mittel-Kreis größer, da hier zu einem Kreis bzw. zu den vier Kreisen noch weitere Flächen hinzukommen:

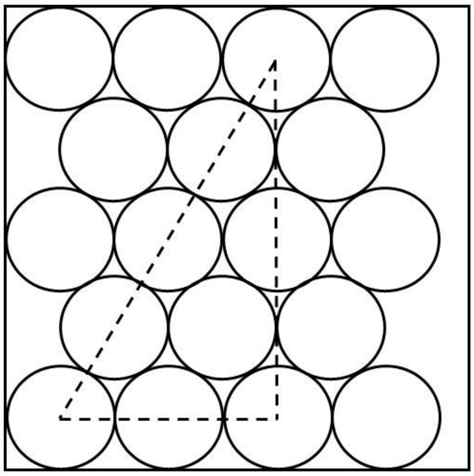
$$\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi + 4 \cdot \left(\frac{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \left(\frac{1}{4} + 17 - 12 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \pi \approx 0.878$$

bzw.

$$\rho = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{4}\right)^2 \cdot \pi = \frac{7 - 2 \cdot \sqrt{2}}{16} \cdot \pi \approx 0.819.$$

Füllen wir die bei diesen Konfigurationen noch nicht bedeckten Teilflächen mit weiteren kleinen Kreisflächen aus, können wir die Packungsdichte beliebig nahe an 1 bringen. Es erscheint deshalb sinnvoll, die größte Packungsdichte bei Verwendung kongruenter Kreise zu suchen. Dazu ordnen wir die Kreise wie in folgender Abbildung an.





Befinden sich in der obersten Reihe n Kreise (mit gerader Zahl $n \geq 2$) mit Radius r, so füllen wir mit weiteren n Reihen auf, bis wir insgesamt

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot n + \frac{n}{2} \cdot (n - 1) = n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$$

Kreise gezeichnet haben. Offenbar kann eine solche Anordnung das Quadrat nicht optimal ausfüllen. Das kleinste umschreibende Rechteck hat die Breite $2 \cdot n \cdot r$ und die Höhe $\sqrt{(2 \cdot n \cdot r)^2 - (n \cdot r)^2} + 2 \cdot r = r \cdot \left(n \cdot \sqrt{3} + 2\right)$.

Für $n = 2$ betragen bei einem Radius r für das kleinste umschreibende Rechteck die Breite $4 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(2\sqrt{3} + 2\right) \approx 5.464 \cdot r$. Wir können deshalb

$r = \frac{1}{2\sqrt{3}+2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$ wählen und finden als Packungsdichte für diese Konfiguration:

$$\rho = 5 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{5}{8} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \pi \approx 0.526$$

Für $n = 4$ betragen bei einem Radius r für das kleinste umschreibende Rechteck die Breite $8 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(4\sqrt{3} + 2\right) \approx 8.928 \cdot r$. Wir wählen deshalb $r = \frac{1}{4\sqrt{3}+2} = \frac{1}{22} \cdot \left(2\sqrt{3} - 1\right)$ wählen und finden als Packungsdichte für diese Konfiguration:

$$\rho = 18 \cdot \left(\frac{1}{22} \cdot \left(2\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 \cdot \pi = \frac{9}{242} \cdot \left(13 - 4 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \pi \approx 0.709$$

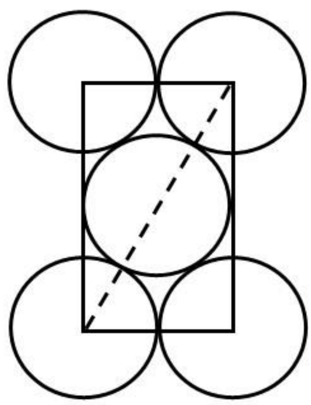
Gibt es eine Zahl n, sodass die Breite und Höhe des kleinsten umschreibenden Rechtecks fast übereinstimmen, könnte die Packungsdichte besonders groß sein. Tatsächlich finden wir für $n = 8$ die Breite $16 \cdot r$ und die Höhe $r \cdot \left(8\sqrt{3} + 2\right) \approx 15.856 \cdot r$, d.h. die Höhe ist in diesem Fall geringfügig kleiner als die Breite. Wir können also als Radius $r = \frac{1}{16}$ wählen und erhalten als Packungsdichte

$$\rho = 68 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \pi = \frac{17}{64} \cdot \pi \approx 0.834$$

