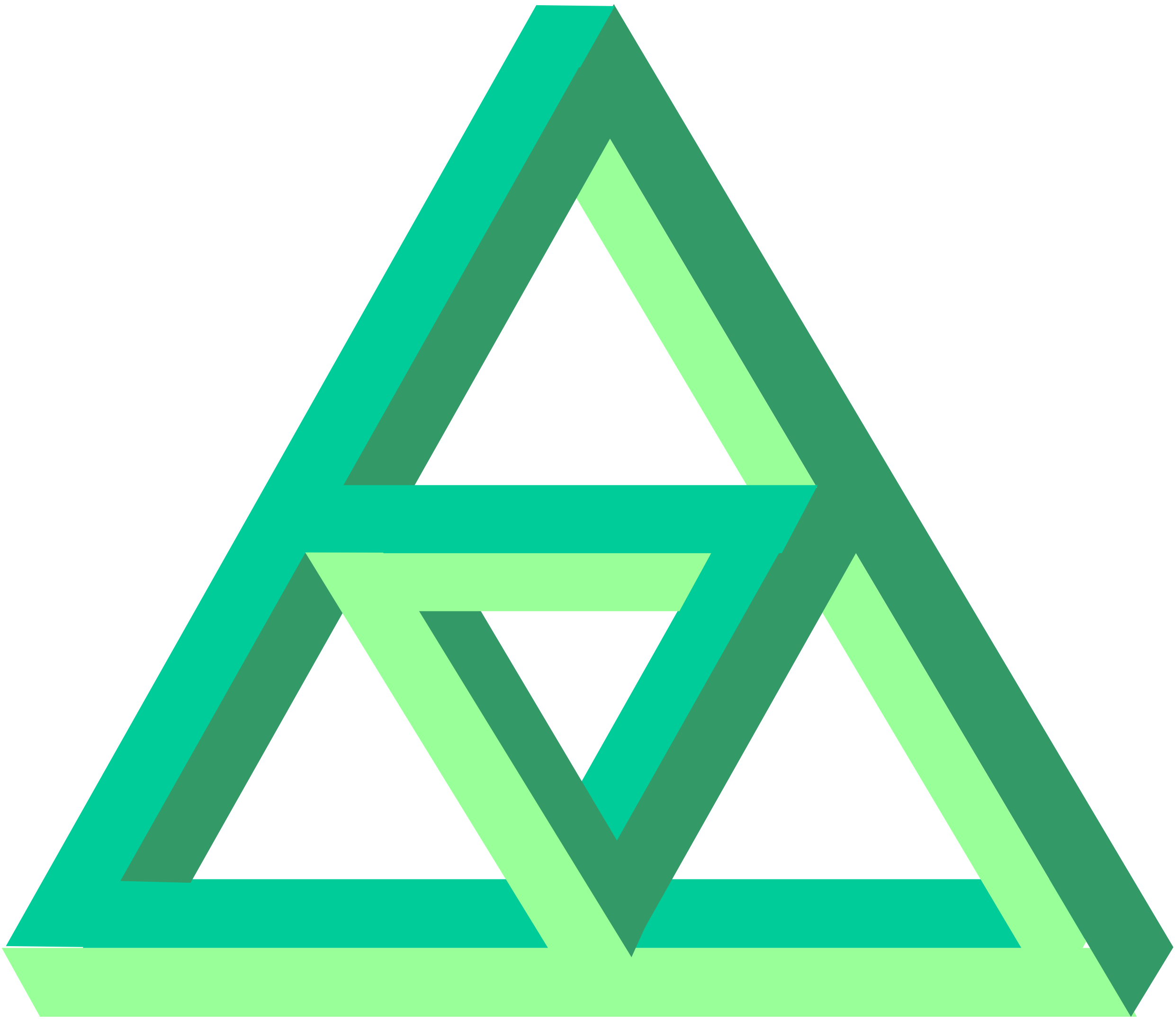
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 03/22 – April 2022

21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610932/MO611031** nochmals Zerlegungen von geometrischen Figuren (Thema 12.1, Bedeckungen) und setzen damit die Aufgabenbeispiele aus Heft 11/21 (Dezember 2021) fort.

Ein Auszug aus einem Lehrbuch zur Arithmetik und Algebra aus dem Jahr 1895 zeigt unterhaltsam einen Ausschnitt über die Einführung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zur damaligen Zeit.

Ein Rückblick auf den 4. Tag der Mathematik der Technischen Universität Chemnitz lässt bereits Vorfreude auf das kommende Jahr aufkommen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

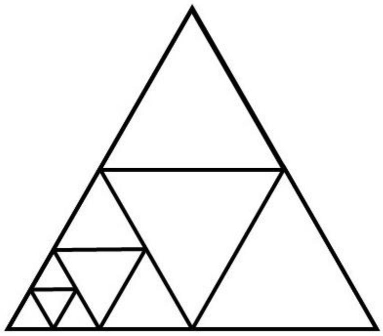
Thema 12.1 – Zerlegung einer Dreiecksfläche

Aufgabe 12.9 – MO610932/MO611031.
a) Weisen Sie nach, dass sich ein gleichseitiges Dreieck in 61 gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.
b) Weisen Sie nach, dass sich für jedes $n \geq 6$ ein gleichseitiges Dreieck in genau n gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.
c) Weisen Sie nach, dass sich ein gleichseitiges Dreieck nicht in 5 gleichseitige Teildreiecke zerlegen lässt.

Vorbemerkung: Diese Thematik wurde bereits in einer Olympiade-Aufgabe 1996 behandelt. Der Begriff „Zerschneiden“ entspricht der umgangssprachlichen Vorstellung einer **Parkettierung**: Eine Figur wird in Teilfiguren zerlegt, sodass jeder Punkt der Ausgangsfigur (einschließlich ihrer Randpunkte) in genau einer Teilfigur und kein Punkt in mehr als einer Teilfigur enthalten ist. Auf eine vollständige Definition des Zerschneidens wird hier nicht eingegangen.

