MO591044 – Gleichungssysteme und der Satz von VIETA (II)

Die Anwendung des Satzes von VIETA[1] als Lösungsstrategie für Gleichungssysteme schien in Vergessenheit geraten zu sein. Doch in Aufgabe MO591044 wird dieser Ansatz verwendet. Dazu betrachten wir zunächst Gleichungssysteme mit zwei Variablen. Es sollte der Zusammenhang bekannt sein: Besitzt eine quadratische Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ die reellen Nullstellen x_1 und x_2, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 = -a \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = b$$

Diese Aussage ist eine einfache Folgerung des Fundamentalsatzes der Algebra, nach dem sich ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen als Produkt von n Linearfaktoren darstellen lässt, hier also

$$x^2 + a \cdot x + b = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Nach Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x erhalten wir die behaupteten Gleichungen.

Aufgabe 6 (MO591044). Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach Satz von VIETA folgt für die Koeffizienten der Funktionen f und g

$$b = x_1 \cdot x_2 \quad \text{bzw.} \quad 2b + 1 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}$$

Nach Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir $b \cdot (2b + 1) = 1$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Außerdem folgt aus dem Satz von VIETA auch

$$-a = x_1 + x_2 \quad \text{bzw.} \quad (-2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Führen wir diese beiden Gleichungen zusammen, finden wir

[1] FRANCISCUS VIETA (1540 bis 1603)

$$-(2a+1) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{a}{b}$$

Für $b = \frac{1}{2}$ erhalten wir den Widerspruch $-(2a+1) = -2a$. Für $b = -1$ erhalten wir dagegen $-(2a+1) = a$, also $a = -\frac{1}{3}$. Somit kann nur $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$ das Lösungstupel für diese Aufgabe sein. Dies lässt sich nun durch eine Probe bestätigen, die ausführlich zu diskutieren ist. ❑

In den Aufgaben vorangegangener Jahre finden wir in den Lösungshinweisen zu Olympiade-Aufgaben bereits einen direkten Bezug zum Satz von VIETA in der

Aufgabe 7 (MO461035). Auf einem Zettel sind zwei verschiedene Zahlen notiert. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen x und y gibt, sodass eine der beiden notierten Zahlen $x + y$ und die andere gleich $x \cdot y + 1$ ist.

Lösungshinweise: Sind a und b die notierten Zahlen, so soll also eines der folgenden Gleichungssysteme gelten:

(I) $a = x + y$ (II) $b = x \cdot y + 1$

oder

(I') $a = x \cdot y + 1$ (II') $b = x + y$

Das obere Gleichungssystem (I), (II) ist nach dem Satz von VIETA genau dann lösbar in reellen Zahlenpaaren $(x; y)$, wenn die Gleichung

$$t^2 - a \cdot t + (b - 1) = 0$$

reelle Lösungen in t hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminate $a^2 - 4(b-1)$ nicht negativ ist, also $a^2 \geq 4(b-1)$ gilt. In Analogie finden wir auch, dass das untere Gleichungssystem (I'), (II') genau dann reelle Lösungen hat, wenn $b^2 \geq 4(a-1)$ gilt.

Nehmen wir nun aber an, keines der beiden Gleichungssysteme habe reelle Lösungen. Dann müsste offenbar $a^2 + b^2 < 4(b-1) + 4(a-1)$ gelten. Da diese Ungleichung gleichbedeutend zu $(a-2)^2 + (b-2)^2 < 0$ ist, kann dies nicht möglich sein. Also hat wenigstens eines der genannten Gleichungssysteme ein reelles Zahlenpaar $(x; y)$ als Lösung. ❑

Aufgabe 8 (MO440921). Es seien x und y positive reelle Zahlen mit

dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 4$ und

dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x \cdot y} = 6$.

Bestimmen Sie das arithmetrische Mittel $a = \frac{x+y}{2}$.