Vergrößern wir die Anzahl der Kreise in der oberen Reihe, entsteht unten ein nicht bedeckter Streifen. Deshalb vermuten wir, dass die Packungsdichte zunächst nicht weiter steigt. Tatsächlich finden wir für $n = 10$ mit den Radien $r = \frac{1}{20}$ die Packungsdichte

$$\rho = 105 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot \pi = \frac{21}{80} \cdot \pi \approx 0.825$$

Erst wenn zusätzlich eine weitere Reihe von Kreisen in das Einheitsquadrat passt, könnte die Packungsdicht wieder zunehmen. Um eine obere Schranke der Packungsdichte zu finden, bestimmen wir die Packungsdichte der Ebene, auf der Kreise in oben gewählter Konfiguration angeordnet sind. Dazu wählen wir einen Ausschnitt der bepackten Ebene aus, mit dem wir die gesamte Ebene füllen könnten, und ermitteln für diesen Ausschnitt die Packungsdichte: Durch Aneinanderfügen von den Rechtecken wie in nebenstehender Abbildung können wir die Anordnung der Kreise mit jeweils Radius r erzeugen.



Einerseits beträgt der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks $A_R = 2 \cdot \sqrt{12} \cdot r^2$. Andererseits umfasst so ein Rechteck die Fläche von zwei Kreisen mit der Gesamtfläche von $A_K = 2 \cdot r^2 \cdot \pi$. Somit finden wir für die Packungsdichte dieses Ausschnittes der Ebene:

$$\rho = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \pi}{2 \cdot \sqrt{12} \cdot r^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.907$$

Summen und Produkte – einfach kürzbar

Aufgabe 1. Es sei $S(n)$ die Summe der Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis n, also

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Man beweise: $S(2022) < 2$.

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $k > 1$ gilt

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{(k-1)\cdot k} > \frac{1}{k^2}$$

Folglich können wir die Summe $S(n)$ wir folgt abschätzen:

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Nun teilen wir den Ausdruck unterm Summenzeichen auf:

$$S(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Durch die Verschiebung des Index erkennen wir, dass sich fast alle Summanden aufheben:

$$S(n) = 1 + \left(\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Somit ist die Behauptung für alle $n > 1$ und folglich auch für $n = 2022$ richtig. ❑

Hinweis: Die Verwendung des Summenzeichens ist prinzipiell nicht erforderlich, wenn die Summendarstellung mit den Pünktchen „$+\cdots+$“ eindeutig erklärt ist oder Missverständnisse nicht zu erwarten sind. So erfordert beispielsweise der Ausdruck $S = 1 + 2 + \cdots + 16$ die Erläuterung „S ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16“, um eine Verwechslung mit „Summe der Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^4“ auszuschließen. Dagegen würde die Schreibweise $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 16$ vermutlich richtig als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 16 interpretiert werden. Dennoch wäre die verbale Beschreibung für S hilfreich.

Aufgabe 2 – MO371045. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$$

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ gilt offenbar

$$\frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} < \frac{2}{2 \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}$$

Erweitern wir den Bruch links mit $\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ und den Bruch rechts mit $\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$, so erhalten wir die Ungleichung

$$2 \cdot \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2 \cdot \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right).$$

Führen wir nun die Summenbildung von $k = 2$ bis $k = 1000000$ aus, so heben sich auf beiden Seiten benachbarte Glieder auf und die Summen reduzieren sich auf

$$2 \cdot \sqrt{1000001} - 2 \cdot \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2 \cdot \sqrt{1000000} - 2 \cdot \sqrt{1}$$

Um dies ausführlich zu zeigen, genügt es, die Summation anzudeuten, indem wir für $k = 2, 3, 4$ und $k = 1000000$ die dazugehörigen Ungleichungen angeben:

$$2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{1}$$
$$2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$2 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{3}$$
$$\ldots$$
$$2 \cdot \sqrt{1000001} - 2 \cdot \sqrt{1000000} < \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 2 \cdot \sqrt{1000000} - 2 \cdot \sqrt{999999}$$

Damit wird ersichtlich, was wir mit „Aufheben benachbarter Glieder“ meinen. Mit Verwendung der Summensymbole können wir die Darstellung formalisieren:

$$\sum_{k=2}^{n} 2\cdot\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{n} 2\cdot\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

gleichbedeutend mit

$$2\cdot\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k+1}-2\cdot\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\cdot\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}-2\cdot\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k-1}$$

