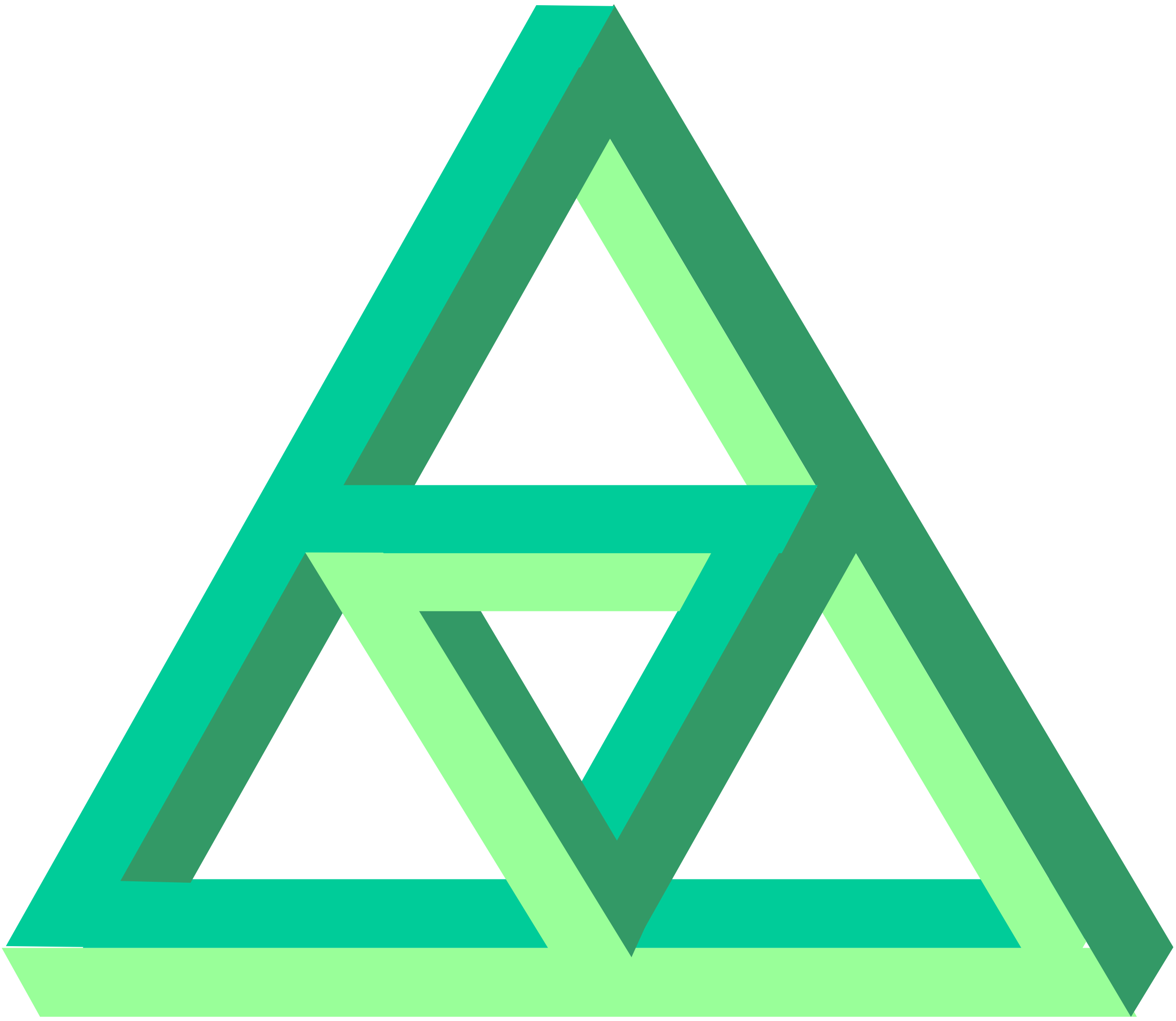
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Mai 2022

21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610933/MO611032** im Thema 15 Stammbrüche. Die damit verbundenen Zerlegungen eines Stammbruchs in Summen von Stammbrüchen erfordern Fertigkeiten im Umgang mit Gleichungen in natürlichen Zahlen.

Ein Auszug aus einem Buch zur Geschichte der Mathematik soll unterhaltsam die Bedeutung der Stammbrüche in der altägyptischen Mathematik vor über 3500 Jahren zeigen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 15 – Stammbrüche

In der diesjährigen Landesrunde der Mathematik-Olympiade wurden Brüche mit Zähler 1 und natürlichen Zahlen als Nenner betrachtet, die sogenannten ***Stammbrüche***.

Aufgabe 15.1 – MO610933

a) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ existieren, für die die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{31}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen a derart, dass für jede ganze Zahl $n \geq 2$ positive ganze Zahlen $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ existieren mit

$$\frac{a}{61} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Lösungshinweise – Teil a) Für $n = 2$ ergibt die Umformung

$$\frac{31}{61} = \frac{62}{2 \cdot 61} = \frac{61}{2 \cdot 61} + \frac{1}{2 \cdot 61} = \frac{1}{2} + \frac{1}{122}$$

eine Lösung $k_1 = 2, k_2 = 122$. Anstelle dieses trickreichen Ansatzes lassen sich die Nenner direkt ermitteln, indem wir die Ausgangsgleichung umformen zu

$$31 \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (k_1 + k_2) \Rightarrow k_1 = \frac{61 \cdot k_2}{31 \cdot k_2 - 61}$$

Wir spalten nun vom Bruch auf der rechten Seite eine ganze Zahl ab:

$$k_1 = \frac{62 \cdot k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61} - \frac{k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61} = 2 - \frac{k_2 - 122}{31 \cdot k_2 - 61}.$$

Da sowohl k_1 als auch k_2 ganze Zahlen größer als 1 sind, folgt unmittelbar aus dem verbleibenden Bruch $k_2 = 122$ und somit $k_1 = 2$ (bzw. $k_2 = 2$ und $k_1 = 122$).

