Hallo,

toll, dass du an der 2. Runde des diesjährigen LOGO-Korrespondenzzirkels teilgenommen hast. Darüber habe ich mich sehr gefreut.

Bei der Punktevergabe wurde nicht nur das richtige Ergebnis im Antwortsatz bewertet. Auch für die Herleitung, die Begründung oder die Probe wurden Punkte vergeben.

Bewertung	**Teil A**				**Teil B**		
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**B1**	**B2**	**B3**
Deine Punktzahl	?	?	?	?	?	?	?
Mögliche Punktzahl	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**

Du hast insgesamt **? Punkte** von 20 möglichen Punkten erreicht! Das ist ein gutes (10 bis 14 Punkte), sehr gutes (15 bis 18 Punkte), tolles (19 Punkte) oder ganz tolles (20 Punkte) Ergebnis! Deshalb lade ich dich ein, auch an der 3. Runde teilzunehmen.

Ich wünsche dir weiterhin viel Spaß und Erfolg beim Knobeln und Rechnen.

Es grüßt dich herzlich

Norman Bitterlich

Vergleiche nun deine Lösungen mit den folgenden Hinweisen.

LOGO – Runde 2: In der Backstube (Teil A)

Aufgabe 1 - Antwortsatz: Insgesamt hat Familie Geometrie 99 Plätzchen ausgestochen, bevor Frau Dreieck noch 5 Plätzchen dazu legte.

Herleitung: Eine solche Aufgabe kannst du mit einer Tabelle lösen. Wenn du eine Anzahl Plätzchen für Frau Dreieck annimmst, kannst du aufgrund der Angaben im Text die Anzahl aller Plätzchen ermitteln.

Hinweis: Kürze zur Vereinfachung der Schreibweise die Namen mit dem Anfangsbuchstaben ab und verwende diesen Buchstaben als Variable für die Anzahl der Plätzchen.

D	R = 2 · D	Q = R + D	K = Q + R	Gesamt	<100?	+5	>100?
1	2	3	5	11	Ja	16	Nein
2	4	6	10	22	Ja	27	Nein
...							
8	16	24	40	88	Ja	93	Nein
9	**18**	**27**	**45**	**99**	**Ja**	**104**	**Ja**
10	20	30	50	110	Nein		

Nur wenn Frau Dreieck 9 Plätzchen ausstach, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die entsprechende Zeile in der Tabelle beinhaltet zugleich die Probe.

Lösungsvariante: Verwendest du wieder die Anfangsbuchstaben als Variablen für die Anzahlen der ausgestochenen Plätzchen, so findest du folgende Zusammenhänge:

$R = 2 \cdot D$, $Q = R + D = 2 \cdot D + D = 3 \cdot D$, $K = Q + R = 3 \cdot D + 2 \cdot D = 5 \cdot D$

$D + R + Q + K = D + 2 \cdot D + 3 \cdot D + 5 \cdot D = 11 \cdot D$

Nun soll gelten $11 \cdot D < 100$, aber $11 \cdot D + 5 > 100$.

Diese Ungleichungen sind nur für $D = 9$ erfüllt. Prüfe nun mittels Probe, dass $D = 9$ tatsächlich zu Lösung führt.

****

Aufgabe 2 - Antwortsatz: Am Anfang waren 24 Kekse in der Dose.

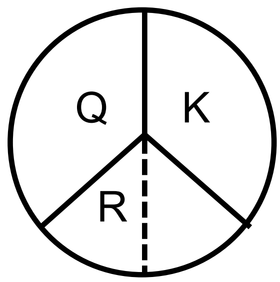
Herleitung: Auch diese Aufgabe kannst du durch Probieren lösen. Trage in eine Tabelle ein, wie viele Kekse jeder aus der Dose genommen hat, wenn anfangs eine bestimmte Anzahl Kekse in der Dose war. Prüfe dabei, ob alle Bedingungen erfüllt sind.