Aufgabe 12.10 – MO350931. Beweisen Sie, dass man ein gleichseitiges Dreieck so in 1996 gleichseitige Teildreiecke zerschneiden kann, dass es unter je 5 dieser Teildreiecke zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind

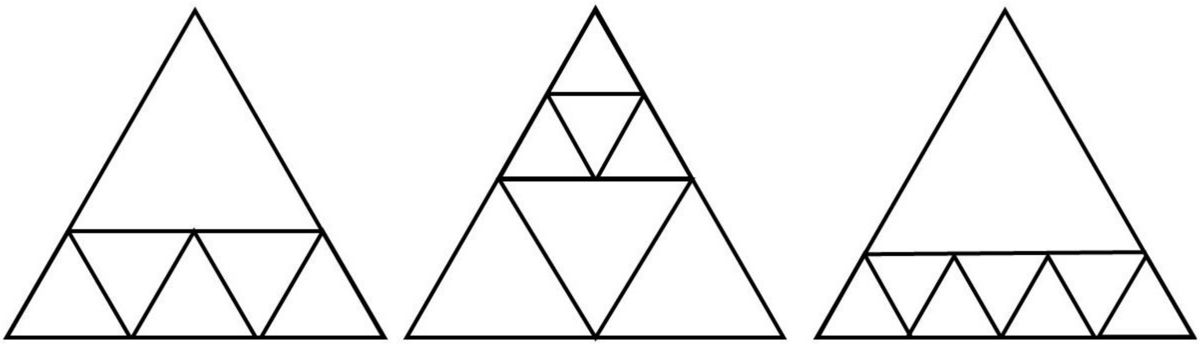
Lösungshinweise: Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass jedes gleichseitige Dreieck durch die Verbindungsstrecken seiner Seitenmittelpunkte in vier gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann. Führen wir dies für das vorgegebene Dreieck aus und setzen das Zerschneiden für jeweils eines der entstandene Teildreieck fort, so finden wir: Bis auf das letzte Zerschneiden eines Teildreiecks bleiben jeweils drei Teildreiecke gleicher Größe und beim letzten Zerschneiden vier Teildreiecke gleicher Größe bestehen. Damit sichert diese Prozedur die Forderung, dass unter je 5 dieser Teildreiecke stets zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind (weil es keine 5 gleichgroßen Dreiecke gibt).



Außerdem erkennen wir, dass bei jedem Zerschneiden eines Teildreiecks aus einem Dreieck (das durch das Zerschneiden „verloren“ geht) vier neue Dreiecke entstehen, also insgesamt drei Dreiecke hinzukommen. Wegen 1 + 3 · 665 = 1996 ist nach 665 Zerschneidungen eines der entstandenen Teildreiecke eine Zerlegung in 1996 der geforderten Art erreicht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Teilaufgabe a) Wegen 61 = 1 + 20 · 3 ist mit der Argumentation in der Lösung zu Aufgabe 2 gezeigt, dass eine Zerlegung in 61 Teildreiecke möglich ist.

Teilaufgabe b) Für $n = 7$ ist die Lösung wegen $7 = 1 + 2 \cdot 3$ auf Aufgabe 2 zurückzuführen. Da diese Argumentation auf $n = 6$ und $n = 8$ nicht übertragbar ist, müssen wir spezielle Lösungen finden.



$n = 6$ $\qquad$ $n = 7$ $\qquad$ $n = 8$

Die in Aufgabe 1 vorgeschlagene Prozedur ermöglicht nun, von einer gegebenen Ausgangssituation mit k Teildreiecken für jede Anzahl der Form $k + 3 \cdot m$ Teildreiecke zu erzeugen. Da sich jede natürliche Zahl $n \geq 6$ als $6 + 3 \cdot m$, $7 + 3 \cdot m$ oder $8 + 3 \cdot m$ darstellen lässt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

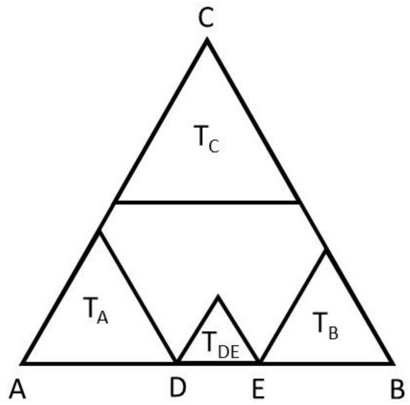
Lösungsvariante: Aus der in Bezug zu Aufgabe 2 naheliegenden Lösung für $n = 7$ können wir aber auch folgende Beweisidee verfolgen.

Die Lösung für eine gerade Zahl $n = 2 \cdot m$ ergibt sich, indem wir die Grundseite für $m \geq 2$ in m Teilstrecken zerlegen. Mit $2 \cdot m - 1$ gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ können wir einen trapezförmigen Streifen überdecken, sodass darüber ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $1 - \frac{1}{m}$ verbleibt. Insgesamt entstehen auf diese Weise $2 \cdot m$ gleichseitige Dreiecke. Es lassen sich also mit dieser Vorgehensweise für jede gerade Anzahl n ($n \geq 4$) eine Zerlegung in n Dreiecke erreichen.

Da wir aber bei dieser Konstruktion anstelle des oberen gleichseitigen Dreiecks dieses stets in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen können, ist es auch möglich, insgesamt $2 \cdot m - 1 + 4 = 2 \cdot m + 3$ Dreiecke zu erreichen. Somit sind auch für jede ungerade Anzahl n ($n \geq 7$) die Zerlegung in n Dreiecke möglich.

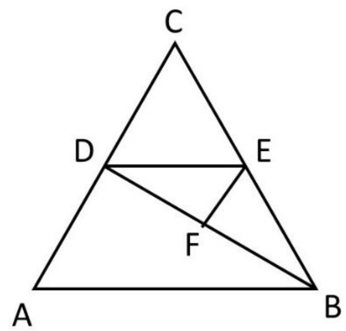
Lösungshinweise zu Teilaufgabe c) Wir nehmen an, für das Dreieck ABC eine Zerlegung in fünf Teildreiecke gefunden zu haben. Dann sind darunter genau drei Teildreiecke T_A, T_B und T_C, die jeweils genau einen der Eckpunkte A, B und C

enthalten. Würde nämlich ein Dreieck zwei Eckpunkte enthalten, fiele es mit dem Ausgangsdreieck zusammen und es wäre keine weitere Zerlegung möglich.



Haben nun zwei dieser Teildreiecke, zum Beispiel T_A und T_B keinen Punkt gemeinsam, so verbleibt auf der Seite AB des Dreiecks ABC eine nicht überdeckte Strecke DE, für die ein viertes Dreieck T_{DE} erforderlich ist. Dann sind aber mindestens zwei weitere Dreiecke erforderlich, die mit einem Eckpunkt den D bzw. E berühren, um die Flächen zu überdecken, also insgesamt mindestens 6 Teildreiecke. Deshalb haben sowohl T_A und T_B, T_B und T_C sowie T_C und T_A jeweils einen Punkt auf den Dreiecksseiten gemeinsam. Das ist aber nur möglich, wenn die drei Dreiecke kongruent sind. Es verbleibt somit offene Fläche, die selbst wieder ein gleichseitiges Dreieck ist. Diese kann aber nicht in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. ❑

Aufgabe 12.11 – MO561012. Beweisen Sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos so in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.



