Hallo «Vorname»,
(Hinweis: Mit diesem Text wird der Teilnehmer persönlich angesprochen.)

toll, dass du an der 2. Runde des diesjährigen LOGO-Korrespondenzzirkels teilgenommen hast. Darüber habe ich mich sehr gefreut.

Bei der Punktevergabe wurde nicht nur das richtige Ergebnis im Antwortsatz bewertet. Auch für die Herleitung, die Begründung oder die Probe wurden Punkte vergeben.

Bewertung	**Teil A**				**Teil B**					
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**B1a**	**B1b**	**B1c**	**B2a**	**B2b**	**B2c**
Deine Punktzahl										
Mögliche Punktzahl	**3**	**3**	**3**	**3**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**

Du hast insgesamt **... Punkte** von 20 möglichen Punkten erreicht! Das ist ein gutes (10-14 Punkte)/sehr gutes (15-19 Punkte)/tolles (20 Punkte) Ergebnis. Ich wünsche dir weiterhin viel Spaß und Erfolg beim Knobeln und Rechnen.
(Ab 10 Punkte:) Ich lade dich ein, nun auch an der 3. Runde teilzunehmen.

Es grüßt dich herzlich

Norman Bitterlich

Vergleiche nun deine Lösungen mit den folgenden Hinweisen!

LOGO – Runde 1: **Büchsen abräumen** (Teil A)

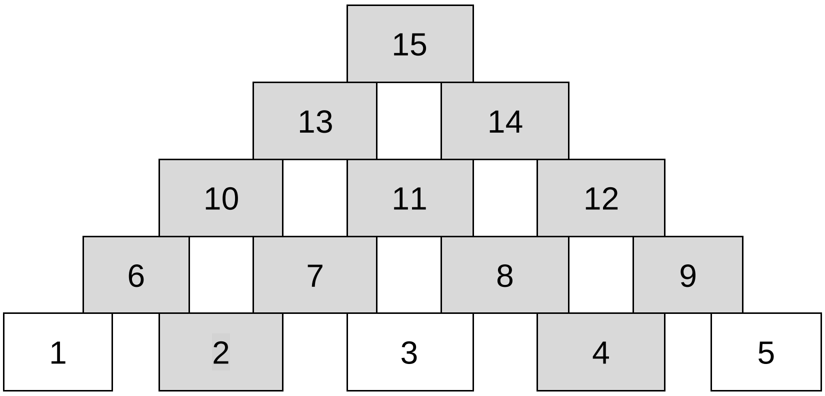
Aufgabe 1a. *Antwortsatz.* Quadrato muss mindestens fünfmal werfen, um alle Büchsen abzuräumen.

Begründung: Wird eine Büchse getroffen, so werden nur darüberstehende Büchsen abgeräumt, nicht aber andere Büchsen aus der gleichen Reihe. Um alle Büchsen abzuräumen, muss Quadrato also alle fünf Büchsen der untersten Reihe treffen. Für jede Büchse benötigt er einen Wurf.

Aufgabe 1b. *Antwortsatz.* Quadrato kann mit zwei Würfen maximal 12 Büchsen abräumen.

Begründung: Eine Pyramide mit fünf Etagen besteht aus (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15 Büchsen. Mit zwei Würfen können nur 2 Büchsen der untersten Reihe abgeräumt werden. Also bleiben mindestens 3 Büchsen stehen und es können maximal (15 – 3 =) 12 Büchsen abgeräumt werden.

Durch ein Beispiel ist zu zeigen, dass es gelingen kann: Trifft Quadrato die Büchsen mit den Nummern 2 und 4, so werden alle Büchsen der zweiten bis fünften Etagen abgeräumt, es bleiben nur die Büchsen 1, 3 und 5 stehen.



****

Aufgabe 2. *Antwortsatz:* Kreisa hat 16 Möglichkeiten, Pyramiden zu bauen.

Herleitung: Nur eine Büchse ist natürlich keine aufgebaute Pyramide. Wir suchen also nur die Möglichkeiten, bei denen die Pyramiden in der untersten Etage mindestens zwei Büchsen haben. Zunächst finden wir heraus, wie viele Büchsen Kreisa für eine Pyramide benötigt. Dabei stellen wir fest, dass sich die Anzahl der Büchsen der nächstgrößeren Pyramide jeweils um die Anzahl der Büchsen in der neu hinzukommenden untersten Etage erhöht.

