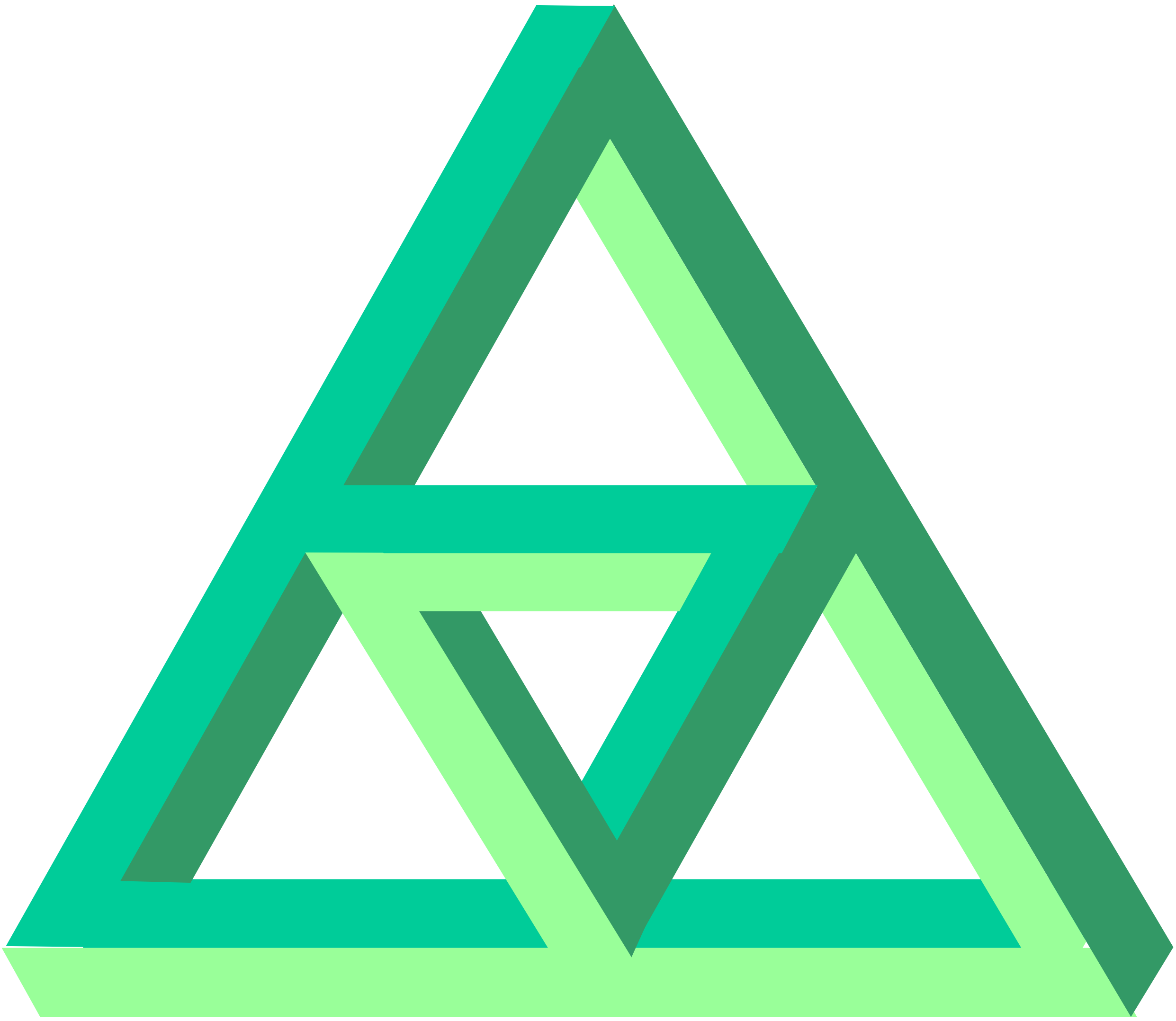
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft Januar 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungs-diskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zur Aufgabe **MO610921** im Thema 13 Bewegungsaufgaben. Da damit die Berechnungen von harmonischen und arithmetischen Mittelwerten verbunden sind, wird die „Familie“ der Mittelwerte in Theorie und Wettbewerbs-Anwendung vielfältig untersucht.

Ein Auszug aus einem Buch zur Geschichte der Mathematik soll unterhaltsam eine Anwendung von Mittelwerten mit dem Blick vor über 3500 Jahren zeigen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 13 – Bewegungsaufgaben

Aufgabe MO610921[3]. Niklas fährt jeden Tag mit dem Fahrrad zur Arbeit, und zwar immer denselben Weg und immer mit derselben konstanten Geschwindigkeit – außer letzten Dienstag, da war es anders. Da ist er die erste Hälfte seines üblichen Weges doppelt so schnell gefahren wie sonst, die letzten 3 km ist er halb so schnell gefahren wie sonst, und nur dazwischen ist er genauso schnell gefahren wie sonst. Amüsiert stellt er fest, dass er genau die gleiche Fahrzeit gebraucht hat wie sonst auch.