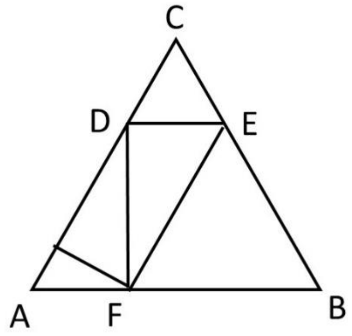
Lösungshinweise: Es genügt, wenn wir ein Beispiel der geforderten Zerlegung angeben und nachweisen, dass es den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Nebenstehende Abbildung zeigt eine Möglichkeit: Verbinden wir im gleichseitigen Dreieck ABC die Seitenmittelpunkte D von AC und E von BC, so ist das Dreieck CDE ebenfalls gleichseitig. Andererseits ist BD die Mittelsenkrechte auf AC, also ist das Dreieck ABD rechtwinklig. Zudem ist das Dreieck BED gleichschenklig mit der Basis BD und wir können es mit der Mittelsenkrechten EF auf BD in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Also haben wir eine Zerlegung wie gefordert gefunden. ❑

Verallgemeinerung. In Analogie zu den Aufgaben MO610932/MO611031 können wir die Fragestellung verallgemeinern und behaupten, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein gleichseitiges Dreieck in n rechtwinklige Dreiecke und ein gleichseitiges Dreieck zerlegt werden kann, denn jedes rechtwinklige Dreieck lässt sich durch die Höhe auf der Hypotenuse in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

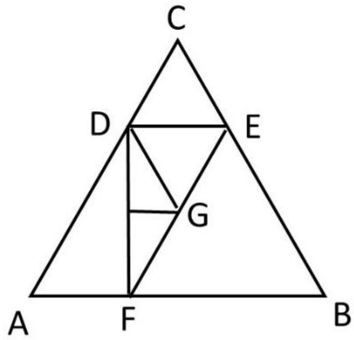
Aufgabe 12.12. Für welche natürliche Zahlen n ist es möglich, ein gleichseitiges Dreieck in n gleichseitige Dreiecke und drei rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen?

Lösungshinweise: Wie wir in obigen Diskussionen gesehen haben, ist für $n = 1$ und $n \geq 6$ die Zerlegung möglich. Natürlich ist die Zerlegung auch für $n = 4$ möglich, weil wir das Dreiecke zunächst in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen können und dann eins dieser Teildreiecke in ein gleichseitiges Dreieck und drei rechtwinklige Dreiecke zerlegen können.

Auch für $n = 2$ finden wir eine Lösung wie in nebenstehender Abbildung. Werden die gleichseitigen Dreiecke CDE und BEF so festgelegt, dass DF senkrecht auf AB steht (d.h. DE ist ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangsdreiecks ABC), so ist das Parallelogramm $AFED$ durch die Diagonale DF in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegbar, wovon eines nochmals unkompliziert in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.



Mit diesem Ansatz finden wir aber auch für $n = 3$ eine Lösung. Ist das Dreieck DGE ebenfalls gleichseitig, so ist das Dreieck DFG gleichschenklig und lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.



Damit gibt es aber auch eine Zerlegung wie gefordert für $n = 5$. Im ersten Schritt zerlegen wir ein gleichseitiges Dreieck in vier gleichseitige Dreiecke. Eines dieser Teildreiecke können wir nun in zwei gleichseitige Dreiecke und drei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

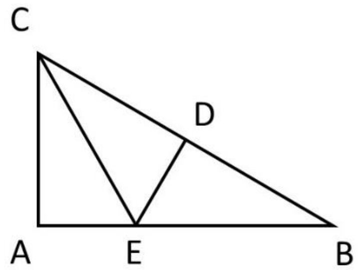
Somit ist die geforderte Zerlegung für alle $n \geq 1$ möglich. ❑

Eine besondere Form der Zerlegung von Flächen ist das so genannte geometrische Gerücht[3]. Hierbei wird eine Fläche in kleinere Teilflächen überdeckungsfrei und vollständig zerlegt, die paarweise kongruent und zur Ausgangsfläche ähnlich sind. Jedes Dreieck ist demnach ein vierteiliges Gerücht, weil wir es mit den Verbindungslinien der Seitenmitten in vier zueinander kongruente und zum Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke zerlegen können. Jedes Dreieck ist aber auch für jedes $n \geq 2$ ein n^2 –teiliges Gerücht, weil wir jedes Dreieck in n^2 Teildreiecke gitterförmig zerlegen können, wenn wir die Seiten in n Teilstrecken teilen.

[3] Aus: Devendran T. (Hrsg.) Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett, Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart, 1990.

Betrachten wir nun rechtwinklige Dreiecke. Jedes gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist ein zweiteiliges Gerücht, weil die Höhe auf der Basis das Dreieck wieder in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Damit ist es aber auch ein vierteiliges, achtteilige bzw. allgemein 2^n-teiliges Gerücht, weil wir die Teilung beliebig fortsetzen können.

Aufgabe 12.13. Existieren rechtwinklige Dreiecke, die dreiteilige Gerüchte sind?



Lösungshinweise: Wir zeichnen eine Skizze, wie wir uns eine Zerlegung des Dreiecks in drei kongruente Dreiecke vorstellen. Wir nehmen an, diese Konstruktion lässt sich bei geeigneten Maßen als geometrisches Gerücht festlegen. Damit die Dreiecke BDE und CED kongruent sind, muss $BD = CD$ gelten. Damit die Dreiecke AEC und BDE kongruent sind, muss auch $BD = AC$ gelten. Nach dem Satz von PYTHAGORAS finden im rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse für die Seitenlänge $|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Alle rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen im Verhältnis 1 : $\sqrt{3}$: 2 stehen, sind folglich dreiteilige Gerüchte. ❑

Wie jedes Dreieck ist auch ein rechtwinkliges Dreieck ein vierteiliges Gerücht.

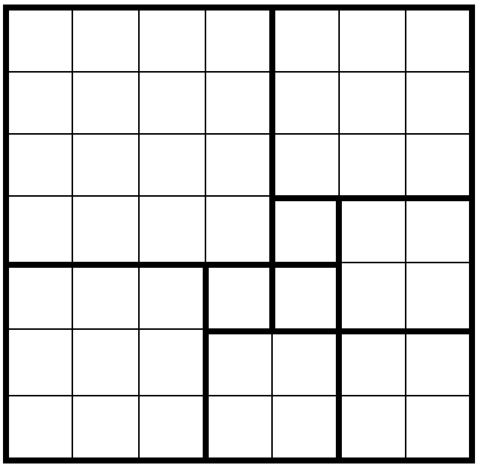
Die Frage nach der Existenz von rechtwinkligen Dreiecken, die fünfteilige Gerüchte sind, wurde in Aufgabe **KZM1-4**[4] untersucht.

Thema 12.1 – Zerlegung einer Quadratfläche

Aufgabe 12.14 – MO351031. Beweisen Sie, dass man ein Quadrat so in mehr als vier Teilquadrate zerschneiden kann, dass es unter je 4 dieser Teilquadrate zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

Lösungshinweise: Es genügt bei dieser Fragestellung, eine geeignete Zerlegung zu zeigen. Aufgrund der Bedingungen der Aufgabenstellung können höchsten drei der Teilquadrate die gleiche Größe haben.