Anzahl Büchsen in unterster Reihe	Anzahl aller Büchsen	Berechnung
2	3	
3	6	3 + 3
4	10	6 + 4
5	15	10 + 5
6	21	15 + 6
7	28	21 + 7
8	36	28 + 8

Kreisa beginnt immer mit möglichst großen Pyramiden. Wenn sie eine Pyramide mit 36 Büchsen baut, kann sie aus den verbleibenden 4 Büchsen keine vollständigen Pyramiden mehr bauen.

Kreisa kann eine Pyramide aus 28 Büchsen bauen. Würde sie nun eine Pyramide aus 10 Büchsen bauen, kann sie die verbleibenden 2 Büchsen nicht zu einer vollständigen Pyramide bauen. Deshalb hat sie genau drei Möglichkeiten, aus den verbleibenden 12 Büchsen Pyramiden zu bauen:

(1) zwei Pyramiden mit 6 Büchsen,
(2) eine Pyramide mit 6 Büchsen und zwei Pyramiden mit drei Büchsen,
(3) vier Pyramiden aus 3 Büchsen.

Wir tragen alle diese und weitere Versuche in einer Tabelle ein. Wir stellen fest: Wenn die großen Pyramiden gebaut wurden, dann können die verbleibenden Büchsen nur dann zu vollständigen Pyramiden verbaut werden, wenn die Anzahl der verbleibenden Pyramiden ein Vielfaches von 3 ist.

Nr.	Große Pyramiden					verbleibende Anzahl Büchsen	6	3
	36	28	21	15	10			
	1					4	geht nicht	
		1			1	2	geht nicht	
1		1				12	2	0
2		1				12	1	2
3		1				12	0	4
			1	1		4	geht nicht	
4			1		1	9	1	1
5			1		1	9	0	3
6				2	1	0	0	0
				1	2	5	geht nicht	
7				1	1	15	2	1
8				1	1	15	1	3
9				1	1	15	0	5
10					4	0	0	0
11					1	30	5	0
12					1	30	4	2
13					1	30	3	4
14					1	30	2	6
15					1	30	1	8
16					1	30	0	10

****

Aufgabe 3. *Antwortsatz.* Alle vier räumten insgesamt 60 Büchsen ab.

Herleitung: Eine solche Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Benutze dafür eine Tabelle. Trage in die erste Spalte ein, wie viele Büchsen Quadrato abgeräumt haben könnte. Mithilfe der Aussagen (a) bis (c) findest du heraus, wie viele Büchsen dann die anderen abgeräumt haben. Mit der Aussage (d) kannst du prüfen, ob du damit die Lösung gefunden hast. Wir benutzen die Anfangsbuchstaben der Namen (Q, K, R, D) als Variablen für die Anzahl der Büchsen, die sie abgeräumt haben.

Q	Aussage (a) Q + 5 = K	Aussage (b) 2 · Q = R	(c) D = K	Aussage (d)		
				D + K	R + Q	Vergleich
1	1 + 5 = 6	2 · 1 = 2	6	6 + 6 = 12	2 + 1 = 3	12 > 3
2	2 + 5 = 7	2 · 2 = 4	7	7 + 7 = 14	2 + 4 = 6	14 > 6
Wir können einige Versuche überspringen.						
9	9 + 5 = 14	2 · 9 = 18	14	14 + 14 = 28	9 + 18 = 27	28 > 27
10	**10 + 5 = 15**	**2 · 10 = 20**	**15**	**15 + 15 = 30**	**10 + 20 = 30**	**30 = 30**
11	11 + 5 = 16	2 · 11 = 22	16	16 + 16 = 32	11 + 22 = 33	32 < 33

Lösungsvariante: In der ersten Zeile der Tabelle haben wir bereits Gleichungen eingetragen. Mit diesen können wir die Lösung finden, ohne zu probieren. Es soll gelten:

(a) $Q + 5 = K$ (b) $2 \cdot Q = R$ (c) $D = K$ (d) $D + K = R + Q$

In die Gleichung (d) tragen wir solche Beziehungen ein, die nur Q enthalten:

$$Q + 5 + Q + 5 = 2 \cdot Q + Q$$

In dieser Gleichung können wir nun zusammenfassen und finden das Ergebnis für Quadratos Büchsenanzahl:

$2 \cdot Q + 10 = 3 \cdot Q$, also $Q = 10$.

Nun kannst du mit den Gleichungen (a) bis (c) ausrechnen, wie viele Büchsen die anderen abräumten, und den Antwortsatz schreiben.