Wie lang ist sein Arbeitsweg? Weisen Sie nach, dass sich die Antwort auf diese Frage eindeutig ermitteln lässt.

Lösungshinweise: Es sei s die Länge des Arbeitswegs von Niklas in km, v die an normalen Tagen gefahrene Geschwindigkeit in km/h und t die Gesamtfahrzeit in h. An normalen Tagen gilt für die Fahrzeit $t = \frac{s}{v}$.

Die Strecke am Dienstag lässt sich in drei Abschnitte unterteilen. Im 1. Abschnitt mit $s_1 = 0{,}5s$ fährt Niklas mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2v$ und braucht damit die Zeit $t_1 = \frac{0{,}5s}{2v} = \frac{s}{4v}$. Im 2. Abschnitt mit $s_2 = 0{,}5s - 3$ fährt er mit der üblichen Geschwindigkeit $v_2 = v$ und benötigt die Zeit $t_2 = 0{,}5s - \frac{3}{v} = s - \frac{6}{2v}$. Im 3. Abschnitt mit $s_3 = 3$ fährt er mit der Geschwindigkeit $v_3 = 0{,}5v$ in der Zeit $t_3 = \frac{3}{0{,}5v} = \frac{6}{v}$.

Addieren der Zeiten $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{4v} + \frac{s-6}{2v} + \frac{6}{v}$ ergibt $t = \frac{3s+12}{4v}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Gleichung $\frac{3s+12}{4v} = \frac{s}{v}$. Multiplizieren mit $4v$ führt zu $3s + 12 = 4s$ und damit zu $s = 12$. Da die Rechenschritte des Lösungswegs an jeder Stelle eindeutig ausführbar sind, ist dies die einzig mögliche Lösung. Diese Lösung existiert tatsächlich, weil die Terme für die drei Teilzeiten mit $s = 12$ sämtlich nichtnegativ sind. Niklas hat damit einen Arbeitsweg von 12 km. ❑

Aufgabe - MO601031. Mareike fährt mit dem Fahrrad von Adorf nach Bedorf, Nina fährt dieselbe Strecke in die andere Richtung. Beide fahren zur selben Zeit los. Nach 21 Minuten sind sie 20 km voneinander entfernt. Nach weiteren 35 Minuten sind sie 12 km voneinander entfernt; zu diesem Zeitpunkt ist keine bereits an ihrem Ziel angekommen. Beide fahren die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit, die beiden Geschwindigkeiten können sich aber unterscheiden.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge der Strecke von Adorf nach Bedorf. Geben Sie jeweils geeignete Geschwindigkeiten für Mareike und Nina an.

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

Lösungshinweise: Zu Beginn fahren Mareike und Nina aufeinander zu. Nach den ersten 21 Minuten müssen sie weiterhin aufeinander zu fahren, da sie sonst nicht später noch mal weniger als 20 km voneinander entfernt sein könnten. Folglich errechnet sich die gesuchte Strecke als die Summe von 20 km und derjenigen Strecke, die sie beide zusammengerechnet in den ersten 21 Minuten zurücklegen.

Fahren sie die folgenden 35 Minuten ebenfalls aufeinander zu, so legen sie in dieser Zeit gemeinsam eine Strecke von 8 km zurück. In den ersten 21 Minuten legen sie daher gemeinsam eine Strecke von $\frac{21}{35} \cdot 8 = \frac{24}{5} = 4{,}8$ Kilometern zurück, die Gesamtstrecke beträgt daher 24,8 km.

Fahren sie in den genannten 35 Minuten nicht die ganze Zeit aufeinander zu, so begegnen sie sich währenddessen und fahren danach voneinander weg. Damit legen sie in dieser Zeit gemeinsam eine Strecke von 20 + 12 = 32 Kilometern zurück. In den ersten 21 Minuten legen sie also gemeinsam eine Strecke von $\frac{21}{35} \cdot 32 = \frac{96}{5} = 19{,}2$ Kilometern zurück, die Gesamtstrecke beträgt daher 39,2 km.

Wir zeigen noch durch Beispiele, dass die beiden gefundenen Längen für die Gesamtstrecke auch tatsächlich möglich sind:

Wenn die Gesamtlänge 24,8 km beträgt, so nehmen wir an, dass jede innerhalb von 21 Minuten genau 2,4 km zurücklegt. (Dies entspricht einer jeweiligen Geschwindigkeit von $2{,}4 \cdot \frac{60}{21}$ km/h, also etwa 6,86 km/h.) Der Abstand von Mareike und Nina reduziert sich in den ersten 21 Minuten von 24,8 km auf 20 km. In den folgenden 35 Minuten legt jede genau $\frac{35}{21} \cdot 12{,}4$ km = 4 km zurück. Sie fahren also auch in dieser Zeit nur aufeinander zu und ihr Abstand reduziert sich weiter auf 12 km, wie es verlangt war.