Für $n > 2$ verwenden wir die Formel $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k \cdot (k+1)}$, deren Richtigkeit wir durch Zusammenfassen auf der rechten Seite leicht bestätigen können. Damit finden wir aus einer Darstellung mit n Summanden mit den Nennern $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_n$ eine geeignete Darstellung mit $n + 1$ Summanden und Nennern $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_{n+1} < k_n \cdot (k_n + 1)$.

Teil b) Es genügt, alle positiven ganzen Zahlen a zu bestimmen, für die ganze Zahlen k_1, k_2 mit $0 < k_1 < k_2$ existieren mit

$$a \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (k_1 + k_2).$$

Wie in Teil a) beschrieben, ergeben sich dann auch Lösungen für alle $n \geq 2$. Für $a \neq 0$ ergibt sich daraus die äquivalente Gleichung

$$a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = 61 \cdot (a \cdot k_1 + a \cdot k_2)$$

und

$$(a \cdot k_1 - 61) \cdot (a \cdot k_2 - 61) = 61^2.$$

Für ganze Zahlen $a > 0$ und $k_2 > k_1 > 0$ sind die beiden Faktoren $a \cdot k_1 - 61$ und $a \cdot k_2 - 61$ ganzzahlig mit $(a \cdot k_2 - 61) > (a \cdot k_1 - 61) > -61$. Vergleichen wir dies mit den ganzzahligen Faktorisierungen der Zahl 61^2, also mit

$$61^2 = 61^2 \cdot 1 = 61 \cdot 61 = (-1) \cdot (-61^2) = (-61) \cdot (-61),$$

so erhalten wir $a \cdot k_2 - 61 = 61^2$ und $a \cdot k_1 - 61 = 1$. Wegen $a \cdot k_1 = 62$ können wir für (a, k_1) nur die Lösungspaare $(1, 62)$, $(2,\ 31)$, $(31,\ 2)$ und $(62,\ 1)$ finden. Aus $ak_2 = 61 \cdot 62$ erhalten wir für (a, k_1, k_2) durch Einsetzen der bereits gefundenen Werte für a die Lösungstripel $(1, 62, 61 \cdot 62)$, $(2, 31, 61 \cdot 31)$, $(31, 2, 61 \cdot 2)$ und $(62, 1, 61)$.

Somit sind genau die Zahlen $a \in \{1,2,31,62\}$ Lösungen des Aufgabenteils b). ❑

Die Darstellung als Summe vieler Stammbrüche wurde bereits in einer früheren Aufgabe der MO untersucht.

Aufgabe 15.2 – MO330931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Stammbrüche[3] gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $p > 2$ kann der Stammbruch $\frac{1}{p}$ als Summe zweier Stammbrüche mittels $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p \cdot (p+1)}$ dargestellt werden, denn es gilt

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p \cdot (p+1)} = \frac{p}{p \cdot (p+1)} + \frac{1}{p \cdot (p+1)} = \frac{p+1}{p \cdot (p+1)} = \frac{1}{p}$$

❑

[3] Hinweis unter dem originalen Aufgabentext: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Diese Zerlegung eines Stammbruches in die Summe zweier Stammbrüche ist ein Spezialfall eines allgemeinen Verfahrens zur Auffindung solcher Summen. Es beruht auf der ***„gierigen Strategie“*** (greedy strategy), mit der immer zuerst der größte Teil eines gegebenen Problems bearbeitet wird. Im Fall der Zerlegung in Stammbrüche bedeutet es, zunächst den größtmöglichen Stammbruch zu finden, der vom Ausgangsbruch subtrahiert werden kann, um dann mit dem verbleibenden (Rest-) Bruch ebenso zu verfahren.

Es sei $\frac{a_0}{b_0}$ ein Bruch mit positiven ganzen Zahlen a_0 und b_0 mit dem größten gemeinsamen Teiler $ggT(a_0; b_0) = 1$ (d.h. der Bruch $\frac{a_0}{b_0}$ ist nicht kürzbar) und der Relation $b_0 > a_0 \geq 1$.

1. Wir suchen den größten Stammbruch $\frac{1}{n_0}$ mit $n_0 \cdot a_0 > b_0 \geq (n_0 - 1) \cdot a_0$. Gilt das Gleichheitszeichen, so ist b_0 ein ganzzahliges Vielfaches von a_0, was wegen $ggT(a_0; b_0) = 1$ nur für $a_0 = 1$ möglich ist.

2. Wir subtrahieren $\frac{1}{n_0}$ von $\frac{a_0}{b_0}$, die Differenz ergibt einen neuen Bruch $\frac{a_1}{b_1}$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{1}{n_0} = \frac{a_0 \cdot n_0 - b_0}{b_0 \cdot n_0}$$

3. Wir verfahren mit dem neuen Bruch $\frac{a_i}{b_i}$ wie mit dem Bruch $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$, beginnen wieder mit Schritte 1 und erhalten einen Bruch $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ $(i = 1,2, \dots)$.

   Aufgrund der Auswahl von n_{i-1} gilt stets $a_{i-1} \geq (a_{i-1} \cdot n_{i-1}) - b_{i-1} = a_i$, d.h. die Zähler der erzeugten Brüche nehmen entweder kontinuierlich ab oder es ist ein Stammbruch erreicht. Das Verfahren bricht also nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab.

4. Wir können das Verfahren beenden, wenn sich in Schritt 2 ein Stammbruch ergibt. Wir können aber auch das Verfahren fortsetzen, bis wir eine bestimmte Anzahl von Stammbrüchen erhalten. Die Darstellung der rationalen Zahl ergibt sich dann als Summe der ermittelten Stammbrüche:

$$\frac{a_0}{b_0} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n_i}$$

Beispiel 1: Es sei $a_0 = 31, b_0 = 61$. Wir wählen $n_0 = 2$. Damit ist die Abschätzung $2 \cdot 31 \geq 61 > (2 - 1) \cdot 31$ erfüllt, wir können den größtmöglichen Stammbruch subtrahieren $\frac{31}{61} - \frac{1}{2} = \frac{62-61}{122} = \frac{1}{122}$ und finden die Lösung der Aufgabe 1.