Da Quadrato ein Drittel der Kekse nahm, muss die Anzahl der Kekse in der Dose eine durch 3 teilbare Zahl sein.

Kekse in der Dose	Q: ein Drittel	Rest	K: die Hälfte	Rest	R = Q - 4	Rest	Rest = R?
3	1	2	1	1	Geht nicht		
6	2	4	2	2	Geht nicht		
9	3	6	3	3	Geht nicht		
12	4	8	4	4	0	4	Nein
15	5	10	5	5	1	4	Nein
18	6	12	6	6	2	4	Nein
21	7	14	7	7	3	4	Nein
24	**8**	**16**	**8**	**8**	**4**	**4**	**Ja**
27	9	18	9	9	5	4	Nein

Nur wenn anfangs 24 Kekse in der Dose waren, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die entsprechende Zeile in der Tabelle beinhaltet zugleich die Probe.

Lösungsvariante: Veranschauliche dir die Anteile, die sich Quadrato, Kreisa und Herr Raute nahmen, in einer Grafik:



Quadrato nahm sich ein Drittel. Übrig bleiben zwei Drittel.

Davon nahm sich Kreisa die Hälfte, also ebenfalls ein Drittel von der Anzahl, die anfangs in der Dose waren Kreisa nahm sich also genau so viele Kekse wie Quadrato.

Herr Raute nahm sich vom Rest die Hälfte, denn es waren ja noch so viele in der Dose wie sich Herr Raute genommen hat. Also hat Herr Raute halb so viele Kekse genommen wie Quadrato, doch das waren 4 Kekse weniger als Quadrato. Doch nur wenn Quadrato 8 Kekse nahm, ergeben 4 Kekse weniger die Hälfte davon.

Also waren am Anfang (3 · 8 =) 24 Kekse in der Dose.

****

Aufgabe 3 - Antwortsatz: Wenn die Zutaten nur halten, wenn ein Guss verwendet wird, sind es 12 verschiedene Möglichkeiten. Kann dagegen jede Zutat auch ohne Guss verwendet werden, sind es insgesamt 17 Möglichkeiten.

Begründung: Kürze die Zutaten zur Vereinfachung der Schreibweise ab, zum Beispiel so: Schokoguss – SG, Zuckerguss – ZG, Mandeln – M, Haselnüsse – H und bunte Streusel – BS.

Verwenden Quadrato und Kreisa SG, dann sind folgende 6 Verzierungen möglich:

SG, SG + M, SG + H, SG + BS, SG + M + BS, SG + H + BS

Verwenden sie ZG, dann sind folgende 6 Verzierungen möglich:

ZG, ZG + M, ZG + H, ZG + BS, ZG + M + BS, ZG + H + BS

Das sind insgesamt (6 + 6 =) 12 Verzierungen.

Wenn es möglich ist, die Plätzchen auch ohne SG oder ZG zu verzieren, dann sind auch noch folgende 5 Verzierungen möglich:

M, H, BS, M + BS, H + BS

Dann sind es insgesamt (12 + 5 =) 17 Verzierungen.

****

Aufgabe 4 - Antwortsatz: Herr Raute war der Übeltäter.

Probe: Wenn Herr Raute der Übeltäter war, hat er gelogen. Auch Frau Dreieck hat gelogen (sie verdächtigte Quadrato). Quadrato hat auch gelogen (er verdächtigte Kreisa). Dagegen sagte Kreisa die Wahrheit. Also hat nur eine die Wahrheit gesagt und die anderen drei logen – die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt.

Hinweis: Jedoch ist mit der Probe noch nicht nachgewiesen, dass es nicht noch eine andere Lösung geben könnte. Deshalb ist eine Herleitung erforderlich.

Variante 1: Nimm der Reihe nach an, wer die Wahrheit gesagt haben könnte. Prüfe in jedem Fall, ob die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Beachte, dass die anderen drei gelogen haben.