Beträgt die Gesamtlänge 39,2 km, so nehmen wir an, dass jede innerhalb von 21 Minuten genau 9,6 km zurücklegt. (Dies entspricht einer jeweiligen Geschwindigkeit von $9{,}6 \cdot \frac{60}{21}$ km/h, also etwa 27,43 km/h.) Der Abstand von Mareike und Nina reduziert sich in den ersten 21 Minuten von 39,2 km auf 20 km. In den folgenden 35 Minuten legt jede genau $\frac{35}{21} \cdot 9{,}6$ km = 16 km zurück. Sie begegnen sich also innerhalb dieser Zeit und entfernen sich danach voneinander, bis sich ihr Abstand wie gewünscht auf 12 km vergrößert hat.

Aufgabe MO580944/MO581044. Thomas fährt an jedem Werktag mit dem Auto zur Arbeit. Außerhalb geschlossener Ortschaften (Autobahn) fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 180 km/h. Auf den 10 km innerhalb geschlossener Ortschaften, welche zum Großteil aus Tempo-30-Zonen bestehen, fährt er im Schnitt 40 km/h. Dadurch ist er oft zu schnell und wurde in letzter Zeit häufig geblitzt.

Inzwischen hat er eingesehen, dass es so nicht weitergehen kann, und er nimmt sich vor, in Zukunft sowohl außerhalb geschlossener Ortschaften als auch innerhalb jeweils seinen Durchschnitt um 20 km/h zu reduzieren.

Kann dadurch seine Durchschnittsgeschwindigkeit für den Gesamtweg um exakt 40 km/h sinken? Wenn ja, geben Sie für diesen Fall alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge seines Weges zur Arbeit an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit y die Gesamtlänge der Strecke innerhalb geschlossener Ortschaften, mit x die Länge außerhalb, jeweils in Kilometern. Wir werden später $y = 10$ setzen. Früher brauchte Thomas für die gesamte Strecke $\frac{x}{180} + \frac{y}{40}$ Stunden; in Zukunft braucht er $\frac{x}{160} + \frac{y}{20}$ Stunden. Damit seine Durchschnittsgeschwindigkeit um exakt 40 km/h sinkt, muss daher die Gleichung

$$\frac{x+y}{\frac{x}{180}+\frac{y}{40}} - \frac{x+y}{\frac{x}{160}+\frac{y}{20}} = 40$$

gelten. Äquivalente Umformungen ergeben nacheinander:

$$\begin{aligned}
&(x+y)\cdot\left(\frac{180\cdot 40}{40x+180y} - \frac{160\cdot 20}{20x+160y}\right) = 40\\
&(x+y)\cdot\left(\frac{180}{40x+180y} - \frac{80}{20x+160y}\right) = 1\\
&(x+y)\cdot\left(\frac{9}{2x+9y} - \frac{4}{x+8y}\right) = 1\\
&(x+y)\cdot\big(9\cdot(x+8y) - 4\cdot(2x+9y)\big) = (2x+9y)\cdot(x+8y)\\
&x^2 + 37xy + 36y^2 = 2x^2 + 25xy + 72y^2\\
&x^2 - 12xy + 36y^2 = 0\\
&(x-6y)^2 = 0
\end{aligned}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit reduziert sich also genau dann um 40 km/h, wenn $x = 6 \cdot y$ gilt. Für $y = 10$ ist dies gleichbedeutend mit $x = 60$. Die Gesamtlänge der Strecke muss in diesem Fall also genau 70 km betragen. ❑

Hinweis: Eine Probe ist nicht nötig, da nur äquivalent umgeformt wurde. Direktes Einsetzen zeigt, dass sich die Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h auf 80 km/h reduziert.

Aufgabe MO470923. Max fährt immer mit der U-Bahn zur Schule. Er muss dazu an der Station „Schillerstraße“ aussteigen. Vom Bahngleis führen eine Treppe und eine Rolltreppe nach oben, Max hat jedoch die Angewohnheit, ausschließlich die Rolltreppe zu benutzen.

Max geht immer mit derselben Geschwindigkeit und hat festgestellt, dass er morgens auf dem Weg zur Schule, wenn er die Rolltreppe hinaufgeht, stets 15 Stufen zählt, und nachmittags auf dem Weg nach Hause, wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, 35 Stufen nehmen muss.
Diese Woche ist die Rolltreppe kaputt. Wie viele Stufen wird Max jetzt zählen, wenn er die Rolltreppe benutzt? (*Hinweis:* Der Effekt, dass die Treppenstufen am Anfang und am Ende der Rolltreppe ihre Höhe ändern und verschwinden, ist zu vernachlässigen.)

Lösungshinweise: Es sei x die gesuchte Anzahl Stufen. Des Weiteren sei v_M bzw. v_T die jeweilige Geschwindigkeit von Max bzw. der Rolltreppe (gemessen in Stufen pro Minute). Offensichtlich gilt $v_M > v_T$, sonst könnte Max die Rolltreppe nicht gegen die Fahrtrichtung überwinden.