Beispiel 2: Es sei $a_0 = 1$ und $b_0 = p$ für eine natürliche Zahl $p > 1$. Wir wählen $n_0 = p + 1$. Wegen $(p+1) \cdot 1 > p \geq (p+1-1) \cdot 1$ ist die Bedingung erfüllt und wir erhalten nach Subtraktion $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p\cdot(p+1)} = \frac{1}{p\cdot(p+1)}$.

Auch die Darstellung in Summen mit vielen Summanden wurde bereits als Aufgabe in der MO formuliert.

Aufgabe 15.3 – MO331031. Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Lösungshinweise: Für jede natürliche Zahl $p > 2$ kann der Stammbruch $\frac{1}{p}$ als Summe zweier Stammbrüche $\frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ mittels $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p\cdot(p+1)}$ dargestellt werden. Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung lässt sich der Stammbruch $\frac{1}{1994}$ wie gefordert darstellen:

$$\frac{1}{1994} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2} = \cdots = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_{1993}} + \frac{1}{r_{1993}}$$

Dabei wird jeweils $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{q_{i+1}} + \frac{1}{r_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, 1992)$ eingesetzt und alle Nenner der Stammbrüche sind wegen $q_1 < q_2 < \cdots < q_{1993} < r_{1993}$ paarweise verschieden. ❑

Aufgabe 15.4 – MO411034. Für welche Paare (m, n) natürlicher Zahlen gilt:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{31}$$

Lösungshinweise: Es sei (m, n) eine Lösung der Aufgabe und es gelte o.B.d.A. $m \leq n$. Wir erkennen die Ungleichung $m \leq 31 \leq n$. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $31 \cdot m \cdot n$ erhalten wir $2 \cdot m \cdot n = 31 \cdot (m + n)$. Damit muss mindestens eine der beiden Zahlen durch 31 teilbar sein.

(i) Wir nehmen an, m sei durch 31 teilbar. Dann gilt $m = 31$ und folglich auch $n = 31$.

(ii) Wir nehmen an, m sei nicht durch 31 teilbar. Dann gibt es einen Faktor k mit $n = 31 \cdot k$ und $2 \cdot m \cdot k = m + 31 \cdot k$, also

$$(2k - 1) \cdot m = 31 \cdot k$$

Nun sind aber sowohl $2k-1$ und k als auch m und 31 teilerfremd. Somit finden wir durch Faktorenvergleich $2k-1=31$ und $m=k$. Wir erhalten also $m=k=16$ und folglich $n=31\cdot k=496$.

Mit der Probe bestätigen wir, dass die Paare $(31,31)$, $(16,496)$ und $(496,16)$ Lösungen der Aufgabe sind. ❑

Aufgabe 15.5 – MO300935. Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen, für die folgende Gleichung gilt

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$

Lösungshinweise: O.B.d.A. nehmen wir $x\leq y\leq z$ an. Außerdem gilt $x>1$. Damit folgern wir

$$\frac{3}{x}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}\Rightarrow 2\leq x\leq 3$$

(i) Es sei $x=3$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{12-5}{15}=\frac{7}{15}$$

Aus $\frac{2}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$ folgt die Abschätzung $3\leq y\leq 4$ und wir können probieren:

- Für $y=3$ finden wir mit $z=\frac{1}{\frac{7}{15}-\frac{1}{3}}=\frac{15}{2}$ keine ganze Zahl als Lösung.
- Auch für $y=4$ gibt es keine ganzzahlige Lösung in z, denn $z=\frac{1}{\frac{7}{15}-\frac{1}{4}}=\frac{60}{13}$.

(ii) Es sei nun $x=2$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{8-5}{10}=\frac{3}{10}$$

Aus $\frac{1}{y}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$ und $\frac{2}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$ folgt für y die Abschätzung $4\leq y\leq 6$ und wir können probieren:

- Für $y=4$ finden wir mit $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{4}}=\frac{20}{1}$ das Lösungstripel (2, 4, 20).
- Auch für $y=5$ gibt es eine Lösung, denn $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{5}}=\frac{20}{1}$, also (2, 5, 10).
- Setzen wir $y=6$, so ist z wegen $z=\frac{1}{\frac{3}{10}-\frac{1}{6}}=\frac{30}{4}$ nicht ganzzahlig.

Insgesamt gibt es nur die Lösungen (2, 4, 20) und (2, 5, 10) sowie alle Tripel, die durch Vertauschen der Werte aus diesen hervorgehen. ❑

Wenden wir den gierigen Algorithmus für $a_0 = 4$ und $b_0 = 5$ an, so können wir $n_0 = 2$ wählen, da $2 \cdot 4 > 5 \geq (2-1) \cdot 4$ erfüllt ist. Wir subtrahieren $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ und setzen den Algorithmus fort. Wir wählen $n_1 = 4$ mit $4 \cdot 3 > 10 \geq (4-1) \cdot 3$. Nach Subtraktion $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ finden wir mit (2, 4, 20) eine Lösung der Gleichung.

Um auch die zweite Lösung zu finden, dürfen wir nicht so „gierig“ sein, sondern müssen probieren, ob es auch andere Lösungen gibt. Wählen wir $n_1 = 5$, führt dies zum Ergebnis, denn es gilt $\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$. Doch nun müssten wir systematisch weiter probieren (einschließlich für die Wahl für n_0), ob damit alle Lösungen gefunden sind, bzw. nachweisen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann. Dies führt uns schließlich zu einer Fallunterscheidung wie oben bereits durchgeführt.