(1) Wenn Frau Dreieck die Wahrheit sagte, war Quadrato der Übertäter. Aber dann hätten Kreisa und Herr Raute auch die Wahrheit gesagt – was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(2) Wenn Quadrato die Wahrheit sagte, dann war es Kreisa. Aber dann hätte auch Herr Raute die Wahrheit gesagt – was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(3) Wenn Kreisa die Wahrheit sagte, dann war sie nicht der Übeltäter. Dann hat Quadrato gelogen. Da sowohl Frau Dreieck als auch Herr Raute gelogen haben müssen, ist Herr Raute der Übeltäter.
(4) Wenn Herr Raute die Wahrheit sagte, haben entweder Quadrato oder Kreisa auch die Wahrheit gesagt - was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Nur im Fall (3) sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllbar und Herr Raute ist somit als Übeltäter überführt.

Bestimmt ist dir aufgefallen, dass sich die Aussagen von Quadrato und Kreisa widersprechen – sie können nicht beide gleichzeitig Recht haben. Also hat einer von ihnen die Wahrheit gesagt und der andere hat gelogen. Mit dieser Feststellung verkürzt sich die Auswertungen:

- Entweder sagte Quadrato die Wahrheit, dann gilt das Ergebnis von (2),
- oder Kreisa sagte die Wahrheit, dann gilt das Ergebnis von (3).
- Da nur einer die Wahrheit sagt, sind keine weiteren Fälle möglich.

Variante 2: Nimm der Reihe nach an, wer der Übeltäter gewesen sein könnte. Prüfe in jedem Fall, ob die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

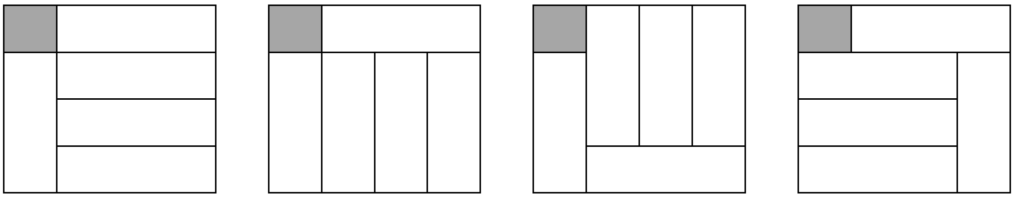
(1) Wenn Frau Dreieck der Übeltäter war, dann haben Kreisa und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

(2) Wenn Quadrato der Übeltäter war, dann haben Kreisa und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(3) Wenn Kreisa der Übeltäter war, dann haben Quadrato und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(4) Wenn Herr Raute der Übeltäter war, dann sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllbar.

****

LOGO – Runde 2: Flächen bedecken (Teil B)

Aufgabe 1(a) – Antwortsatz: Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten.



A B C D

Begründung: Nach einigen Versuchen erkennst du:

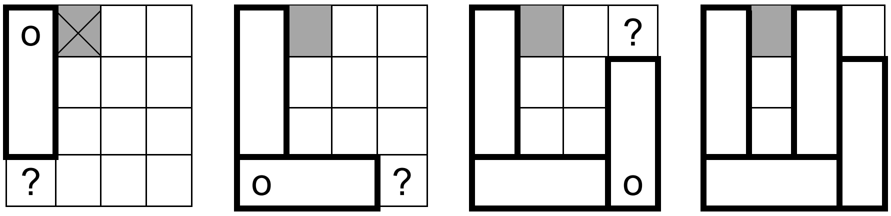
- An die linke Seite passt genau ein Stein senkrecht unter das gesperrte Feld. Dann kann der Rest der Fläche durch 4 waagegerechte Steine bedeckt werden (Beispiel A).
- Soll dagegen auf dem Rest der Fläche ein Stein senkrecht liegen, dann gelingt dies nur wie in den Beispielen B oder C.
- Soll dagegen an den linken Rand ein Stein waagerecht gelegt werden, ist nur die Belegung wie im Beispiel D möglich.