Durch eine Indexverschiebung im ersten Summenzeichen der linken Seite bzw. im zweiten Summenzeichen der rechten Seite und anschließender Abtrennung der „Randsummanden“ finden wir das Ergebnis der Summation:

$$\begin{aligned}2\cdot\sqrt{n+1}+2\cdot\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-2\cdot\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-2\cdot\sqrt{2}&\\ < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\cdot\sqrt{n}+2\cdot\sum_{k=2}^{n-1}\sqrt{k}-2\cdot\sum_{k=2}^{n-1}\sqrt{k}-2\cdot\sqrt{1}&\end{aligned}$$

Diese Übung im Umgang mit dem Summenzeichen vereinfacht aber wohl nicht die Lösungsdarstellung!

Während wir die rechte Seite exakt mit $2\cdot(1000-1)=1998$ bestimmen können, benötigen wir für die linke Seite eine Abschätzung, die ohne rechentechnische Hilfsmittel nachvollziehbar ist:

$$2\cdot\sqrt{1000001}-2\cdot\sqrt{2} > 2\cdot\sqrt{1000000}-2\cdot 1.5 = 1997.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$1998 < 1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\tfrac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999$$ ❑

Aufgabe 3 – MO301024. Für jede ganze Zahl $n>0$ sei

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}+n\cdot\sqrt{n+1}}$$

Mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1989} + a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0.5 < s < 1$ folgt!

Lösungshinweise: Wir formen den Ausdruck für a_n um, indem wir den Bruch mit $(n+1) \cdot \sqrt{n} - n \cdot \sqrt{n+1}$ erweitern:

$$a_n = \frac{(n+1) \cdot \sqrt{n} - n \cdot \sqrt{n+1}}{(n+1)^2 \cdot n - n^2 \cdot (n+1)} = \frac{(n+1) \cdot \sqrt{n} - n \cdot \sqrt{n+1}}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Bilden wir nun die Summe s, so heben sich bis auf die „Randsummanden“ benachbarte Summanden auf und wir erhalten

$$s = 1 - \frac{1}{\sqrt{1991}}$$

Es gilt $s < 1$. Wegen $\frac{1}{\sqrt{1991}} < \frac{1}{\sqrt{1600}} = \frac{1}{40}$ gilt auch $s > 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40} > 0.5$.

Hinweis: Die linke Ungleichung $0.5 < s$ können wir natürlich auch durch Berechnen der ersten Glieder beweisen. Wir finden beispielsweise

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1} + 1 \cdot \sqrt{2}} > \frac{1}{2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{7}$$
$$a_2 = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3}} > \frac{1}{3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 2} = \frac{2}{17}$$
$$a_3 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{4}} > \frac{1}{4 \cdot 2 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{14}$$
$$a_4 = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{4} + 4 \cdot \sqrt{5}} > \frac{1}{5 \cdot 2 + 4 \cdot 2.5} = \frac{1}{16}$$

d.h.

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{17} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 17 + 2 \cdot 7 \cdot 16 + 8 \cdot 17 + 7 \cdot 17}{7 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{544 + 224 + 136 + 119}{1904} = \frac{1023}{1904} > 0.5.$$

❑

Aufgabe 4 – MO091132. Man beweise, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2499}{2500}$$

kleiner als 0.02 ist.

Lösungshinweise: Wir betrachten ein zweites Produkt q,

$$q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2498}{2499}$$

Wir können durch äquivalentes Umformen nachweisen, dass für alle positiven ganzen Zahlen $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n} < \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n + 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (2 \cdot n - 1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 4 \cdot n^2 - 1 < 4 \cdot n^2$$

gilt. Deshalb gilt für das Produkt $p \cdot q$ die Ungleichung

$$p^2 < p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2497}{2498} \cdot \frac{2498}{2499} \cdot \frac{2499}{2500} = \frac{1}{2500}$$

Wie behauptet finden wir also $p = \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0.02$. ❑

Lösungsvariante: Aus der Definition von p erhalten wir auch

$$p^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2}$$

Dann gilt aber

$$p^2 < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2499^2}{2500^2 - 1^2} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2499 \cdot 2499}{2499 \cdot 2501}$$

Kürzen wir die Faktoren, so bleibt $p^2 = \frac{1}{2501}$ übrig, woraus wir wie oben die Behauptung bestätigen können.