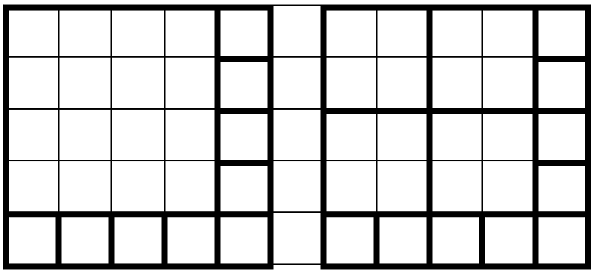
[4] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1



Dies wird in nebenstehender Abbildung realisiert, da es ein Quadrat mit 16 FE[5], zwei Quadrate mit 9 FE und jeweils drei Quadrate mit 4 FE bzw. 1 FE als Teilquadrate gibt.

Angeregt durch diese Aufgabe liegt es Nahe zu untersuchen, in wie viele Teilquadrate wir ein Quadrat zerschneiden können[6]. Offensichtlich können wir ein Quadrat nicht in zwei und nicht in drei Teilquadrate zerschneiden. Beim Zerschneiden muss jeder Quadrat-Eckpunkt in einem der Teilquadrate enthalten sein. Bei weniger als vier Teilquadraten gibt es mindestens ein Teilquadrat, das mindestens zwei Eckpunkte enthält. Dann fällt dieses Teilquadrat bereits mit dem Ausgangsquadrat zusammen.

Es ist natürlich möglich, ein Quadrat in 4 Teilquadrate zu zerschneiden.



Wir können auch ein Quadrat in jede gerade Anzahl $2 \cdot m$ von Quadraten zerschneiden $(m > 1)$. Dafür zerschneiden wir zunächst einen Streifen von m Teilquadraten jeweils mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$. Dann lassen sich weitere $(m-1)$ Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ abschneiden. Es verbleibt ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{m-1}{m}$. Insgesamt sind es also $2 \cdot m$ Teilquadrate.

Wir können auch ein Quadrat in jede ungerade Anzahl $2 \cdot m + 1$ von Quadraten zerschneiden $(m \geq 3)$. Dafür zerschneiden wir zunächst einen Streifen von $(m-1)$ Teilquadraten jeweils mit der Seitenlänge $\frac{1}{m-1}$. Dann lassen sich weitere $(m-2)$ Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{m-1}$ abschneiden. Es verbleibt ein Quadrat der

[5] FE – Flächeneinheit darf als Abkürzung für eine beliebige, aber fixierte Einheit verwendet werden (vergleiche auch LE – Längeneinheit). Wir vereinbaren, dass im Weiteren FE als 1 angenommen wird und deshalb weggelassen werden kann.

[6] Nach: Hercher C. Hyperwürfel-Zerlegungen. $\sqrt{WURZEL}$ Heft 6/2021, S. 124ff.

Seitenlänge $\frac{m-2}{m-1}$, das wir in 4 Teilquadrate zerschneiden. Insgesamt sind es also $2 \cdot m + 1$ Teilquadrate.

Wir können aber auch mit den Beispielen für $n = 6, n = 7$ und $n = 8$ argumentieren, dass wir aus einer gegebenen Ausgangssituation mit k Teilquadraten für jede Anzahl der Form $k + 3 \cdot m$ Teilquadrate zerschneiden können, indem eines der Teilquadrate wiederholend in 4 Teilquadrate zerlegt wird. Da sich jede natürliche Zahl $n \geq 6$ als $6 + 3 \cdot m$, $7 + 3 \cdot m$ oder $8 + 3 \cdot m$ darstellen lässt, ist die Behauptung also bewiesen.

Wie auch bei den Dreiecken weisen wir nun nach, dass eine Zerlegung in $n = 5$ Teilquadrate nicht möglich ist. Wir stellen fest, dass die Seiten der Teilquadrate parallel zu Seiten des Ausgangsquadrates liegen. Außerdem liegen in vier der fünf Teilquadrate jeweils ein Eckpunkt des Ausgangsquadrates mit Seitenlänge 1, deren Seitenlängen a_1, a_2, a_3 und a_4 seien.

Es können höchstens auf einer Seites des Ausgangsquadrates nicht alle Punkte durch diese Teilquadrate bedeckt sein (denn für jede dieser Lücke ist ein weiteres Teilquadrat erforderlich). Entlang der anderen drei Seiten gilt deshalb (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen) $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_4 = 1$. Deshalb gilt $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$. Wäre nun $a_1 > \frac{1}{2}$, so wäre auch $a_1 > \frac{1}{2}$ und der Mittelpunkt des Ausgangsquadrates läge sowohl im Innern des Teilquadrates mit Seitenlänge a_1 als auch im Innern des Teilquadrates mit Seitenlänge a_3. Also muss $a_1 \leq \frac{1}{2}$ und $a_3 \leq \frac{1}{2}$ gelten. Daraus folgt aber $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$. Diese vier Teilquadrate überdecken das Ausgangsquadrat und es kann kein fünftes Teilquadrat in der Zerlegung geben.

❑

Die zweidimensionale Fragestellung mit Quadraten führt zum dreidimensionalen Zerlegungsproblem mit Würfeln. Offensichtlich können wir einen Würfel nicht in n Würfel mit $n < 8$ zerlegen, weil jeder Eckpunkt des Würfels in einem der n Teilwürfel liegen muss. Natürlich ist es möglich, einen Würfel in 8 Teilwürfel zu zerlegen. Kann ähnlich wie im zweidimensionalen Fall die folgende Frage beantwortet werden: Für welche natürliche Zahl n_0 ist eine Zerlegung eines Würfels in n Würfel für alle $n \geq n_0$ möglich?

Diese Thematik finden wir in einer Aufgabe im Buch **Felgenhauer A, Gronau H-D, …, Welk M. Die schönsten Aufgaben der Mathematik-Olympiade in Deutschland – 300 ausgewählte Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklassen 11 bis 13. Springer Verlag GmbH (**Deutschland, 2021) Dieses überaus empfehlenswerte Buch ist eine Fundgrube für das Olympiade-Training – auch für die Klassenstufen 9 und 10.

Aufgabe 12.15 – MO321242. Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in n Würfel zerlegt werden kann.