Lösungshinweise: Formulieren wir die Gleichung des harmonischen Mittels zu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ um und multiplizieren wir diese Gleichung mit $x \cdot y$, so erhalten wir

$$x+y=\frac{x \cdot y}{2}=\frac{g^2}{2}=18$$

woraus das arithmetische Mittel $a = 9$ unmittelbar folgt. ❑

Dieser kurzen Lösungsdarstellung folgt die *Bemerkung*, dass aus $x+y=18$ und $x \cdot y=36$ mit Hilfe des Satzes von VIETA die Zahlen x und y explizit angegeben werden können, nämlich als Lösung der quadratischen Gleichung $z^2-18z+36=0$. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \geq y$ an, finden wir $x=9+\sqrt{45}$ und $y=9-\sqrt{45}$. Aber diese Angaben sind für die Lösungsdarstellung zur Aufgabe nicht erforderlich.

Der Satz von VIETA gilt für Polynome beliebigen Grades. Besitzt eine kubische Gleichung $x^3+a \cdot x^2+b \cdot x+c=0$ drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1+x_2+x_3=-a; \quad x_1 \cdot x_2+x_2 \cdot x_3+x_3 \cdot x_1=b; \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=-c$$

Wieder erhält man aus der Darstellung mit Linearfaktoren

$$x^3+a \cdot x^2+b \cdot x+c=(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)$$

durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x die behaupteten Gleichungen. Eine Anwendung des Satzes von VIETA mit drei Variablen finden wir in der

Aufgabe 9 (MO460941/MO461041). Finden Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x+y+z=1 \quad ; \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Lösungshinweise: Zunächst ist festzustellen, dass $x, y, z \neq 0$ gelten muss. Nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit dem Hauptnenner xyz erhalten wir nach Addition der resultierenden und der ersten Gleichungen

$$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1=(x-1)(y-1)(z-1)=0.$$

Somit muss mindestens eine der drei Zahlen gleich 1 sein. Setzen wir $z=1$, so gilt $x+y=0$, also $y=-x$. Eine Probe bestätigt, dass $(x; -x; 1)$ für jede reelle Zahl $x \neq 0$ eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wegen der Symmetrie der gegebenen Gleichungen sind auch alle Vertauschungen des Lösungstripels wiederum Lösungen des Gleichungssystems. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch

$$L=\{(1, t, -t), (t, 1, -t), (t, -t, 1), t \neq 0. \text{beliebig reell}\}$$ ❑

Für eine Variante der Lösung nehmen wir nun an, dass das obige Gleichungssystem eine Lösung in reellen Zahlen besitzt. Dann können wir die drei Zahlen x, y, z als Nullstellen eines kubischen Polynoms

$$s^3 + a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$$

betrachten, für dessen Koeffizienten nach dem Satz von VIETA gilt

$$-a \ = x + y + z = 1$$
$$b = xy + yz + zx = xyz = -c$$

Wir nehmen weiter an, c sei positiv, und substituieren $c = t^2$ mit einer beliebigen reellen Zahl t. Damit suchen wir die Nullstellen des kubischen Polynoms

$$s^3 - s^2 - t^2 s - t^2 = 0$$

also $(s^2 - t^2)s - (s^2 - t^2) = (s - 1)(s^2 - t^2) = 0.$

Daraus können wir die obige Lösungsmenge ebenfalls ermitteln.

Die Schwierigkeit bei der Lösungsfindung besteht demnach in der Umformung der Gleichungen zu einer Struktur, die den Gleichungen im Satz von VIETA entsprechen.

Aufgabe 10. Ermitteln Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter a erfüllt wird:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Lösungshinweise: Wegen $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ gilt $xy + yz + zx = (a^2 - a^2)/2 = 0$. Weiter können wir $(x + y + z)^3$ umformen zu

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3xy(x + y) + 3yz(y + z) + 3xz(x + z)$$

Verwenden wir die erste Gleichung, können wir dies weiterhin umformen zu

$$(x + y + z)^3 =$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3xy(a - z) + 3yz(a - x) + 3(xz(a - y)$$

also

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3a \cdot (xy + yz + xz)$$

Deshalb finden wir $xyz = 0$. Somit suchen wir die Nullstellen des Polynoms $s^3 - a \cdot s^2 = 0$. Dieses Polynom ist gleichbedeutend zu $s^2 \cdot (s - a) = 0$ mit dem Lösungstripel $(0; 0; a)$ und allen Vertauschungen. ❑