Aufgabe 5. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2020}{2021} < 0.2022^2$$

Lösungshinweise: Wir bezeichnen das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit x und definieren ein weiteres Produkt y in ähnlicher Weise:

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2021}{2022}$$

Es ist offenbar $x < y$, denn für jede positive ganze Zahl k gilt

$$\frac{2 \cdot k - 2}{2 \cdot k - 1} < \frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot k} \quad \Leftrightarrow \quad (2 \cdot k - 2) \cdot 2 \cdot k = 4 \cdot k^2 - 4 \cdot k < (2 \cdot k - 1)^2$$

Also finden wir $x^2 < x \cdot y = \frac{2}{2022}$. Daraus können wir x ohne Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln abschätzen:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2022}} = \frac{1}{\sqrt{1011}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < \frac{1}{25} = 0.04 = 0.2^2 < 0.2022^2 \qquad \square$$

Bemerkung: Mit einem Taschenrechner finden wir $\sqrt{\frac{2}{2022}} \approx 0.0315$, woraus wir $x < 0.1774^2$ vermuten können. Das Spiel mit der Jahreszahl zielt offensichtlich nur darauf ab, die Abschätzung nachvollziehbar darzustellen. Auch folgende Abschätzung würde akzeptiert werden:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2022}} = \sqrt{\frac{10}{10110}} < \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10000}} < \frac{\sqrt{10.24}}{100} = \frac{3.2}{100} = 0.032 < 0.0324 = 0.18^2$$

Die rechte Seite der Ungleichung könnte also auch kleiner vorgegeben werden.

Aufgabe 6. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2021}{2022} < \frac{1}{55}$$

Lösungshinweise: Wie in obiger Aufgabe könnten wir den Ansatz wählen, zum Produkt x in der linken Seite der Ungleichung ein passendes Produkt y zu bilden:

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2022}{2023}$$

Dann folgern wir daraus $x^2 < x \cdot y = \frac{1}{2023}$. Aber wegen

$$\frac{1}{\sqrt{2023}} > \frac{1}{\sqrt{2048}} = \frac{\sqrt{2}}{64} > \frac{1.4}{70} = \frac{1}{50} > \frac{1}{55}$$

können wir auf diese Weise nicht die Behauptung beweisen. Jedoch finden wir für alle $k \geq 2$ die Abschätzung

$$\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}<\frac{\sqrt{3\cdot k-2}}{\sqrt{3\cdot k+1}},$$

die wir durch äquivalentes Umformen bestätigen können. Damit folgern wir für jede ganze Zahl $k\geq 2$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}<\frac{1}{\sqrt{3\cdot k+1}}$$

Speziell für $k=1011$ führt dies zu $x<\frac{1}{\sqrt{3034}}<\frac{1}{\sqrt{3025}}=\frac{1}{55}$. ❑

Aufgabe 7[7]. Sei $n>1$ eine natürliche Zahl. Man beweise

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)}<\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$$

Lösungshinweise: Setzen wir wieder

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-1}{2\cdot n}$$

und

$$q=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}$$

so finden wir

$$p^2<p\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-1}{2\cdot n}\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}=\frac{1}{2\cdot n+1}<\frac{1}{2\cdot n}$$

Ziehen wir sowohl für die linke Seite als auch für die rechte Seite die Quadratwurzel, so erhalten wir wie behauptet $p<\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$.

Setzen wir dagegen

$$q'=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot n-2}{2\cdot n-1}$$

so gilt die Abschätzung

[7] Aufgabe 2020-56, $\sqrt{WURZEL}$ 7/2021, S. 162.

$$p^2 > p \cdot q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot n - 2}{2 \cdot n - 1} \cdot \frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n} = \frac{1}{4 \cdot n} = \frac{1}{\left(2 \cdot \sqrt{n}\right)^2}$$

und wir finden $p > \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n}}$. ❑

Aufgabe 8. Es sei $T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$. Zeigen Sie

$$T(2) \cdot T(3) \cdot T(4) \cdot \ldots \cdot T(100) > \frac{2}{3}$$

Lösungshinweise: Wir setzen $a_n = n - 1$, $b_n = n^2 + n + 1$, $c_n = n + 1$ und $d_n = n^2 - n + 1$. Dann gilt für jedes $n = 2, 3, \ldots, 100$

$$T(n) = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{(n-1) \cdot (n^2 + n + 1)}{(n+1) \cdot (n^2 - n + 1)} = \frac{a_n \cdot b_n}{c_n \cdot d_n}$$