Weitere Lösungsvariante: Kreisa hat 5 Büchsen mehr als Quadrato und Frau Dreieck hat genauso viele Büchsen wie Kreisa. Also haben Kreisa und Frau Dreieck zusammen 10 Büchsen mehr als Quadrato. Da Quadrato und Herr Raute zusammen genauso viele Büchsen wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen abräumten, hat auch Herr Raute 10 Büchsen mehr als Quadrato abgeräumt. Weil Herr Raute doppelt so viele Büchsen wie Quadrato abräumte, hat Quadrato 10 Büchsen abgeräumt.

Nun kannst du ausrechnen, wie viele Büchsen die anderen abräumten, und den Antwortsatz schreiben.

****

Aufgabe 4. *Antwortsatz.* Quadrato hat den Wettbewerb gewonnen.

Begründung: Nur ein Tipp war richtig, alle anderen stimmten nicht. Wir untersuchen deshalb, welcher Tipp der richtige gewesen sein könnte.

Angenommen, Kreisas Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Herrn Raute hatte nicht recht, er war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Kreisas Tipp nicht richtig.

Angenommen, Quadratos Tipp war richtig. Dann war Kreisas Tipp falsch und Kreisa hat weniger Büchsen abgeräumt als Quadrato, war also hinter Quadrato platziert. Auch Herrn Raute hatte nicht recht und er war ebenfalls hinter Quadrato plaziert. Da auch der Tipp von Frau Dreieck nicht stimmte, hat sie den Wettbewerb nicht gewonnen. Also wurde Quadrato der Erste.

Obwohl wir jetzt eine Lösung kennen, prüfen wir auch noch die Aussagen von Herrn Raute und Frau Dreieck, ob sie auch zu einer Lösung führen:

Angenommen, Herrn Rautes Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Kreisa hatte nicht recht, sie war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Herrn Rautes Tipp nicht richtig.

Angenommen, Frau Dreiecks Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Kreisa hatte nicht recht, sie war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Frau Dreiecks Tipp nicht richtig.

Nur wenn Quadratos Tipp richtig war, stimmten alle anderen Tipps nicht. In diesem Fall kann Quadrato als Gewinner des Wettbewerbs eindeutig ermittelt werden.

Lösungsvariante: Wir können prüfen, wie viele Aussagen richtig (r) und wie viele Aussagen falsch (f) sind, wenn wir den Sieger kennen. Wir legen dafür eine Tabelle an. Als erstes untersuchen wir die Aussage (b). Wenn wir nicht genau wissen, ob diese Aussage richtig ist, probieren wir zunächst die Möglichkeit, diese Aussage sei falsch:

Sieger	Aussage (b)	Aussage (a)	Aussage (c)	Aussage (d)
Kreisa	f	r	r	f
Quadrato	r	f	f	f
Herr Raute	f	r	r	f
Frau Dreieck	f	r	r	r

Wenn Quadrato nicht Sieger war, kann Aussage (b) nicht richtig sein, weil es noch eine andere Aussage gibt, die richtig ist. Nur wenn Quadrato gewann, sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

****

LOGO – Runde 1: **Spiel mit Domino-Steinen** (Teil B)

Aufgabe 1a. Mit den Dominosteinen 2-4 und 4-1 beträgt die Summe aller Punktzahlen 35.

Hinweis: Es genügt die Angabe der richtigen Steine und die Probe, dass die Summe 35 beträgt. Die Lösung ist deshalb durch Probieren mit Domino-Steinen zu finden. Aber du kannst die Lösung auch herleiten. Dazu schreiben wir statt der Fragezeichen Buchstaben.

1	**1**	**1**	**5**	**5**	**3**	**3**	**2**	**a**	**b**	**c**	**d**	**1**	**2**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

a = 2, b = c, d = 1.

Außerdem soll gelten

$$35 = 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + a + b + c + d + 1 + 2 =$$
$$1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + b + b + 1 + 1 + 2 = 27 + 2 \cdot b$$

Damit findest du b = 4.

Aufgabe 1b. *Antwortsatz.* Es müssen die Dominosteine 4-5, 5-6 und 6-6 ergänzt werden.

2	**1**	**1**	**3**	**3**	**6**	**6**	**4**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

$a = 4$, $b = c$, $d = e$.

Außerdem soll gelten

$$58 = 2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 6 + 4 + a + b + c + d + e + f =$$
$$2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 6 + 4 + 4 + b + b + d + d + f =$$
$$30 + 2 \cdot b + 2 \cdot d + f$$

also muss die Gleichung

$$28 = 2 \cdot b + 2 \cdot d + f$$

erfüllt sein. Die größte Punktzahl, die du für b einsetzen kannst, ist b = 5 (weil der Domino-Stein 4-6 schon verwendet wurde).