Wie lange befindet sich Max auf dem Weg zur Schule auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt sich Max mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 15 Stufen zurück. Das macht $\frac{15}{vM}$ Minuten.
Einerseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M + v_T$, da er sich in Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch addieren. Das macht $\frac{x}{v_M+v_T}$ Minuten. Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$\frac{15}{v_M} = \frac{x}{v_M+v_T}, \qquad \text{also} \quad x = \left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15$$

Wie lange befindet sich Max auf dem Nachhauseweg auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 35 Stufen zurück. Das macht $\frac{35}{v_M}$ Minuten.
Andererseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M - v_T$, da er sich gegen die Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch subtrahieren. Das macht $\frac{x}{v_M-v_T}$ Minuten. Durch Gleichsetzen ergibt sich $\frac{35}{v_M} = \frac{x}{v_M-.v_T}$. Nach äquivalenten Umformungen erhalten wir $x = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35$. Nun können wir das Verhältnis beider Geschwindigkeiten bestimmen, denn es gilt:

$$\left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15 = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_T}{v_M} = \frac{2}{5}$$

Dies eingesetzt führt zu

$$x = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 15 = 21$$

Die Rolltreppe hat also 21 Stufen. ❑

Thema 13 – Bewegungsaufgaben (Aufgaben)

Aufgabe – MO560941/MO561041. Tom fährt mit seinem E-Bike von seiner Arbeitsstelle nach Hause. Er fährt um 19:00 Uhr los. Auf den ersten 4 km geht es bergab, dort fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Es folgen 12 km ebener Radweg, den er mit 20 km/h zurücklegt. Dann muss er einen Berg hinauffahren; auf der Strecke von 3 km Länge bringt er es lediglich auf 10 km/h. Abschließend fährt er noch mal auf ebener Strecke 5 km mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Um schneller voranzukommen, kann er den Elektromotor seines Fahrrads dazuschalten. Dadurch erhöht sich seine Geschwindigkeit um 5 km/h. Allerdings ist der Akku schon recht leer, so dass er das nur für insgesamt 10 Minuten tun kann.

Wann kann er frühestens zu Hause sein?

Aufgabe – MO520922/MO521022. Velo Flitzeped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h und dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene wieder mit 20 km/h. Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

Aufgabe – MO490932/MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Man zeige, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Man zeige, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Hinweis: Es wird für diese Aufgabe angenommen, dass die Züge auf den jeweiligen Strecken mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

Aufgabe – MO460921/MO461021. Die Läuferinnen Karla, Lili und Momo sind bekannt dafür, dass sie als Schlussläuferinnen ihrer (3×1000 m)-Staffeln mit der Gleichmäßigkeit eines Uhrwerks ihre Runden drehen. Beim letzten Staffelrennen gewann Momo auf jeweils 50 m ihrer Laufstrecke 5 m gegen Lili und hatte im Ziel 20 m Vorsprung vor dieser. Karla holte auf jeweils 200m ihrer Laufstrecke 15 m zu Lili auf, doch rettete diese einen knappen Vorsprung von 1 m vor Karla ins Ziel.

Welche Läuferin ging als letzte auf ihre 1000-m-Strecke und wie groß waren zu diesem Zeitpunkt ihre Rückstände auf die beiden Konkurrentinnen?

Nachtrag zu Thema 12 – Aufgaben mit Flächenzerlegung

Auch wenn folgende Aufgaben nicht direkt den im Thema 12 beschriebenen Prinzipien folgen, sind es reizvolle Fragestellungen:

Aufgabe – MO291045. Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Aufgabe – MO350931. Beweisen Sie, dass man ein gleichseitiges Dreieck so in 1996 gleichseitige Teildreiecke zerschneiden kann, dass es unter je 5 dieser Teildreiecke zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

(*Ergänzung:* In welchem Jahr könnte die Aufgabe mit Bezug zur Jahreszahl erneut gestellt werden?)

Aufgabe – MO351031. Beweisen Sie, dass man ein Quadrat so in mehr als vier Teilquadrate zerschneiden kann, dass es unter je 4 dieser Teilquadrate zwei gibt, die zueinander nicht kongruent sind!

(*Ergänzung:* Lässt sich die Aufgabe anstatt mit „… ein Quadrat …“ durch eine zu einer Jahreszahl passenden Angabe formulieren.)

Aufgabe – MO271036. Eine Ebene E sei durch vertikale und horitontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm x 2 cm so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen
- Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke i9n kleinere Flächenstücke.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Mittelungleichungen als Beweismethode

Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit v aus den Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ und $v_2 = \frac{s_2}{t_2}$ hängt eng mit dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel zusammen. Wird die Mittelung für gleiche Zeiteinheiten $t = t_1 = t_2$ berechnet, so gilt:

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{2 \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t}\right) = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)$$

Wir berechnen also das arithmetische Mittel der Teilgeschwindigkeiten.

Wird dagegen die Mittelung für gleiche Wegstrecken $s = s_1 = s_2$ berechnet, so gilt:

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Wir berechnen also in diesem Fall das harmonische Mittel der Teilgeschwindigkeiten. Diesen Bezug nehmen wir zum Anlass, die bekannten Mittelungleichungen für positive reelle Zahlen x_1 bis x_n ($n > 0$) zwischen dem harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel zu betrachten:

$$\min(x_1, \dots, x_n) \le \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \max(x_1, \dots, x_n).$$

Diese Ungleichungen können wir oft für Abschätzung nutzen und damit den Beweis für Ungleichungen führen.