Lösungshinweise: Wenn wir eine Zerlegung in k Teilwürfel gefunden haben, können wir einen Würfel davon wegnehmen und in 8, 27, 64, … oder m^3 Teilwürfel zerlegen. Wir erhalten entsprechend $k+7$, $k+26$, $k+63$, … bzw. $k-1+m^3$ Teilwürfel. Wir könnten aber auch von den 27 erhaltenen Teilwürfeln 8 wieder zu einem größeren Teilwürfel zusammensetzen und erhalten 27 – 8 = 19 neue Teilwürfel, ebenso sind Zerlegungen in 64 – 27 = 37 Teilwürfel oder 64 – 8 = 56 Teilwürfel möglich. Wiederholen wir – beginnend mit $k=1$ – diese Zerlegungen nacheinander, sind beispielsweise folgende Zerlegungen für möglich: $k = 1 + t \cdot 7, 1 + t \cdot 19, 1 + t \cdot 37$. Dies lässt sich nun zu Zerlegungen in $1 + t \cdot 19 + m \cdot 7$, $1 + t \cdot 37 + m \cdot 7$ oder $1 + t_1 \cdot 37 + t_2 \cdot 19 + m \cdot 7$ Teilwürfel kombinieren.

Es ist nun eine besondere Herausforderung, für die sieben aufeinanderfolgenden Zahlen 100, 101, …, 106 solche Zerlegungen zu finden:

$100 = 1 + 3 \cdot 19 + 6 \cdot 7$ und damit auch für $100 + k \cdot 7$,
$101 = 1 + 1 \cdot 37 + 9 \cdot 7$ und damit auch für $101 + k \cdot 7$,
$102 = 1 + 2 \cdot 19 + 9 \cdot 7$ und damit auch für $102 + k \cdot 7$,
$103 = 1 + 2 \cdot 37 + 4 \cdot 7$ und damit auch für $103 + k \cdot 7$,
$104 = 1 + 1 \cdot 19 + 12 \cdot 7$ und damit auch für $104 + k \cdot 7$,
$105 = 1 + 4 \cdot 19 + 4 \cdot 7$ und damit auch für $105 + k \cdot 7$,
$106 = 1 + 15 \cdot 7$ und damit auch für $106 + k \cdot 7$ (jeweils $k \geq 0$). ❑

Als Nachtrag zur Olympiade-Aufgabe wird vermerkt, dass mit dieser 7-er, 19-er und 37-er Zerlegung $n_0 = 77$ gewählt werden kann, denn es gelten die Zerlegungen:

$77 = 1 + 4 \cdot 19$,
$78 = 1 + 1 \cdot 37 + 1 \cdot 19 + 3 \cdot 7$,
$79 = 1 + 3 \cdot 19 + 3 \cdot 7$,
$80 = 1 + 1 \cdot 37 + 6 \cdot 7$,
$81 = 1 + 2 \cdot 19 + 6 \cdot 7$,
$82 = 1 + 2 \cdot 37 + 1 \cdot 7$,
$83 = 1 + 1 \cdot 19 + 9 \cdot 7$.

In dem Artikel (s. Fußnote 6) aus der monatlich erscheinenden mathematischen Zeitschrift für Mathematik $\sqrt{WURZEL}$ (s. www.wurzel.org) wird sogar die Zerlegung für $n_0 = 48$ gezeigt. Allerdings sind einige der Zerlegungen in 48, 49, …, 54 Teilwürfel trickreich. Leicht zu sehen sind davon lediglich:

Wegen $48 = 3^3 + 3 \cdot 7$ ist die Zerlegung in 48 Teilwürfel möglich.
Wegen $50 = 1 + 7 \cdot 7$ ist die Zerlegung in 50 Teilwürfel möglich.

In dem Buch **Hemme H. Die Quadrate des Teufels – 112 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht GmbH & Co. KG** (Göttingen 2005) sind 7 Basiszerlegungen eines Würfels gezeichnet, mit denen wir die Zerlegungen um jeweils 7 weitere Teilwürfel fortsetzen können. Für 26 Anzahlen zwischen 9 und 47 sind keine solche Zerlegungen möglich.

Rückblick auf den 4. Tag der Mathematik[7]

Am 2. April 2022 fand der 4. TdM der Technischen Universität Chemnitz statt – erstmals nach 2019 wieder in Präsenz. Insgesamt 115 Schülerinnen und Schüler reisten an und nahmen auf 32 Teams verteilt am Wettbewerb teil, der den Untertitel „Mit Spaß muss man rechnen“ verdient hat. Für 30 begleitende Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte wurde ein umfangreiches Rahmenprogramm mit Ausstellung und interessanten Vorträgen geboten. Das Interesse bestätigte einmal mehr, wie sehr sich alle auf eine solche Präsenz-Veranstaltung gefreut haben.

Der knapp dreistündige Wettbewerb führte die Teams an fünf Stationen auf den Campus an der Reichenhainer Straße. „An den einzelnen Stationen der Rallye herrschte reger Betrieb, innerhalb der Teams wurde eifrig über Lösungsansätze für die Stationsaufgaben diskutiert“, berichtet Henrik Schumacher vom Organisationsteam der Fakultät für Mathematik.

Zwischenzeitlich fand eine Reihe von Fortbildungsmaßnahmen für Lehrerinnen und Lehrer, Referendarinnen und Referendare sowie mathematisch Interessierte statt. Einen faszinierenden Ausflug in die geheimnisvolle Welt des niederländischen Grafikers M. C. Escher[8] vermittelte Horst Martini, emeritierter Professor für Geometrie der TU Chemnitz. Anhand zahlreicher Bildbeispiele erläuterte er die tiefliegenden geometrischen Strukturen, die in Eschers Bilder erkennbar sind und in unmöglichen Lattenkisten, endlosen Treppengängen, Metamorphosen und kunstvollen Parkettierungen zum ästhetisch ansprechenden Ausdruck kommen. Um das nicht ganz einfache, aber dennoch für die Analysis grundlegende Konzept der Konvergenz von Zahlenfolgen ging es danach in Peter Stollmanns Vortrag “Grenzwerte — konvergiert sie oder konvergiert sie nicht?”. Der Professor für Analysis an der Fakultät für Mathematik, erklärte anhand dreier Zahlenfolgen, seinen

[7] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/11189 (Stand 09.04.2022)
[8] Maurits Cornelis Escher (geb. 1898 in Leeuwarden, gest. 1972 in Hilversum)

“drei Grazien”, wie der Konvergenzbegriff eng mit der Struktur der natürlichen und reellen Zahlen verwoben ist.

Zum Mittag verteilten sich die Gäste des 4. TdM in der Mathematikausstellung im Foyer des Hörsaalgebäudes sowie auf die drei Labore „Tomographie“, „Fraktale“ und „Origami“. „Das Labor ‚Origami‘ ist mittlerweile ein echter Dauerbrenner. Auch dieses Mal konnten Interessierte dekorative geometrische Körper bauen und dabei ihre Bastelfähigkeiten und ihre räumliche Vorstellung unter Beweis stellen“, berichtet FRANK GÖRING. Aus dem sogenannten SONOBÈ-Modul, das aus einem quadratischen Blatt gefaltet und anschließend mit weiteren derartigen Modulen zusammengesteckt wird, seien meist in Teamarbeit zahlreiche bunte Würfel und Sternikosaeder entstanden. Dabei tat sich immer wieder die spannende Frage auf: Wie viele unterschiedliche Farben werden benötigt, damit sich keine zwei gleichfarbigen Flächen an einer Kante berühren?