Nun erkennen wir aber die Rekursionen $a_{n+2} = (n + 2) - 1 = n + 1 = c_n$ sowie $d_{n+1} = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1 = b_n$. Multiplizieren wir also wie gefordert die 99 Brüche, so können wir a_4 mit c_2, a_5 mit c_3, …, a_{100} mit c_{98} kürzen, aber auch d_3 mit b_2, d_4 mit b_3, …, d_{100} mit b_{99}. Es verbleiben im Produkt der Brüche

$$T(2) \cdot T(3) \cdot \ldots \cdot T(100) = \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot b_{100}}{c_{99} \cdot c_{100} \cdot d_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10101}{100 \cdot 101 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 10101}{3 \cdot 10100} > \frac{2}{3}$$

❑

Wettbewerbe: Bundesrunde der 61. Mathematik-Olympiade

Endlich wieder als Präsenzveranstaltung: Die Bundesrunde der 61. Mathematik-Olympiade fand vom 15. bis 18. Mai 2022 in Magdeburg statt. Der Verein eLeMeNTe e.V. (www.elemente.org) organisierte den Wettbewerb und gestaltete nach zwei Pandemie-bedingten digitalen Runden das erlebnisreiche Treffen für die rund 200 Teilnehmenden. Der Ministerpräsident von Sachsen-Anhalt, Dr. Reiner Haseloff, übernahm die Schirmherrschaft. Unter www.mo2022.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Am Sonntag, dem Anreisetag, fand der Begrüßungsabend im Jahrtausendturm statt. Die beiden Klausuren wurden im Werner-von-Siemens-Gymnasium geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Magdeburg. Die

Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand in der Johanniskirche statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie 5 Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen und 4 ukrainische Gastschüler an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 78 Preise vergeben. Dies entspricht einem Anteil von mehr als 40 aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 25 Anerkennungsurkunden[8]. Die sächsische Mannschaft konnte wieder in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erobern. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[9] belegte sie mit 22 Punkten den 4. Platz. Bayern führt mit 38 Wertungspunkten die Länderliste souverän an, gefolgt von Niedersachsen (31 Wertungspunkte) und Nordrhein-Westfalen (27 Wertungspunkte). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II und III. Preise bedeuten für Sachsen ein I. Preis und je drei II. und III. Preise den Platz 5 (insgesamt 7 Preise). Auch hier führen Bayern (drei I. Preise, insgesamt 12 Preise), Thüringen (zwei I. Preise, insgesamt zwei Preise), Niedersachsen (ein I. Preis, insgesamt 11 Preise) und Nordrhein-Westfalen (ein I. Preis, insgesamt 10 Preise).

Den sächsischen Preisträgern unseren ***herzlicher Glückwunsch*****!**

I. Preis	Oliver Eckstädt (Kl. 8, Nexö-Gymn. Dresden)
II. Preise	Jieoh Ahn (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	Melia Haase (Kl. 10, Gymn. Zschopau)
	Tim Thieme (Kl. 10, Kepler-Gymn. Chemnitz)
III. Preise	Amos Vogel (Kl. 8, Lessing-Gymn. Hohenstein-Ernstthal)
	Tobias Pötzsch (Kl. 9, Scholl-Gymn. Taura)
	Karl Schomerus (Kl. 10, Ostwald-Gymn. Leipzig)
Anerkennung:	Lilia Dieterlein (Kl. 8, Freies Gymn. Naunhof)
	Robert Flugrat (Kl. 8, Gymn. Franziskaneum Meißen)
	Anton Nüske (Kl. 11, Nexö-Gymn. Dresden).

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis

[8] Die vollständige Liste ist unter www.mo2022.de verfügbar.
[9] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[10] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in die Vermittlung der Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum aktuellen Thema 06 dieses Heftes wurde der folgende Auszug gewählt. Dabei wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten. In Anlehnung an den Schrifttyp des Originals wird der Schrifttyp Bertholdr Mainzer Fraktur verwendet. Wie hier dargestellt wurden auch im Original für die Bezeichnungen von Punkten und Strecken bzw. Bögen ein geradliniger Schrifttyp eingesetzt.

Dr. Johann Nicolauſ Müller.

Anweiſung zur Geometrie für Anfänger.
Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

Capitel XXXVIII (S. 212 - 219)

In reguläre Figuren einen Kreis zu beſchreiben.