Aufgabe. Für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 6$ folgt stets $x^2 + y^2 + z^2 \ge 12$.

Lösungshinweise: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Mittelungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \ge \frac{x + y + z}{3} = 2$$

❑

Aufgabe. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise: Es gilt stets

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} + b^2 \cdot \sqrt{ac} + c^2 \cdot \sqrt{ab} \le a^3 + b^3 + c^3$$

Lösungshinweise: Mit Hilfe der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel finden wir folgende Abschätzung:

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 \cdot bc} = \sqrt{a^3 \cdot abc} \leq \frac{a^3 + abc}{2}$$

Wenden wir diese Beziehungen analog für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addieren wir die insgesamt drei Ungleichungen, so erhalten wir auf der rechten Seite

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}$$

Nun ist aber auch (wiederum aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel)

$$abc = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Setzen wir dies in der Ungleichung ein, ist die Richtigkeit der Behauptung sofort ersichtlich. ❑

Hinweis: Es ist darauf zu achten, dass die Anzahl der Faktoren unter der Wurzel mit dem Wurzel-Exponenten übereinstimmt. Dies einhaltend könnten wir die obige Umformung auch anders fortsetzen:

$$a^2 \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a^4 \cdot bc} = \sqrt[6]{(a^4)^3 \cdot b^3 \cdot c^3} = \sqrt[6]{(a^3)^4 (b^3)(c^3)} \leq \frac{4a^3 + b^3 + c^3}{6}$$

Wenden wir diese Beziehungen ebenso für die anderen zwei Summanden der behaupteten Ungleichung an und addieren wir die insgesamt drei Ungleichungen, erhalten wir unmittelbar Behauptung.

Aufgabe. Man beweise: Für alle reelle Zahlen x, y, z mit $0 \leq x, y, z \leq 1$ und $x + y + z = 1$ gilt

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Lösungshinweise: Aus der Mittelungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel folgt:

$$\sqrt[3]{(1-2x)^2(1-2y)^2(1-2z)^2} \leq \frac{3 - 2 \cdot (x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2}{3} \leq \frac{1}{3}$$

also $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}$. Wegen

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) = 1 - 2 \cdot (x + y + z) + 4 \cdot (xy + yz + xz) - 8xyz$$

erhalten wir mit der Voraussetzung $x + y + z = 1$ daraus die gesuchte Ungleichung.

Ist $z \geq \frac{1}{2}$ und deshalb $x \leq y \leq \frac{1}{2}$, gilt trivialerweise $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq 0 < \frac{1}{27}$ und die Behauptung kann wie eben bewiesen werden. ❑

Aufgabe. Es seien a, b, c die Seitenlängen eines (nicht zu einer Strecke entarteten) Dreiecks und p der halbe Umfang dieses Dreiecks. Man beweise:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}$$

Lösungshinweise: Wegen der gültigen Dreiecksungleichungen sind die Nenner jeweils positiv, beispielsweise gilt $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$. Setzen wir nun $x = \frac{1}{p-a}, y = \frac{1}{p-b}, z = \frac{1}{p-c}$, so folgt aus der Mittelungleichung zwischen dem harmonischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{3}{p} = \frac{3}{p-a+p-b+p-c} = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

❑

Aufgabe. Man finde für die natürliche Zahl n ($n > 0$) eine Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$.

Lösungshinweise: In naheliegender Weise nutzen wir die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)-mal} \cdot n} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + n}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Mit wachsendem n nähert sich die Grenze der Zahl 2. Für $n = 4$ finden wir 1,75 und für $n = 100$ erhalten wir 1,99.

Setzen wir jedoch einige Werte für n in den Wurzelausdruck ein, erkennen wir ein anderes Verhalten:

$$\begin{array}{llll} n = 2 \Rightarrow & \sqrt[2]{2} \approx 1{,}4142 & ; \quad n = 3 \Rightarrow & \sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422 \\ n = 4 \Rightarrow & \sqrt[4]{4} \approx 1{,}4142 & ; \quad n = 5 \Rightarrow & \sqrt[5]{5} \approx 1{,}3797 \\ n = 10 \Rightarrow & \sqrt[10]{10} \approx 1{,}2589 & ; \quad n = 100 \Rightarrow & \sqrt[100]{100} \approx 1{,}0471 \end{array}$$

Die gefundene Abschätzung ist offensichtlich nicht in der Lage, diese Beobachtung richtig zu beschreiben. Für $n \geq 2$ lässt sich obige Idee der Mittelungleichung aber besser ausnutzen:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-2)-mal} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n}$$

Nun ergibt sich für $n = 4$ der Wert 1,5 und für $n = 100$ erhalten wir 1,18.