Aus $28 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot d + f$ folgt die Gleichung $18 = 2 \cdot d + f$. Da d und f nicht größer als 6 sind, gibt es nur die Möglichkeit d = 6 und f = f, um diese Gleichung zu erfüllen.

Setzt du für b eine kleinere Zahl als 5, so wäre $2 \cdot d + f > 18$, was nicht möglich ist.

Aufgabe 1c. *Antwortsatz.* Da die Summe der bereits sichtbaren Punktzahlen eine ungerade Zahl ist und die zu ergänzenden Punktzahlen eine geradzahlige Summe ergeben, kann die Gesamtsumme nicht 36 sein.

Hinweis: Willst du diese Aufgaben durch Probieren lösen, so musst du alle Möglichkeiten der Belegung geprüft haben. Beachte dabei die Regeln für das Anlegen von Domino-Steinen:

1. fehlender Stein	2. fehlender Stein	Gesamt-summe	Bemerkung
2-0	0-4	29	
2-1			nicht möglich, weil 1-2 schon verwendet wurde
2-2	2-4	33	
2-3	3-4	35	
2-4	4-4	37	
2-5	5-4		nicht möglich, weil 4-5 schon verwendet wurde
2-6	6-4	41	

Lösungsvariante: Aber du kannst auch mit einer Rechnung beweisen, dass es keine Lösung geben kann.

3	**1**	**1**	**2**	**a**	**b**	**c**	**d**	**4**	**5**	**5**	**1**	**1**	**0**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

$a = 2, b = c, d = 4.$

Für die Summe aller Punktzahlen soll gelten

$$36 = 3 + 1 + 1 + 2 + a + b + c + d + 4 + 5 + 5 + 1 + 1 + 0 =$$
$$3 + 1 + 1 + 2 + 2 + b + b + 4 + 4 + 5 + 5 + 1 + 1 + 0 = 29 + 2 \cdot b$$

So erhältst du die Gleichung $7 = 2 \cdot b$. Dafür gibt es jedoch keine Lösung, da b nur die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen kann.

****

Aufgabe 2a. Es gibt nur eine Möglichkeit, den Domino-Stein 1-1 aufzulegen. Ebenso gibt es nur eine Möglichkeit, den Domino-Stein 0-2 aufzulegen. Hast du beide Steine aufgelegt, gibt es für den Domino-Stein 2-2 auch nur noch eine Möglichkeit (vergleiche Abbildung 2a1).

Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Lage des Domino-Steines 0-0. Legst du ihn vertikal (Abbildung 2a2), so ist die Lage der verbleibenden Steine auch festgelegt. Legst du ihn horizontal, verbleiben noch zwei Möglichkeiten, die verbleibenden Steine aufzulegen (Abbildungen 2a3 und 2a4).

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a1

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a2

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a3

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a4

Aufgabe 2b. Für die Doppelsteine 0-0, 1-1 und 2-2 gibt es jeweils drei verschiedene Möglichkeiten, ihn aufzulegen. Wir untersuchen 0-0:

- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b1, so kann 0-0 nicht noch einmal verwendet werden, also ist die Lage des Steines 0-1 schon festgelegt. Aber es gibt nur einen Stein 0-1.
- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b2, so steht auf jedem Nachbarfeld einer 0 die Punktzahl 1, aber es gibt nur einen Stein 0-1.
- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b3, so müsste ein zweiter Stein 0-0 gelegt werden.

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b1

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b2

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b3

Diese Begründung genügt um nachzuweisen, dass es keine Belegung geben kann. Probiere aber einmal zur Übung aus, wie dieser Nachweis auch mit den Steinen 1-1 oder 2-2 geführt werden kann.

Lösungsvariante: Du kannst jedoch viel kürzer zeigen, dass es keine Lösung geben kann: An keiner Stelle stoßen Felder mit „0“ und „2“ aneinander, also kann der Stein 0-2 nicht aufgelegt werden.

Aufgabe 2c. Es gibt nur eine mögliche Lage für den Domino-Stein 0-2 (Abbildung 2c1). Dann sind links und rechts davon die nächsten Steine 1-1 und 2-2 bereits festgelegt (Abbildung 2c2). Auch danach gibt es links oben nur eine Möglichkeit mit 0-0 auszulegen (Abbildung 2c3). Und schließlich kann das Rechteck nur noch wie in Abbildung 2c4 vollständig bedeckt werden.

0	0	1	2
1	0	1	2
1	0	2	2

Abb. 2c1

0	0	1	2
1	0	1	2
1	0	2	2

Abb. 2c2

0	0	1	2
1	0	1	2
1	0	2	2

Abb. 2c3

0	0	1	2
1	0	1	2
1	0	2	2

Abb. 2c4