§. 154 I.

Bisher lernten wir geradlinichten Figuren in und um einen Kreis beſchreiben. Jetzt wollen wir auch lernen, wie ein Kreis in dieſelben gezeichnet werden kann.

Erſte Aufgabe. In einem gegebenen regulären oder irregulären Dreyeck a b c einen Kreis zu beſchreiben:

Mit einer beliebigen Dehnung des Zirkels machet auf den Puncten, a und c, die Bogen d e und f g:

Die Weite d e nehmet hernach in den Zirkel, und machet damit aus den Puncten, d und e, einwärts dem Dreyeck nach m zu, zween Bogen, die ſich in m ſchneiden:

Eben ſo machet mit unverrückter Dehnung des Zirkels, aus f und g, wieder einwärts dem Kreis nach n zu, zween andere Bogen, deren gemeinſchaftlicher Durchſchnitt bey n iſt:

Aus den Endpuncten a und c, ziehet hierauf durch die Durchſchnittspuncten, m und n, gerade Linien, die ſich, gehörig verlängert, in k ſchneiden:

Von dem Durchſchnittspunct k fället auf ac, das Loth oder Perpendikel kx, nach der Anweiſung, die wir in §. 42 gegeben haben:

[10] Johann Nicolaus Müller (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologe, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Jetzt setzet die eine Zirkelspitze in den Durchschnittspunct k, öffnet die andere bis in den Punct x, und beschreibet mit dem Halbmesser oder Radius kx, aus k, einen Kreis; so wird solcher nicht nur ganz innerhalb dem Dreyeck a b c liegen. Sondern er wird auch jede Seite des Dreyecks in einem Punct berühren.

Aus diesem ist sehr leicht einzusehen, wie innerhalb eines jeden Dreyecks a b c, ein Kreis beschreiben werden kann.

Bey den folgenden Aufgaben aber lernen wir nun einen Kreis in reguläre Figuren zeichnen.

Zweite Aufgabe. In ein Quadrat oder reguläres Viereck a b c d einen Kreis zu beschreiben: ...

§. 155. II.

Dritte Aufgabe. Einen Kreis in ein reguläres Fünfeck einzuzeichnen: ...

Vierte Aufgabe. Innerhalb einem regulären Sechseck einen Kreis so zu beschreiben, daß er jede Seite des Sechsecks berühret: ...

§. 156. III.

Fünfte Aufgabe. Einen Kreis in ein reguläres Siebeneck so zu zeichnen, daß jede Seite des Siebenecks davon berühret wird. ...

Sechste Aufgabe. Es wird ein reguläres Achteck abcdefgh gegeben, und man soll in demselben einen Kreis beschreiben, der jede Seite des Vielecks in einem Punct berühret: ...

§. 157. IV.

Siebente Aufgabe. In dem gegebenen regulären Neuneck abcdefghi einen Zirkel oder Kreis zu beschreiben, der jede Seite vom Neuneck in einem Punct berühret: Verfahret auf folgende Weise:

Nehmet zwo Seiten desselben, ab und ai, die den Polygon= oder Vieleckswinkel b a i einschliessen, und theilet sie bey den Puncten, p und q, nach §. 51 oder 52 in zwey gleiche Hälften oder Theile:

Aus den Theilungspuncten, p und q, ziehet nach den gerade gegenüberstehenden Winkelpuncten, e und f, die geraden Linien, pe und gf, die sich in einem Punct k schneiden werden:

Fasset hierauf die Weite oder Entfernung, kp oder kq, in den Zirkel, und beschreibet damit auf dem Durchschnittspunct k einen Kreis; dieser wird jede Seitenlinie oder Seite des Neunecks, nur in einem Punct berühren.

Achte Aufgabe. Es sey das reguläre Zehneck abcdefghil gegeben, und es soll darin ein Kreis so beschrieben werden, daß er jede Seite des Zehnecks nur berühret, aber nicht schneidet.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2021/22)

Ausgabe[11]	Nr.	Thema	Aufgabe
05/2022 (Jun. 2022)	Thema 06.3	Einbeschriebene Figuren (Kreise)	MO610945
04/2022 (Mai 2022)	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
03/2022 (Apr. 2022)	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
02/2022 (März 2022)	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
01/2022 (Jan. 2022)	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
11/2021 (Dez.2021)	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
09/2021 (Okt. 2021)	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
08/2021 (Sept. 2021)	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.