Wird in einem Schritt des gierigen Algorithmus der Wert n_i nicht größtmöglich gewählt, so kann dies dennoch zu einer Zerlegung in eine Summe von Stammbrüchen führen. Subtrahieren wir beispielsweise für $a_0 = 4$ und $b_0 = 5$ mit $n_0 = 3$, berechnen also $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$, so gibt es offenbar keine Lösung mit drei Stammbrüchen.

Setzen wir aber das Verfahren wie vorgesehen korrekt fort, erhalten wir für $a_1 = 7$ und $b_1 = 15$ mit der Wahl $n_1 = 3$ (wegen $3 \cdot 7 > 15 \geq (3-1) \cdot 7$) als nächsten Bruch $\frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$. Fortführend finden wir nun für $a_2 = 2$ und $b_2 = 15$ mit der Wahl $n_2 = 8$ (wegen $8 \cdot 2 > 15 \geq (8-1) \cdot 2$) als nächsten Bruch $\frac{2}{15} - \frac{1}{8} = \frac{16-15}{120} = \frac{1}{120}$. Damit haben wir eine Zerlegung in vier Stammbrüche gefunden:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$$

Da wir die Gleichung $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ verwenden können, lässt sich auch eine Zerlegung mit fünf verschiedenen Stammbrüchen angeben.

Aufgabe 15.6. Finden Sie für jede der folgenden Gleichungen jeweils alle Lösungen in positiven ganzen Zahlen (m, n) mit voneinander verschiedenen Zahlen $m \neq n$.

a) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$
b) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{8}$

Hinweis: Jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$ lässt sich in trivialer Weise als Summe zweier Stammbrüche der Form $\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{n}$ darstellen. Diese Lösungen sind also durch die Aufgabenstellung ausgeschlossen.

Lösungshinweise Aufgabe a) Wir formen die Gleichung um zu

$$7\cdot(m+n)=m\cdot n.$$

Mindestens einer der beiden Faktoren muss durch 7 teilbar sein. O.B.d.A. sei $m=7\cdot k$. Damit erhalten wir

$$7\cdot(7\cdot k+n)=7\cdot k\cdot n,$$

also $n=\frac{7k}{k-1}$. Entweder ist $k=2$ oder $k-1$ ist ein Teiler von 7, also $k=8$. Somit können nur (für $k=2$) $m=14$ und $n=14$ bzw. (für $k=8$) $m=56$ und $n=8$ Lösung der Aufgabe sein, wobei die erste Lösung mit $m=n=14$ nicht den Bedingungen entspricht. Dagegen können wir die zweite Lösung mit der Probe bestätigen: $\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{1}{56}+\frac{1}{8}=\frac{1+7}{56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$.

Lösungshinweise Aufgabe b) Der Lösungsansatz wie in Aufgabenteil a) führt zur Gleichung

$$8\cdot(m+n)=m\ \cdot n.$$

Nun unterscheiden wir vier Fälle:

(i) 8 ist ein Teiler von m, also $m=8k$. Dann erhalten wir $n=\frac{8k}{k-1}$. Entweder ist $k=2$ oder $k-1$ ein Teiler von 8, also $k=3$, $k=5$ oder $k=9$. Wir finden:
($k=2$) $m=16$ und $n=16$- Dies entfällt jedoch als Lösung wegen $m=n$.
($k=3$) $m=24$ und $n=12$: $\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1+2}{24}=\frac{1}{8}$.
($k=5$) $m=40$ und $n=10$: $\frac{1}{40}+\frac{1}{10}=\frac{1+4}{40}=\frac{1}{8}$.
($k=9$) $m=72$ und $n=9$: $\frac{1}{72}+\frac{1}{9}=\frac{1+8}{72}=\frac{1}{8}$.

(ii) 4 ist ein Teiler von m, aber 8 ist kein Teiler von m, also $m=4k$ mit ungerader Zahl k. Dann ist aber n durch 2 teilbar, also $n=2k'$. Wir erhalten $k'=\frac{4k}{k-2}$. Nur für die ungerade Zahl $k=3$ ist k' ganzzahlig, denn für größere ungerade Zahlen k ist $k-2$ kein Teiler von 4 und teilerfremd zu k.
Für $k=3$ erhalten wir die Lösung $m=12$ und $n=24$.

(iii) 2 ist ein Teiler von m, aber 4 ist kein Teiler von m, also $m = 2k$ mit ungerader Zahl k. Dann ist aber n durch 4 teilbar, also $n = 4k'$. Wir erhalten $k' = \frac{2k}{k-4}$. Nur für die ungerade Zahl $k = 5$ ist k' ganzzahlig, denn für größere ungerade Zahlen k ist $k - 4$ kein Teiler von 2 und teilerfremd zu k.
Für $k = 5$ erhalten wir die Lösung $m = 10$ und $n = 40$.

(iv) m ist eine ungerade Zahl. Dann ist 8 ein Teiler von n und wir finden wie im Fall (i) entsprechende Lösungen

Insgesamt finden wir die Lösungen (24, 12), (12, 24), (40, 10), (10, 40), (72, 9) und (9, 72). ❑

Aufgabe 15.7. Für welche natürlichen Zahlen $q \geq 2$ lässt sich der Stammbruch $\frac{1}{q}$ als Summe zweier Stammbrüche mit verschiedenen Nennern $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ in eindeutiger Weise (bis auf Vertauschen der Summanden) darstellen?

Lösungshinweise: Es sei $q = p$ mit einer Primzahl p. Dann ist die Darstellung als Summe zweier Stammbrüche (bis auf Vertauschung der Summanden) eindeutig.