Um “Fraktale”, also Mengen mit hochgradig irregulärer Struktur, die aber dennoch in der Natur (z.B. Farnblätter, Küstenlinien, …) und in der Technik (z.B. Industrieschwämme, Polymermoleküle, …) immer wieder anzutreffen sind, ging es am Nachmittag im Hauptvortrag von Prof. Dr. UTA FREIBERG, Inhaberin der Professur Stochastik an der TU Chemnitz. Anhand bekannter Konstruktionen wie SIERPINSKI[9]-Dreieck und MENGER[10]-Schwamm erklärte sie nach zahlreichen Beispielen schließlich die fraktale Dimensionsformel und stellte fest: „Heute habt Ihr Objekte kennengelernt, deren Dimension nicht ganzzahlig ist — das ist ein guter Tag für Euch.“

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungsversuche zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. „Erstaunlicherweise wurde die besonders schwere Aufgabe, die sich mit dem MENGER-Schwamm befasste, vom Team ‚Sahnehäubchen‘ aus der Klassenstufe 10 bis 12, aber auch vom Team ‚Die Irrationalen‘ der Klassestufe 8 bis 9 komplett richtig gelöst“, so Schumacher. Bei der abschließenden Siegerehrung konnten sich aus den beiden Klassenstufen jeweils fünf Teams ihre Preise abholen. Erfolgreich waren hier Teams vom Gymnasium Olbernhau, vom Landkreis-Gymnasium St. Annen Annaberg-Buchholz, vom DPFA-Regenbogen-Gymnasium Augustusburg, vom Albert-Schweitzer-Gymnasium Limbach-Oberfrohna, vom Johann-Wolfgang-von-Goethe-Gymnasium Chemnitz, vom Johannes-Kepler-Gymnasium Chemnitz und vom Sächsischen Landesgymnasium Sankt Afra in Meißen.

[9] Waclaw Franciszek Sierpinski (geb. 1882 in Warschau, gest. 1969 in Warschau)
[10] Karl Menger (geb. 1902 in Wien, gest. 1985 in Chicago)

Gleichungssysteme mit Primzahlen

Wie bereits in der Lösungsdiskussion zu Aufgabe **KZM 4-3**[11] im Heft 02/22 nutzen Lösungsansätze für Gleichungssysteme mit Primzahlen im Allgemeinen nicht die bekannten Lösungsverfahren. Dies ist schon deshalb nicht vollständig möglich, weil mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen. Vielmehr kommt es darauf an, in der Umformung zur Faktorisierung zu gelangen, um die Primzahleigenschaften auszunutzen. Oft ist es hilfreich, Spezialfälle mit Primzahlen 2 und 3 zu untersuchen.

Aufgabe. Man ermittle alle Lösungen des Gleichungssystems

$$p_1 + p_2 = p_3^m$$
$$p_1 - p_2 = p_3^n$$

wobei p_1, p_2, p_3 Primzahlen und m und n natürliche Zahlen sind. Welche Werte können m und n annehmen?

Lösungshinweise: Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir

$$2 \cdot p_1 = p_3^n \cdot (p_3^{m-n} + 1)$$

Daraus ergeben sich aus der Faktorenzerlegung der linken Seite drei Möglichkeiten:

(1) $p_1 = p_3^n$, doch daraus folgt $p_2 = 0$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft-

(2) $p_3^n = 1$, wegen $p_3 > 1$ folgt $n = 0$ und daraus $p_1 - p_2 = 1$. Diese Gleichung ist für Primzahlen nur durch $p_1 = 3$ und $p_2 = 2$ zu erfüllen. Aus der ersten Gleichung erhalten wir mit $m = 0$ und $p_3 = 5$ eine Lösung des Gleichungssystems.

(3) $p_3^n = 2$, also $p_3 = 2$ und $n = 1$. Daraus folgt $p_1 = 2^{m-1} + 1$ und mit der zweiten Gleichung finden wir $p_2 = 2^{m-1} - 1$. Damit sind $p_2, 2^{m-1}, p_1$ drei aufeinanderfolgende Zahlen, von denen deshalb eine der Zahlen durch 3 teilbar ist. Da 3 kein Teiler von 2^{m-1} ist, muss $p_1 = 3$ oder $p_2 = 3$ gelten. Der Fall $p_1 = 3$ entfällt, weil dann $p_2 = 1$ im Widerspruch zur Primzahleigenschaft folgen würde. Mit $p_2 = 3$ erhalten wir mit $m = 3$ und $p_1 = 5$ eine weitere Lösung.

Es gibt also zwei Lösungen, die durch die Proben bestätigt werden:

[11] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

$$3 + 2 = 5^1 \qquad 5 + 3 = 2^3$$
$$3 - 2 = 5^0 \qquad 5 - 3 = 2^1$$

Weitere Lösung kann es nicht geben, wie aus der Herleitung erkennbar ist. ❑

Aufgabe – MO560946. Bestimmen Sie alle Tripel $(p; q; r)$ von Primzahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$p + q = r + 1$$
$$p \cdot r = q^2 + 6$$

Lösungshinweise: Wir setzen aus der ersten Gleichung $r = p + q - 1$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$p \cdot (p + q - 1) = q^2 + 6$$

also $(p + 2) \cdot (p - 3) = q \cdot (q - p)$ (*)

Wir suchen nun Lösungen in Abhängigkeit von p:

(1) $p = 2$, wegen $p - 3 < 0$ wird die linke Seite der Gleichung (*) negativ, ergibt also keine Lösung.
(2) $p = 3$, wegen $p - 3 = 0$ folgt aus Gleichung (*) $q = p$ und damit $r = 5$.
(3) $p \geq 5$, weil die linke Seite positiv ist, muss $q > p$ und somit $q \geq p + 2$ gelten. Da zudem q einen Faktor der linken Seite der Gleichung (*) teilt, gilt auch $q \leq p + 2$. Wir erhalten $q = p + 2$. Setzen wir diesen Zusammenhang in die Gleichung (*) ein, finden wir $p - 3 = 2$ und somit $p = 5$, also $q = 7$ und $r = 11$.

Wir finden somit zwei Lösungen (3;3;5) und (5;7;11), was wir durch die Proben bestätigen:

$$3 + 3 = 6 = 5 + 1 \qquad 5 + 7 = 12 = 11 + 1$$
$$3 \cdot 5 = 15 = 3^2 + 6 \qquad 5 \cdot 11 = 55 = 7^2 + 6$$

❑

Aufgabe. Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen. Dabei seien n_1 und n_2 natürlichen Zahlen und p_i $(i = 1; 2; \dots; 6)$ Primzahlen.