Aufgabe 1(b) – Antwortsatz: Nur bei gesperrten Eckfeldern ist eine Bedeckung möglich.

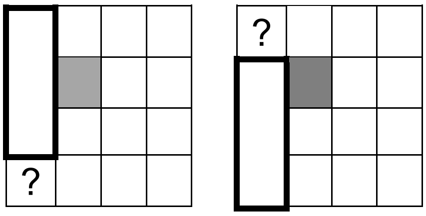
Begründung: Zeige, dass mit der Lage des ersten Steines bereits die Lage der anderen Steine vorgegeben ist.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe genügt es, die Beispiele zu zeichnen, wenn damit alle möglichen Versuche abgebildet werden. Die folgende ausführliche Lösungsdarstellung wird nicht erwartet.

Möglichkeit 1: Quadrato versucht, ein Randfeld neben einem Eckfeld zu sperren. Dann muss der erste Stein so an den Rand gelegt werden, dass das abgegrenzte Eckfeld (o) bedeckt wird. Dann entsteht aber links unten ein neues abgegrenztes Eckfeld (?). Der nächste Stein muss dieses Feld bedecken. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit. Dann entsteht aber rechts unten ein neues abgegrenztes Eckfeld (?), sodass der nächste Stein dieses Feld bedecken muss. Nun ist nur noch für einen Stein Platz übrig, es bleiben drei nicht zusammenhängende Felder frei.



Möglichkeit 2: Sperrt Quadrato ein mittleres Feld, so muss er daneben einen Stein legen. In jedem Fall entstehen wieder abgegrenzte Eckfelder (?). Damit ist die Lage des nächsten Steins bereits festgelegt und führt zum Ergebnis wie in der ersten Möglichkeit.



Warum genügt es, nur diese beiden Möglichkeiten zu untersuchen?

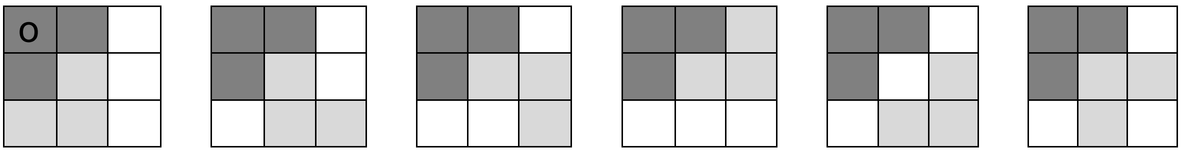
- Jedes andere Randfeld kann durch Drehung oder Spiegelung des 4x4-Quadrates auf die Lage wie im Fall A gebracht werden.
- Jedes andere Mittelfeld kann durch Drehung oder Spiegelung des 4x4-Quadrates auf die Lage wie im Fall B gebracht werden.

  ****

Aufgabe 2a – Antwortsatz: Es gelingt nicht, ein 3x3-Quadrat mit drei Winkelsteinen zu bedecken.

Begründung:

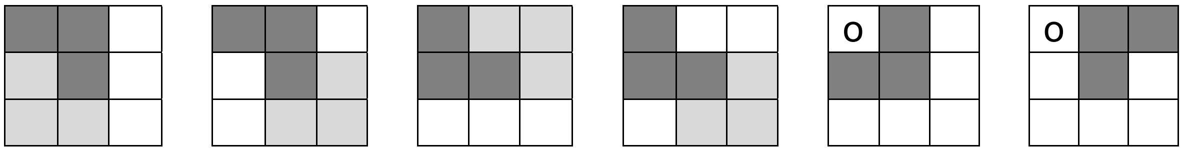
Variante 1: Finde alle Möglichkeiten, zunächst zwei Winkelsteine auf das 3x3-Quadrat zu legen. Wenn du einen Winkelstein so legst, dass die linke obere Ecke (o) bedeckt wird, passt der zweite Winkelstein in 6 verschiedenen Möglichkeiten auf das 3x3-Quadrat. Du erkennst, dass dann für einen dritten Winkelstein kein Platz mehr ist.