Für den Nachweis dieser Aussage verallgemeinern wir die oben gefundene Gleichung zu $p \cdot (m + n) = m \cdot n$. Mindestens einer der beiden Faktoren muss durch p teilbar sein, o.B.d.A. sei $m = p \cdot k$. Damit erhalten wir

$$p \cdot (p \cdot k + n) = p \cdot k \cdot n,$$

also $n = \frac{p \cdot k}{k-1}$. Entweder ist $k = 2$ oder $k - 1$ ist ein Teiler von p, also $k = p + 1$. Somit können nur (für $k = 2$) $m = 2 \cdot p$ und $n = 2 \cdot p$ bzw. (für $k = p + 1$) $m = p \cdot (p + 1)$ und $n = p + 1$ Lösung der Aufgabe sein, wobei die erste Lösung mit $m = n = 2 \cdot p$ nicht den Bedingungen entspricht.

Es sei nun q eine zusammengesetzte Zahl, zum Beispiel $q = a \cdot b$ mit natürlichen Zahlen a und b mit $1 < a \leq b < q$. Dann existieren mindestens zwei verschiedenen Darstellungen als Summe zweier Stammbrüche.

Für den Nachweis verwenden wir einerseits die bekannte Zerlegungsmöglichkeit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)}.$$

Andererseits gilt

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{ab} = \frac{b+1}{ab(b+1)} = \frac{b}{ab(b+1)} + \frac{1}{q(b+1)} = \frac{1}{q+a} + \frac{1}{q(b+1)}.$$

Wegen $a \neq 1$ und $b \neq q$ sind beide Darstellungen verschieden. ❑

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [4]

Im Heft April 2022 wurden im Thema 12.1 – Bedeckungen mit Bezug zu der Aufgabe KZM1-4[5] die geometrischen Gerüchte unter den Dreiecken beschrieben.

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form wie das große Polygon selbst haben.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von Daniel Schwenter (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen: Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“ Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

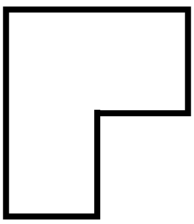


Abbildung 1a

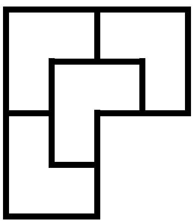


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in 4 Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem zweiteiligen Gerücht haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten

[4] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.
[5] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet *a* die Länge der langen Seite und *b* die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}\,.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst.

Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht.

Von den dreiteiligen Gerüchten sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn man die Seitenlängen geeignet wählt (s. Heft April 2022, S. 7).

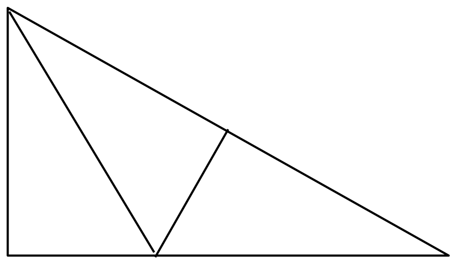
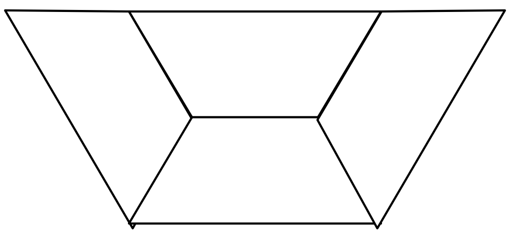
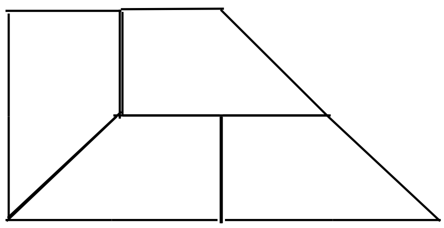


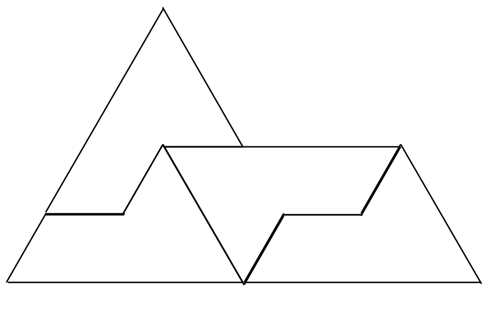
Abbildung 2

Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck und jedes Parallelogramm (sogar auf zwei verschiedene Weisen) gehören dazu. Aber auch andere Vierecke lassen sich beispielsweise entsprechend zerlegen:

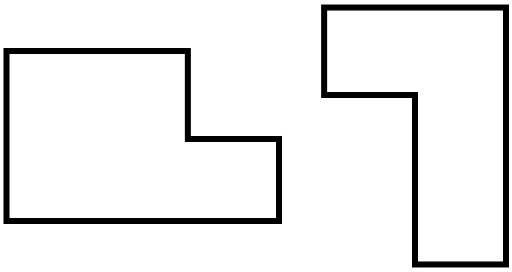




Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:

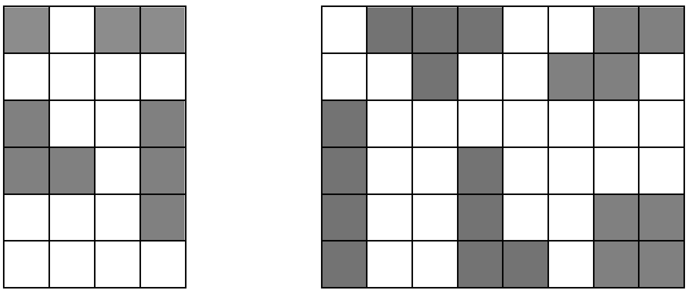


Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert:



Für jede natürliche Zahl *n* > 1 lässt sich ein Parallelogramm angeben, das sich als ein *n*-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene *n* ein *n*-teiliges Gerücht wird? Für *n* = 3 und *n* = 4 wurden oben die Lösungen besprochen. Auch *n* = 2 lässt sich einfach lösen. Damit sind auch die Fragestellungen für $n \geq 5$ zu beantworten.

Haben wir ein n-teiliges Gerücht, können wir daraus schnell ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder entsprechend zerlegen. Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jede natürliche Zahl n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es 2 verschiedene Triominos und 5 verschiedene Tetrominos.



n-minos für n = 1, 2, 3, 4

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.