(1) $n_1 = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3$ (2) $n_2 = n_1 + 1 = p_4^2 \cdot p_5 \cdot p_6$
(3) $p_2 = p_3 - p_1^6$ (4) $p_3 = p_1 \cdot p_4^3 + p_6$
(5) $p_5 = p_2 + p_1 \cdot p_4$ (6) $p_6 = p_1^2 + p_2 + p_1 \cdot p_4$

Lösungshinweise: Wegen $p_5 > 2$ und $p_6 > 2$ sind beide Primzahlen ungeradzahlig und so folgt aus (5) und (6) mit $p_6 = p_1^2 + p_5$, dass $p_1 = 2$ gelten muss. Damit finden wir aus (2) die Gleichung

$$p_2 = 2 \cdot p_4^3 + p_6 - 64$$

Setzen wir dies in die Gleichung (6) ein, können wir sowohl p_2 als auch p_6 eliminieren und erhalten

$$p_4 \cdot (p_4^2 + 1) = 30$$

Aufgrund der Primfaktorenzerlegung $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ finden wir durch Probieren die Zuordnung $p_4 = 3$. Zur besseren Übersicht fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen:

$(1')\ n_1 = 4 \cdot p_2 \cdot p_3$ $\quad$ $(2')\ n_2 = n_1 + 1 = 9 \cdot p_5 \cdot p_6$
$(3')\ p_2 = p_3 - 64$ $\quad$ $(4')\ p_3 = 54 + p_6$
$(5')\ p_5 = p_2 + 6$ $\quad$ $(6')\ p_6 = 10 + p_2$

Ausgehend von (1‘) und (2‘) finden wir nun folgende Gleichung:

$$4 \cdot p_2 \cdot (p_2 + 64) + 1 = 9 \cdot (p_2 + 6) \cdot (p_2 + 10)$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$5 \cdot p_2^2 - 112 \cdot p_2 + 539 = 0$$

Mit der einzigen ganzzahligen Lösung $p_2 = 7$. Damit erhalten wir auch die Werte der anderen Primzahlen: aus (3‘) $p_3 = p_2 + 64 = 71$, aus (5‘) $p_5 = p_2 + 6 = 13$ und aus (6‘) $p_6 = p_2 + 10 = 17$, wobei die Variablen $n_1 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71 = 1988$ und $n_2 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 1989$ einen Gruß zum damaligen Jahreswechsel enthalten. ❑

Aufgabe. Es seien a und b ganze Zahlen und $p_i\ (i = 1, \ldots, 6)$ Primzahlen. Man ermittle alle derartigen Zahlen, die das folgende Gleichungssytem erfüllen:

$(1)\ a^6 - b^6 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ $\quad$ $(2)\ a^3 + b^3 = p_1 \cdot p_2$
$(3)\ a + b = p_1$ $\quad$ $(4)\ a \cdot b = p_4 \cdot p_5 \cdot p_6$

Lösungshinweise: Wegen $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3) \cdot (a^3 + b^3)$ finden wir aus (1) und (2) $a^3 - b^3 = p_3$. Wegen $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ erhalten wir aufgrund der Primzahleigenschaft von p_3 die Aussagen $p_3 = a^2 + ab + b^2$ und $a = b + 1$.

Wegen $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ erhalten wir zudem aus (2) und (3) $p_2 = a^2 - ab + b^2$, woraus $p_3 - p_2 = 2ab$ folgt.

Mit diesen Zusammenhängen finden wir folgende Umformung

$$p_1^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot (p_3 - p_2)$$

d.h. $\quad 2 \cdot p_1^2 = 3 \cdot p_3 - p_2$

Wäre p_1 durch 3 teilbar (also $p_1 = 3$), dann wäre $a = 2$ und $b = 1$ und das Produkt $a \cdot b$ könnte nicht das Produkt von drei Primzahlen sein. Also wissen wir: Es gilt $p_1 > 3$ und wegen $p_1 = a + b = 2 \cdot b + 1$ ist entweder b durch 3 teilbar oder b lässt bei Division durch 3 den Rest 2 und somit ist a durch 3 teilbar. In beiden Fällen ist das Produkt $a \cdot b$ durch 3 teilbar.

Nun untersuchen wir die Gleichung (4) und nehmen aufgrund der Symmetrie der drei Primzahlen auf der rechten Seite o.B.d.A.[12] die Ungleichung $p_4 \leq p_5 \leq p_6$ an. Weil $a \cdot b = b \cdot (b + 1)$ eine gerade Zahl ist, gilt $p_4 = 2$.

Weil das Produkt $a \cdot b$ durch 3 teilbar ist, gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) $p_5 = 3$. Es sind vier Primfaktorzerlegungen für $a \cdot b$ mit $a > b$ möglich:

(1a) $a = 2 \cdot p_5 = 6$ und $b = p_6$. Wegen $b = a - 1 = 5$ wäre dann p_3 mit $p_3 = a^2 + ab + b^2 = 36 + 30 + 25 = 91 = 7 \cdot 13$ keine Primzahl!
(1b) $a = p_5 = 3$ und $b = 2 \cdot p_6$. Wegen $b = a - 1 = 2$ ist dies jedoch nicht möglich, weil $b = 2 \cdot p_6 > 6$ gilt.
(1c) $a = 2 \cdot p_6$ und $b = p_5 = 3$. Daraus folgt $a = b + 1 = 4$.
(1d) $a = p_6$ und $b = 2 \cdot p_5 = 6$. Daraus folgt $a = b + 1 = 7$.

(2) $p_6 = 3$. Wegen der oben festgelegten Reihenfolge gibt es nur zwei Möglichkeiten:

(2a) $p_5 = 2$, d.h. $a \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Dafür ist mit $a = b + 1$ die Zerlegung $a = 4$ und $b = 3$ möglich und entspricht dem Fall (1c).
(2b) $p_5 = 3$, d.h. $a \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Dafür ist mit $a = b + 1$ keine Zerlegung möglich.

Wenn es Lösungen des Gleichungssystems gibt, so muss $a = 4$ und $b = 3$ oder $a = 7$ und $b = 6$ gelten. Für beide Zahlenpaare finden wir Tupel von sechs Primzahlen:

[12] Um den Hinweis „ohne Beschränkung der Allgemeinheit" zu verwenden, sollte eine kurze Begründung angegeben werden.

(1) $a = 4; b = 3$ mit $p_4 = 2;\ p_5 = 2; p_6 = 3$:

$p_1 = 4 + 3 = 7; p_2 = \frac{4^3+3^3}{7} = 13; p_3 = \frac{4^6-3^6}{7\cdot 13} = 37$

(2) $a = 7; b = 6$ mit $p_4 = 2;\ p_5 = 3; p_6 = 7$:

$p_1 = 7 + 6 = 13; p_2 = \frac{7^3+6^3}{13} = 43; p_3 = \frac{7^6-6^6}{13\cdot 43} = 127$

Aufgrund der Symmetrie in Gleichung (4) sind die Primzahlen p_4 bis p_6 beliebig vertauschbar.