Mit dieser Idee der Aufspaltung von n lässt sich für $n \geq 4$ die Abschätzung weiter verbessern:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-4)-mal} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}} \leq \frac{(n-4) \cdot 1 + 4 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Das Ergebnis sieht nun nicht nur einfacher aus, es beschreibt zudem übersichtlicher das Verhalten der Werte für wachsendes n. Wir erhalten beispielsweise für $n = 4$ wiederum 1,5, für $n = 100$ dagegen 1,1. ❑

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

Beweise:

(1) Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel:

Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel:

Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel:
Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$, also $\frac{a}{b} \leq 1$ an, so finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ die linke äußere Abschätzung. Zudem folgt aus $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung.

Folgerung. Die Ungleichungskette zwischen den Mitteln kann auf endlich viele positive reelle Zahlen $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ $(n\ >\ 1)$ verallgemeinert werden:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}.$$

Für den Beweis nutzen wir folgenden

Hilfssatz. Für positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ gilt stets

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

Beweis mittels der Methode der vollständigen Induktion[4].
(1) Induktions-Anfang: Für $n = 1$ gilt laut Voraussetzung $x_1 = 1$ und damit $x_1 \leq 1$
(2) Induktions-Schritt

Ind.-Voraussetzung: Es gelte für ein n:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$

Ind.-Behauptung: Es ist zu zeigen, dass dann gilt:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1$

Ind.-Beweis: O.B.d.A. sortieren wir die Folge so, dass $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$ gilt. Dann ist $x_1 \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1 \\ \Rightarrow \quad & x_2 + x_3 + \cdots + x_n + (x_1 + x_{n+1} - 1) = n \\ \Rightarrow \quad & x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt

[4] In den Wettbewerben der Mathematik-Olympiade wird die korrekte Anwendung der Methode der vollständigen Induktion in Klassenstufen 9/10 nicht erwartet.

$$(x_{n+1}-1)(x_1-1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_{n+1}x_1 \leq x_{n+1}+x_1-1$$

Insgesamt folgt also:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \leq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - 1) \leq 1$$

(3) Induktions-Schluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt somit die behauptete Gleichung für alle $n > 0$. ❑

Für den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung setzen wir nun

$$c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad ; \quad x_i = \frac{a_i}{c} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

dann gilt $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{c} = n$

Daraus folgt wegen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{c^n} \leq 1$$

also

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq c = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

unmittelbar die Behauptung der Folgerung. Die Beweise zu (2) und (3) lassen sich nun auf *n* reelle Zahlen übertragen:

(2‘) Aus

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

folgt nach Übergang zu den Reziproken auf beiden Seiten mit Umkehrung des Relationszeichen die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem harmonischen und geometrischen Mittel.

(3‘) Wegen $(x_i - x_j)^2 \geq 0$ mit $1 \leq i,j \leq n$ folgt $2x_ix_j \leq x_1^2 + x_2^2$. Damit finden wir

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n)\\ &\leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (n-1) \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = n \cdot (x_1^2 + \cdots + x_n^2)\end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten durch n^2 und ziehen wir die Quadratwurzel, so erhalten wir die verallgemeinerte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel.

Den Beweis der verallgemeinerten Mittelungleichung können wir auch ohne diesen Hilfssatz führen, indem wir zunächst die Variablenanzahl in jedem Schritt verdoppeln (anstatt um eine Variable zu erhöhen, „Vorwärts"-Induktionsschritt). Dazu betrachten wir die positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$. Gilt sowohl

$$x_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = x_{arithm} \text{ und}$$
$$y_{geom} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = y_{arithm},$$

so können wir die Mittelungleichung für die Mittelwerte anwenden:

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k}} = \sqrt{x_{geom} \cdot y_{geom}} \leq \frac{x_{arithm} + y_{arithm}}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k}{2n},$$

also gilt die Mittelungleichung auch für $2n$ Variablen. Nun gehen wir schrittweise zurück ("Rückwärts"-Induktionsschritt):

Es sei n keine Zweierpotenz mit $n < 2^k$ Wir setzen $a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ und (mit $m = 2^k$) definieren wir weitere Variablen $x_{n+1} = \cdots = x_m = a$. Nun gilt bereits $\sqrt[m]{\prod_{k=1}^{m} x_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k}{m}$. Wir formen weiter um:

$$a = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\frac{m}{n}(x_1 + \cdots + x_n)}{m} = \frac{x_1 + \cdots + x_n + (m-n) \cdot a}{m}$$

Für $(m-n) \cdot a$ können wir nun aber $x_{n+1} + \cdots + x_m$ einsetzen und haben somit eine Zweierpotenz als Anzahl der Variablen. Deshalb gilt