- Aus 4 Domino-Steinen können wir ein 2 x 4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.

- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht.

- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern.

- Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden.

Setzen wir fünf Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur 4 davon sind Gerüchte. So könnten wir die Reihe der n-minos fortsetzen. Da es aber bereits 35 verschiedene Formen von Hexominos gibt ($n = 6$), sollten wir diese Vielfalt wieder einschränken. So sind 11 dieser Hexominos Würfelnetze, d.h., diese könnten wir zu einem Würfel falten und zusammenkleben. Damit ergibt sich folgende interessante Frage: Wie viele der Würfelnetze sind geometrische Gerüchte?

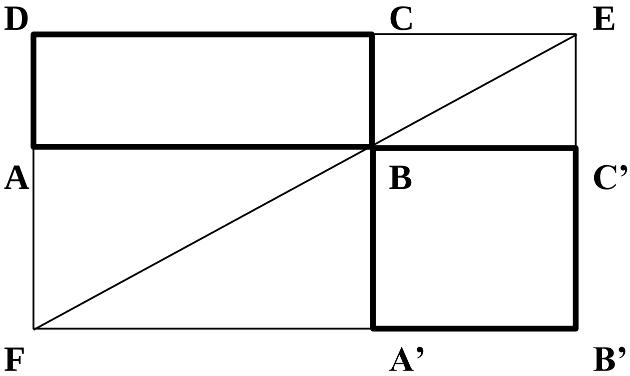
Geometrisches Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren [6]

In der **KZM-Aufgabe 6-5B**[7] wird das HERONsche Verfahren zur Approximation eines Wurzelwertes untersucht. Insbesondere ist zu beweisen, dass wir uns mit diesem Verfahren bei jedem Schritt dem Wurzelwert nähern. Die Vorgehensweise bei diesem Verfahren lässt sich geometrisch interpretieren: Gehen wir von einem beliebigen positiven Startwert x_0 aus, so hat das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und $\frac{a}{x_0}$ den Flächeninhalt a. Wir möchten dieses Rechteck nun iterativ „quadratischer“ machen, also schrittweise eine solche Seitenlänge x_n finden, für die schließlich $x \approx \sqrt{a}$ gilt.

Über den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusen-Abschnitten x_0 und $\frac{a}{x_0}$ ist diese Aufgabe in einem Schritt lösbar. Dieser Weg sei hier nicht beschritten. Vielmehr betrachten wir folgende Abbildung:

[6] Nach dem gleichnamigen Beitrag von B. Artmann und H. Puhlmann in MNU 55/1 (2002), Seite 16-19.

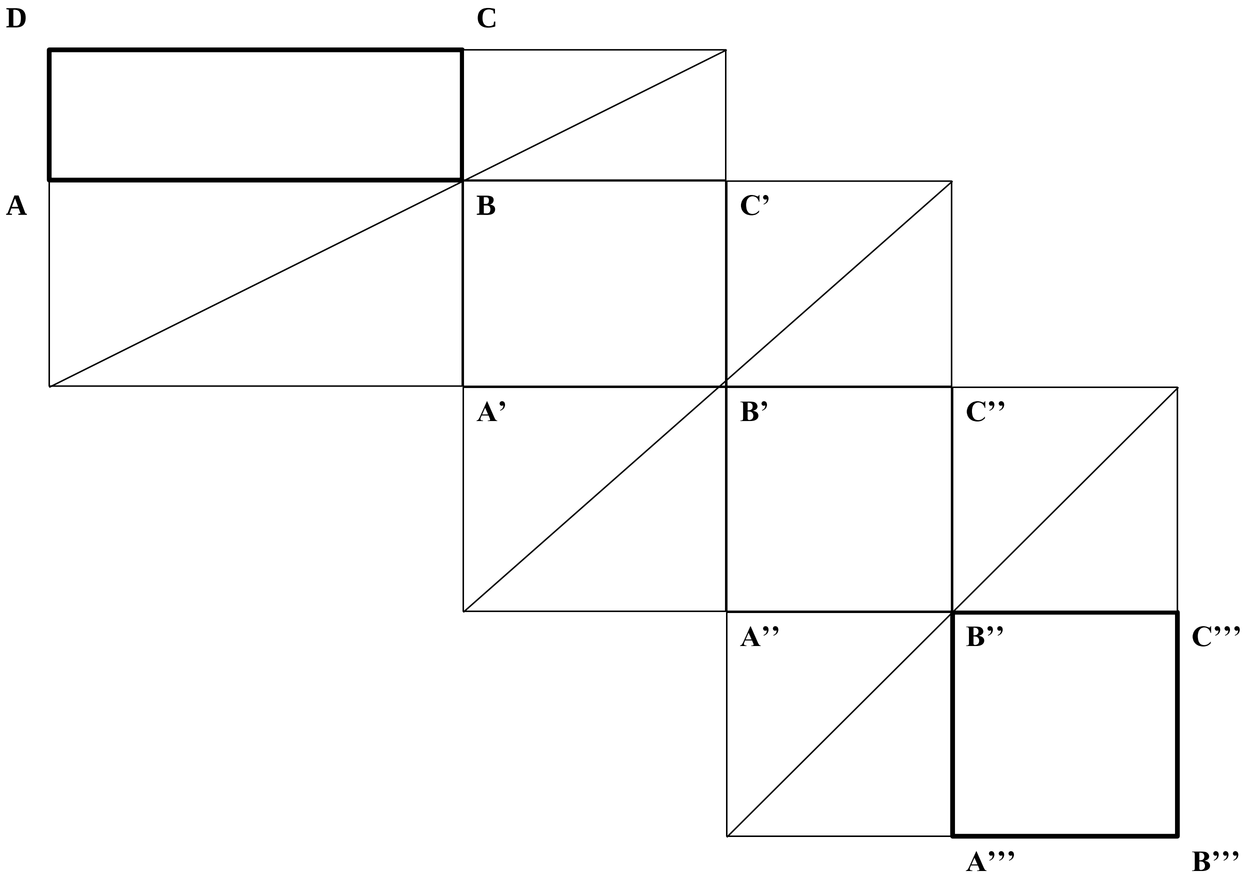
[7] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1