Hinweis: Die Berechnungen für p_2 und p_3 sind über $a^2 \pm ab + b^2$ auch ohne Rechentechnik möglich. ❑

Aufgabe. Gegeben seien alle Primzahltupel $(p; q; r)$, für die die beiden Zahlen $s = pq - r$ und $t = pq + r$ ebenfalls Primzahlen sind. Man zeige, dass das Fünftupel $(p; q; r; s; t)$ die beiden Zahlen 2 und 3 enthält.

Lösungshinweise: Wenn jede der Primzahlen p, q und r ungeradzahlig wären, wären sowohl s als auch t geradzahlig. Es würde also wegen der Primzahleigenschaft $s = t = 2$ gelten – im Widerspruch zu $s < t$. Mindestens eine der Zahlen p, q und r ist also gleich 2.

Wenn keine der Primzahlen p, q und r durch 3 teilbar wäre, lässt das Produkt $p \cdot q$ bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Da auch r bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2 lässt, ist entweder $s = pq - r$ oder $t = pq + r$ durch 3 teilbar. Mindestens eine der Zahlen s und t ist also gleich 3. ❑

Hinweis: Aus der Aufgabenstellung wird nicht ersichtlich, ob es überhaupt solche Fünftupel gibt. Auch wenn ein entsprechender Nachweis nicht gefordert ist, sollten wir dies in der Nachbereitung prüfen. Schnell finden wir ein Beispiel wie im Beweis mit $2 \in \{p; q; r\}$ und $3 \in \{s; t\}$: $(2;\ 5;\ 7;\ 3;\ 17)$. Während aber die Zuordnung für die Zahl 2 zu den ersten drei Primzahlen notwendig ist, ist dies für die Zuordnung der Zahl 3 zu den letzten beiden Primzahlen nicht erforderlich, wie das Beispiel $(3;\ 3;\ 2;\ 7;\ 11)$ zeigt.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Angeregt durch die Aufgaben MO610935/MO611035 schlagen wir zum Thema Wahrscheinlichkeit nach[13]. Wir weisen jedoch ausdrücklich darauf hin, dass sich Begrifflichkeiten bis heute geändert haben.

[13] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

Lehrbuch
der
Arithmetik und Algebra
mit Übungs-Aufgaben
für höhere Lehranstalten
von Professor Dr. Th. Spieker

Vierte verbesserte Auflage
Verlag von August Stein, Potsdam, 1895

Anhang
Die mathematische Wahrscheinlichkeit
§ 273.

Diejenigen Fälle eines Ereignisses, welche unter den gleichmöglichen derselben der Erwartungen entsprechen, nennt man Treffer, diejenigen, welche der Erwartung nicht entsprechen, Nieten. Die Summe aller Treffer und Nieten ist daher gleich der Anzahl aller gleichmöglichen Fälle.

Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit, (Probabilität), eines Treffers versteht man das Verhältnis der Anzahl n der günstigen zur Anzahl N aller gleichmöglichen Fälle dieses Ereignisses. Die mathematische Wahrscheinlichkeit w dieses Falles wird daher durch den Bruch

$$w = \frac{n}{N}$$

ausgedrückt.

Da im allgemeinen $n < N$, so ist w ein echter Bruch. Trifft aber das Ereignis fortwährend zu, sind also alle möglichen Fälle günstige, so ist $n = N$ und $w = 1$. Ist kein Fall ein günstiger, so ist $w = 0$.

Ist $w = \frac{n}{N}$ die Wahrscheinlichkeit eines Treffers, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Niete $= \frac{N-n}{N} = 1 - w$. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten nennt man entgegengesetzte. Ist die Anzahl der Treffer größer als die der Nieten, ist also $w > \frac{1}{2}$, so heißt das Ereignis wahrscheinlich, ist dagegen $w < \frac{1}{2}$, so heißt das Ereignis unwahrscheinlich, und ist $w = \frac{1}{2}$, so ist es weder wahrscheinlich noch unwahrscheinlich.

Beispiele. 1. Aus einer Urne, in welcher 6 schwarze und 5 weiße Kugeln liegen, wird blindlings eine gezogen, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu treffen?
2. Aus derselben Urne, wie in 1, werden zugleich 2 Kugeln gezogen, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei weiße getroffen werden?
...

§ 274.

1. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

a. Hat ein Ereignis n günstige Fälle einer Art, n′ günstige einer anderen Art, die sich gegenseitig ausschließen, und ist der Treffer so bestimmt, daß entweder ein Fall der ersten, oder ein Fall der anderen Art eintritt, sind die Treffer coordiniert, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Treffers gleich der Summe der einfachen Treffer:

$$W = w + w'$$

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einem Spiele Whistkarten mit einem Zuge entweder ein Bild oder eine Zehn zu ziehen? Aufl. $w = \frac{16}{52} + \frac{4}{52} = \frac{5}{13}$.

b. Hat ein Ereignis n günstige Fälle einer Art und n′ günstige Fälle einer anderen Art, und ist der Treffer so bestimmt, daß ein Fall der ersten und ein Fall der anderen Art zugleich eintritt, sind die Treffer subordiniert, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeit der einfachen Treffer

$$W = w \cdot w'$$

Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, auf einem Spiele Whistkarten[14] in zwei Zügen hintereinander erst ein Bild und dann eine Zehn zu ziehen, ist $= \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{16}{663}$, erst eine Zehn und dann ein Bild, ist $w = \frac{4}{52} \cdot \frac{16}{51} = \frac{16}{663}$; daß die zwei gezogenen Karten ein Bild und eine Zehn, ist $w = 2 \cdot \frac{4 \cdot 16}{52 \cdot 51} = \frac{32}{663}$.

2. Relative Wahrscheinlichkeit. Wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten w, w′, w″ mehrere Treffer gegeben sind, kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß unter diesen Treffern einer derselben eintrifft. Diese relative Wahrscheinlichkeit ist der Quotient der absoluten Wahrscheinlichkeit w dieses Treffers und der Summe aller:

$$W = \frac{w}{w + w' + w''}$$

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfen eher einen Pasch, als 6 Augen zu werfen? Aufl. $w = \frac{1}{6} : \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}$.

[NB: Es folgen 22 Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit, darunter…]

10. Welche Wahrscheinlichkeit ist größer: einen Pasch zu 2, oder 3 unmittelbar aufeinander folgende Zahlen zu werfen und wie verhalten sich diese Wahrscheinlichkeiten?
15. Welche Wahrscheinlichkeit hat man mit 2 Würfeln, entweder einen Pasch, oder 1 und 2 zu werfen?

[14] Rommé-Karten

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[15]	Nr.	Thema	Aufgabe
April 2022	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610932 MO611031
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

---

[15] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.