A1 B1 C1 D1 E1 F1

Wenn du den ersten Winkelstein wie in Abbildung A2 oder A3 legst, gibt es jeweils nur zwei Möglichkeiten, den zweiten Winkelstein (A2 oder B2 bzw. A3 und B3) zu legen – und wieder passt kein dritter Winkelstein auf das 3x3-Feld.

Bleibt aber das linke obere Eckfeld (o) unbedeckt wie in den Abbildungen A4 und A5, erkennst du, dass dieses Feld durch keinen anderen Winkelstein mehr bedeckt werden kann.

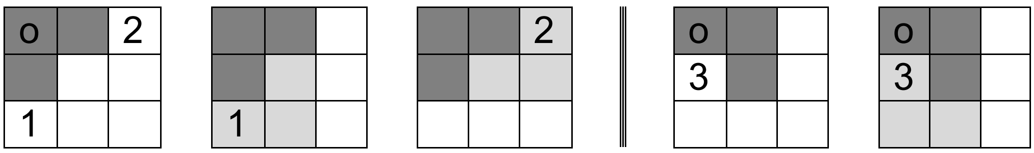


A2 B2 A3 B3 A4 A5

Variante 2: Du kannst versuchen, das 3x3-Quadrat lückenlos zu bedecken. Dabei muss das linke obere Eckfeld (o) mit einem Winkelstein bedeckt werden.

Du kannst einen Winkelstein wie in Abbildung A1 legen. Im nächsten Schritt muss das Eckfeld 1 oder 2 bedeckt werden. Das geht aber nur wie in Abbildung B1 oder C1 – es bleibt immer ein Streifen aus 3 Feldern übrig, die nicht mit einem Winkelstein bedeckt werden können.

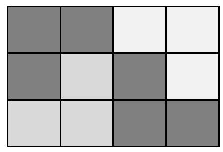
Du kannst aber auch einen Winkelstein wie in Abbildung A2 legen. Im nächsten Schritt ist das Feld 3 zu bedecken – das geht aber nur wie in Abbildung B2 – und wieder bleibt ein Streifen aus 3 Feldern wie schon bei Abbildung B1 übrig.



A1 B1 C1 A2 B2

****

Aufgabe 2b – Antwortsatz: Quadrato kann ein 3x4-Rechteck mit 4 Winkelsteinen bedecken.



Zur Begründung genügt die Angabe eines Beispiels.

****

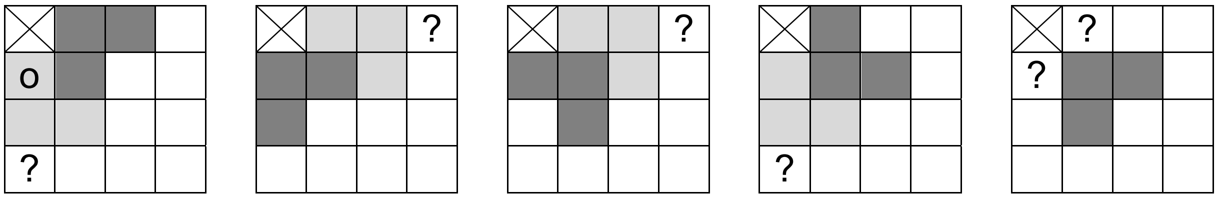
Aufgabe 3a - Antwortsatz: Es gibt nur eine Möglichkeit, das 4x4-Quadrat mit Winkelsteinen vollständig zu überdecken, wenn das linke obere Eckfeld gesperrt ist.

Begründung: Lege einen Winkelstein an das Sperrfeld und untersuche, ob du dann das 4x4-Quadrat bedecken kannst.