$$a \geq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}}$$

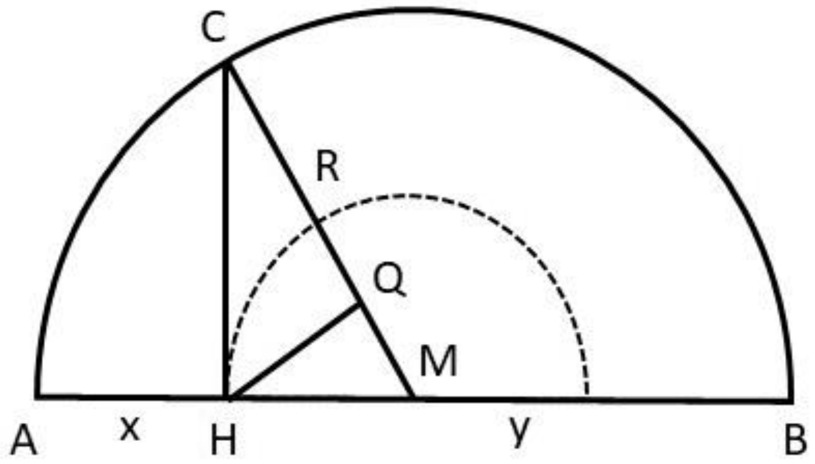
Nach Potenzieren finden wir

$$a^m \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a^{m-n}, \text{ also } a^n \geq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

womit die verallgemeinerte Mittelungleichung auch für n Variablen bewiesen ist. ❑

Geometrische Interpretation der Mittelungleichungen

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ und dem rechten Winkel bei C. Der Mittelpunkt des zugehörigen Thaleskreises sei M. Der Fußpunkt des Lotes von C auf die Hypotenuse sei H, der die Hypotenuse in die Hypotenusenabschnitte x und y teilt, o.B.d.A. gelte $x \leq y$. Der Fußpunkt des Lotes von H auf $\overline{MC}$ sei Q.



Dann finden wir folgende Zusammenhänge:

Wegen $x + y = |\overline{AB}|$ ist $|\overline{AM}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ das arithmetische Mittel von x und y und es gilt $|\overline{AM}| = \frac{x+y}{2} \leq y$.

Nach Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\overline{CH}$ das geometrische Mittel von x und y und als Kathete im rechtwinkligen Dreieck HMC gilt somit $|\overline{CH}| = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = |\overline{MC}|$.

Weil die rechtwinkligen Dreiecke MCH und QCH ähnlich sind (Ähnlichkeitssatz www), gilt $|\overline{QC}| = |\overline{CH}| \cdot \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{MC}|} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Somit ist im rechtwinkligen Dreieck QCH die Ungleichung $|\overline{QC}| = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} = |\overline{CH}|$ erfüllt.

Zeichnen wir schließlich um M den Halbkreis mit dem Radius $|\overline{HM}| = \frac{y-x}{2}$, so schneidet die Kreislinie die Strecke $\overline{MC}$ in einem Punkt R zwischen Q und C. Folglich gilt auch $|\overline{CR}| = \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} = x \leq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = |\overline{CQ}|$.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Berechnung von Mittelwerten hat eine mindestens 4000 Jahre lange Geschichte. In

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotanien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3 – Mathematik in Mesopotanien
Abschnitt 3.4 – Hinweise zur babylonischen Mathematik (Seiten 236ff)

wird vom babylonischen Wurzelziehen berichtet: Will man für eine Nichtquadratzahl N die Quadratwurzel ziehen, sucht man eine vollständige Quadratzahl a^2 mit $a^2 < N$. Dann ist a eine Näherung von $\sqrt{N}$. Intuitiv ist aber auch $b = \frac{N}{a} > a$ eine Näherung von $\sqrt{N}$. In der Schreibweise der Mittel erweist sich $\sqrt{N}$ als das geometrische Mittel der Näherungen a und b. Wegen $a < \frac{a+b}{2} < b$ ist das arithmetische Mittel von a und b eine bessere Näherung für $\sqrt{N}$. Für das arithmetische Mittel können wir aber auch

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{N}{a}\right)$$

schreiben[5]. Diese Formel finden wir heute im Heron-Verfahren für das Wurzelziehen. HERON VON ALEXANDRIA (um 60 u. Z.) hat dieses Verfahren im Gegensatz zum babylonischen Verfahren ausdrücklich als Iteration beschrieben.

Geometrisch lässt sich das babylonische Verfahren wie folgt beschreiben: Falls eine Fläche keine Quadratzahl N ist, sucht man eine vollständige Quadratzahl $a^2 < N$, teilt die Differenz $N - a^2 = r$ in 4 gleiche Teile und fügt diese in alle Windrichtungen an a^2 an. Man erhält also ein Quadrat a^2 mit 4 angesetzten Rechtecken ab mit $b = \frac{r}{4a}$. Ergänzt man in den Ecken je ein kleines Quadrat mit der Seite b, so ergibt sich ein Quadrat mit der Seite $a + 2 \cdot \frac{r}{4a} = a + \frac{r}{2a}$. Somit gilt:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

[5] Die Quadratwurzel $\sqrt{N}$ ist das geometrische Mittel aus a und b. Bezeichnen wir den Näherungswert $\frac{a+b}{2}$ mit a_1 und bilden wir in gleicher Weise wie oben $b_1 = \frac{N}{a_1}$, dann erhalten wir unter Verwendung von $N = ab$ den Zusammenhang: $b_1 = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, d.h. die Näherung b_1 ist das harmonische Mittel aus den beiden ersten Näherungen a und b.