Liegt der Punkt B auf der Diagonale FE des Rechtecks $FB'ED$, so sind die Rechtecke $ABCD$ und $A'B'C'D$ flächengleich. Der Beweis ist einfach: Da die Dreiecke FBA und $BC'E$ ähnlich sind, gilt $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AF}|} = \frac{|\overline{BC'}|}{|\overline{C'E}|}$, also $|\overline{AB}| \cdot |\overline{C'E}| = |\overline{BC'}| \cdot |\overline{AF}|$. Wegen $|\overline{C'E}| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{AF}| = |\overline{A'B}|$ ergibt sich unmittelbar die Flächengleichheit. Schon EULER kannte diese Eigenschaft und benutzte sie, um für ein gegebenes Rechteck $ABCD$ und eine Strecke $\overline{BC'}$ ein flächengleiches Rechteck „anzulegen“, dessen eine Seite genau die Länge $\overline{BC'}$ hat.

Ist eine Zahl[8] $a > 1$ gegeben, so setzen wir $x_0 = a$ und $y_0 = 1$. Das Rechteck mit den Seitenlängen x_0 und y_0 hat damit den Flächeninhalt a. Nun wählen wir eine Strecke $\overline{BC'}$ der Länge $|\overline{BC'}| = x_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_0 + y_0)$, die geometrisch sehr einfach zu konstruieren ist. Nach obiger Konstruktion erhalten wir damit ein flächengleiches Rechteck, dessen andere Seitenlänge mit y_1 bezeichnet werde. Dieses Verfahren lässt sich nun beliebig fortsetzen. Bereits nach 3 Schritten sieht das resultierende Rechteck schon wie ein Quadrat aus!

[8] Es wird im Folgenden auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet.



Wegen $a = x_0 \cdot y_0 = x_1 \cdot y_1 = \cdots = x_n \cdot y_n$ gilt laut Konstruktionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + y_n) = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

also die Iterationsformel des HERONschen Verfahrens.

Eine Verallgemeinerung des Heronschen Verfahrens[9]

Zur Ermittlung der n-ten Wurzel ($n > 2$) einer Zahl können wir folgendes Verfahren untersuchen: Es seien $x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ positive reelle Zahlen und $A^{(j)}$ das arithmetische Mittel, $G^{(j)}$ das geometrische Mittel und $H^{(j)}$ das harmonische Mittel dieser n Zahlen. Bekanntlich gilt (s. Heft Januar 2022, S. 13)

$$H^{(j)} \leq G^{(j)} \leq A^{(j)}.$$

Finden wir Zahlen $x_i^{(j)} \approx \sqrt[n]{x}$, so können deren harmonisches und arithmetisches Mittel untere bzw. obere Grenzen von $\sqrt[n]{x}$ sein. Dazu starten wir mit

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)} = x$$

[9] Nach W. Dörband: Ein allgemeiner Wurzelalgorithmus. In: WURZEL 01/2001, S. 16-19.

und setzen für alle $j > 0$

$$x_1^{(j)} = H^{(j-1)}, x_2^{(j)} = A^{(j-1)}$$
$$x_3^{(j)} = \cdots = x_{n-1}^{(j)} = y^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot \left(H^{(j-1)} + A^{(j-1)}\right)$$
$$x_n^{(j)} = \frac{1}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)} \cdot (y^{(j)})^{n-3}}$$

Hinweis: Für $n = 3$ entfällt die mittlere Definitionsgleichung und wir setzen

$$x_3^{(j)} = \frac{x}{x_1^{(j)} \cdot x_2^{(j)}}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine wachsende Folge für $x_1^{(j)}$ und eine fallende Folge für $x_2^{(j)}$, die sich zudem (von unten bzw. von oben) an den Wert $\sqrt[n]{x}$ annähern. Beispielsweise erhalten wir für $n = 3$ und $x = 2$ für

$j = 1$: $\quad (1.200000 =)\ \frac{6}{5} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{4}{3}\ \ (\approx 1.3333333)$

$j = 2$: $\quad (1.258741 \approx)\ \frac{180}{143} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{227}{180}\ \ (\approx 1.261111)$

$j = 3$: $\quad (1.259921 \approx)\ \frac{17528940}{13912733} \leq \sqrt[3]{2} \leq \frac{22085087}{17528940}\ \ (\approx 1.259921)$

Für $n = 5$ finden wir nach 3 Schritten die Näherung $\sqrt[5]{2} \approx 1.148698$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Verwendung von Stammbrüchen ist mit den ältesten Aufzeichnungen von mathematischen Rechentechniken verbunden. In

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 2 – Mathematik in Altägypten
Abschnitt 2.3 – Zur Rechentechnik Altägyptens (Seiten 76ff)

wird erläutert, wie die alten Ägypter zur Zahlendarstellung ebenso wie für die Schrift Hieroglyphen verwendeten. Dabei bekam nicht jede Zahl ein eigenes Symbol, sondern es wurden lediglich die Zehnerpotenzen festgelegt und alle anderen Zahlen als Summe dieser geschrieben. Die Zeichen wurden für größere Zahlen hintereinandergeschrieben, was bedeutete, dass diese zur eigentlichen Zahl addiert werden sollten, wie wir es in der heutigen Dezimalschreibweise gewöhnt sind. Zur Darstellung von Brüchen wurden nur Brüche der Form $\frac{1}{n}$ verwendet. Dafür wurde die Zahl des Nenners ausgeschrieben und über die gesamte Zahl die Hieroglyphe für den Mund gezeichnet. Das bedeutete, dass von der Zahl der Kehrwert zu bilden war. Die einzige Ausnahme bildeten die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, für die es eigene Hieroglyphen gab. Für Brüche, deren Zähler ungleich 1 sind, hätte mehrmals der Kehrwert des Nenners hintereinander geschrieben werden müssen. Beispielsweise bei $\frac{5}{12}$ würde fünf Mal das Zeichen für $\frac{1}{12}$ stehen. Dies wäre sehr platz- und schreibaufwendig. Damit das umgangen werden konnte, wurden Brüche, deren Zähler ungleich 1 sind, als Summe von Stammbrüchen dargestellt. So gilt beispielsweise $\frac{7}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45}$.