Wenn im Beispiel A der dunkle Stein zuerst liegt, muss der helle Stein wie angegeben gelegt werden, damit das abgegrenzte Randfeld (o) bedeckt wird. Doch dann kann das Eckfeld links unten (?) nicht bedeckt werden.

Das Beispiel B entspricht dem Beispiel A.

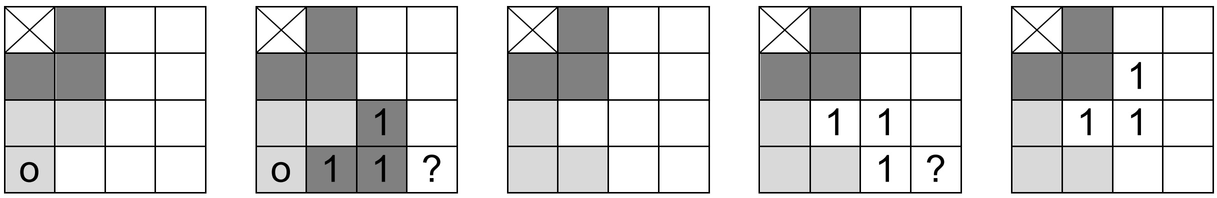
Mit gleicher Begründung sind auch die Beispiele C und D nicht erfolgreich fortsetzbar. Im Beispiel E sind sogar sofort in der linken Spalte und in der oberen Zeile nicht bedeckbare Felder zu erkennen.



A B C D E

Wenn es eine Bedeckung gibt, muss der erste Stein das gesperrte Eckfeld offenbar umschließen. Nun gibt es nur zwei Möglichkeiten, das Eckfeld links unten (o) zu bedecken. Legst du den Winkelstein wie im Beispiel F, ist schon mit dem nächsten Stein (1) zu erkennen, dass das 4x4-Quadrat nicht bedeckt werden kann (Beispiel G), weil das nächste Eckfeld (?) nicht mehr bedeckt werden kann.

Versuche es also mit dem 2. Winkelstein wie im Beispiel H. Der nächste Stein darf aber nicht wie im Beispiel I gelegt werden (1), weil dann die rechte untere Ecke (?) nicht mehr belegt werden kann. Dagegen kann das Beispiel J erfolgreich bedeckt werden.



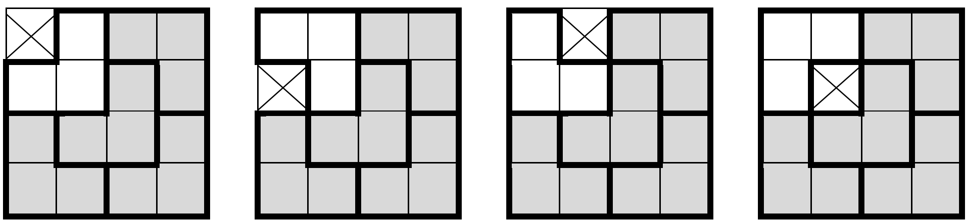
F G H I J

****

Aufgabe 3b – Antwortsatz: Quadrato kann jedes Feld des 4x4-Quadrates sperren. In jedem Fall lässt sich die verbleibende Fläche mit 5 Winkelsteinen bedecken.

Zur Begründung genügt die Angabe geeigneter Beispiele.

Für ein gesperrtes Eckfeld ist die Möglichkeit in Aufgabe 3a bereits gezeigt. Für ein gesperrtes Randfeld und für ein gesperrtes Mittelfeld findest du schnell eine passende Bedeckung:



Für jedes andere gesperrte Feld musst du das 4x4-Quadrat nur solange drehen, bis die Lage des gesperrten Feldes eines der obigen Beispiele entspricht. Ist dir aufgefallen, dass die grauen Winkelsteine ihre Lage nicht verändern, auch wenn das gesperrte Feld geändert wurde?