Als Näherungswert für $\sqrt{2}$ wurde damals $\frac{17}{12}$ angegeben, mit $1{,}416\overline{6}$ schon ein recht genauer Wert. Diesen Bruch erhalten wir mit Hilfe der Näherung $a = \frac{4}{3}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} \approx \frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{16}{12} + \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

aber auch mit $a = \frac{3}{2}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \approx \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{18}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

Doch es waren für $\sqrt{2}$ weit bessere Näherungswerte bekannt. Dies ist mit der mehr als 3500 Jahre alten babylonischen Tontafel YBC 7289[6] (Bestandteil der Yale Babylonian Collection, einer Sammlung von Keilschrifttafeln aus dem Zeitraum zwischen 3000 v. Chr. und der frühen christlichen Zeit) belegt. Auf dieser Tafel ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 30 und den eingezeichneten Diagonalen zu sehen. Als Länge der Diagonale wird 42,4263… angegeben. Dies bedeutet aber eine Näherung $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$.

Von besonderem Interesse ist diese Darstellung durch die Schreibweise im Sexagesimalsystem[7]. Als Zahlenzeichen wurden 1 bis 59 verwendet, schreibbar mit „Keilen" ( für die Einer) und „Winkel" ( für die Zehner), zum Beispiel  für 23 (entwickelt aus einem davor verwendeten Mischsystem aus Dezimal- und Sexagesima-Zahlen). Jedoch gab es kein Zeichen für 0 und es wurde kein Sexagesimal-Komma verwendet. Anstelle der Aneinanderreihung von Zahlen wie (3 17 20 12) würden wir heute die Strukturierung einfügen, um eine eindeutige Darstellung zu ermöglichen:

$$(3; 17, 20{,}12) = 3 \cdot 60^0 + \frac{17}{60} + \frac{20}{60^2} + \frac{12}{60^3} = 3{,}7153\ldots$$

oder aber

$$(3{,}17; 20{,}12) = 3 \cdot 60^1 + 17 \cdot 60^0 + \frac{20}{60} + \frac{12}{60^2} = 197{,}336\ldots$$

Die Seitenlänge 30 kann somit tatsächlich den Wert 30 bedeuten. Auf der Tafel ist für $\sqrt{2}$ die Zahl $(1; 24{,}51{,}10) = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}41421\ldots$ angegeben. Multipliziert mit 30 ergibt dies $(42; 25{,}35) = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42{,}4263\overline{8}$. Dies ist als Ergebnis der Diagonalenlänge auf der Keilschrifttafel angegeben!

[6] Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/YBC_7289 (zuletzt 15.01.2022)

[7] Zahlensystem zur Basis 60.

Es könnte aber auch sein, dass mit 30 die erste Stelle nach dem Komma im Sexagesimalsystem gemeint ist, also $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Weil aber $\frac{1}{2}$ ein 60-tel von 30 ist, bedeutet das für das Ergebnis eine Verschiebung um eine Stelle, also (0; 42, 25, 35). Dies ist in alter Schreibweise (45 25 35) jedoch kein Unterschied.

Obwohl auf Keilschrifttafeln das babylonische Verfahren nicht als iterative Prozedur beschrieben wurde, erhalten wir mit dem Startwert $\frac{17}{12}$ für $\sqrt{N}$ den Näherungswert

$$\sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{2\cdot\frac{17}{12}} = 1\,\frac{169}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{35}{60^4} + \cdots$$

Auflösung der Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021

Es sei $\{a_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge von ganzen Zahlen. Die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen ist 57. Weiter gelte $a_{40} = 24$ und $a_{80} = 12$. Bestimmen Sie die ersten drei Folgeglieder a_1, a_2 und a_3.

Lösungshinweise: Aufgrund der Bedingung $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 57$ für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \ldots$ gilt insbesondere

$$a_{38} + a_{39} + a_{40} = 57 = a_{37} + a_{38} + a_{39}, \text{ also } a_{40} = a_{37}.$$

Setzen wir dies fort, gilt ebenso für jede ganze Zahl $k \geq 0$ die Beziehung

$$a_{40} = a_{3\cdot k+1} = 24.$$

In gleicher Weise finden wir

$$a_{78} + a_{79} + a_{80} = 57 = a_{77} + a_{78} + a_{79}, \text{ also } a_{80} = a_{77},$$

woraus $a_{80} = a_{3\cdot k+2} = 12$ folgt.

Insbesondere gilt damit $a_1 = 24$, $a_2 = 12$ und $a_3 = 57 - 24 - 12 = 21$.

Die Lösung lautet passend zum Weihnachtsfest (24, 12, 21). ❑

Inhaltsverzeichnis Heft Januar 2022

Vorwort ... 2
Thema 13 – Bewegungsaufgaben ... 3
Thema 13 – Bewegungsaufgaben (Aufgaben) ... 7
Nachtrag zu Thema 12 – Aufgaben mit Flächenzerlegung ... 8
Mittelungleichungen als Beweismethode ... 9
Bekannte Sätze der Mathematik ... 12
Geometrische Interpretation der Mittelungleichungen ... 15
In alten Mathe-Büchern geblättert ... 17
Auflösung der Aufgabe zum Weihnachtsfest 2021 ... 19

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[8]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[8] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.