Für Brüche der Form $\frac{2}{n}$ mit ungerader natürlicher Zahl n $(n = 3, 5, \dots, 101)$ waren im Papyrus Rhind[10] die Stammbruchzerlegungen tabellarisch angegeben. Da sich jede natürliche Zahl als Summe von Zweierpotenzen schreiben lässt, können alle Brüche mit diesen Angaben zerlegt werden. Schreiben wir für $\frac{7}{15}$ zunächst die Summe $\frac{7}{15} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}$, so können wir gemäß Tabelle $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ verwenden und diesen Term mit 2 multiplizieren, um eine Zerlegung für $\frac{4}{15}$ zu erhalten. Falls ein Nenner ungerade ist, erhalten wir bei Multiplikation mit 2 die Form $\frac{2}{n}$, für die wir wieder in der Tabelle nachschlagen können. Wir erhalten $\frac{7}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}$.

Offenbar wurden die Zerlegungen in der Tabelle nicht nach einem allgemeinen Algorithmus erstellt. Es gibt eine Vielzahl von Zerlegungsmöglichkeiten. Die nachfolgend angegebenen Beispiele sind im Papyrus Rhind verzeichnet.

(1) Die bekannte Zerlegung $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ können wir für ungerade Zahlen n umformen zu $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Beispielsweise gilt für n=3: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ oder für n=11: $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$.

(2) Ist n eine zusammengesetzte Zahl $n = p \cdot q$ mit mit ungeraden Zahlen p und q mit $1 < p \leq q < n$, so gilt $\frac{2}{pq} = \frac{1}{\frac{p\cdot(p+q)}{2}} + \frac{1}{\frac{q\cdot(p+q)}{2}}$. Wir finden in der Tabelle für $n = 35$ die Zerlegung $\frac{2}{35} = \frac{1}{\frac{5\cdot(5+7)}{2}} + \frac{1}{\frac{7\cdot(5+7)}{2}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

[10] Der Papyrus Rhind ist ein auf Papyrus verfasst Abhandlung zu mathematischen Themen, benannt nach dem Schotten ALEXANDER HENRY RHIND, der ihn 1858 in Ägypten erwarb. Er wird auf etwa 1550 v. Chr. datiert. Er ist heute im Besitz des Britischen Museums in London.

(3) Wir können die Summe $12 = 6 + 3 + 2 + 1$ verwenden und erhalten eine Zerlegung der Form $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$. Als Beispiel steht in der Tabelle $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$.

(4) Wegen $\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2q-p}{pq}$ können wir für die ungerade Zahl p die Zahl $q = \frac{p+1}{2}$ wählen und erhalten auf der rechten Seite dieser Gleichung den Nenner 1. So lässt sich für $n = 7$ die Zerlegung $\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7+1}{2}} + \frac{8-7}{7\cdot4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ erklären.

(5) Ist der Nenner durch 3 teilbar, so ist die Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{2\cdot n} + \frac{3}{2\cdot n}$ möglich, weil der zweite Bruch zu einem Stammbruch gekürzt werden kann. So könnten in der Tabelle die Zerlegung $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ oder $\frac{1}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$ entstanden sein.

(6) Diesen Lösungsansatz können wir auch für Nenner übertragen, die durch 5 teilbar sind, denn es gilt $\frac{2}{n} = \frac{1}{3\cdot n} + \frac{5}{3\cdot n}$, wie zum Beispiel für $\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$.

(7) Wegen $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ können wir für alle durch 3 teilbaren Nenner eine naheliegende Zerlegung angeben, zum Beispiel $\frac{2}{39} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$ oder $\frac{2}{99} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{33} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$.

(8) Finden wir natürliche Zahlen a und b mit $n = 2ab - (a + b)$, so ist auch die Zerlegung $\frac{2}{n} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{an} + \frac{1}{bn}$ richtig. Aus $17 = 2 \cdot (3 \cdot 4) - (3 + 4)$ folgt die Zerlegung $\frac{2}{17} = \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot17} + \frac{1}{4\cdot17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$.

(9) Diesen Lösungsansatz erweitern wir, denn für natürliche Zahlen a, b und c mit $n = 2 \cdot a \cdot b \cdot c - (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$ folgt $\frac{2}{n} = \frac{1}{abc} + \frac{1}{a\cdot n} + \frac{1}{b\cdot n} + \frac{1}{c\cdot n}$. Wir finden in der Tabelle: Wegen $43 = 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) - (2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7)$ gilt die Darstellung $\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$.

Für die Zerlegung von $\frac{2}{29}$ wird in der Tabelle eine Summe aus vier Stammbrüchen angegeben. Vermuten wir, dass dies mit dieser Methode gelang, so finden wir tatsächlich $29 = 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) - (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5)$ und können die Darstellung als Summe von Stammbrüchen angeben: $\frac{2}{29} = \frac{1}{30} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{145}$. Doch in der Tabelle finden wir $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$, möglicherweise basierend auf dem Zusammenhang $4 \cdot 29 = 2 \cdot (2 \cdot 6 \cdot 8) - (2 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 8)$ mit anschließender Division durch 4.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
Mai 2022	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
April 2022	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Januar 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dezember 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
November 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
November 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Oktober 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
September 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[11] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.