MO590934/MO591034 – Lineare Gleichungssysteme (I)

Aufgabe 1 (MO590934). Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$ax + 9y = 5$$
$$x + ay = 1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Für welche Werte für a hat das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$? Geben Sie in diesen Fällen die Lösung in Abhängigkeit von a an.
(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Vorbemerkung: Ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme der Form

(I) $\quad a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$
(II) $\quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

besteht bekanntlich darin, eine Variable zu eliminieren[1]. Dazu multiplizieren wir zum Beispiel die erste Gleichung mit a_2 und die zweite Gleichung mit $-a_1$. Nach Addition der beiden resultierenden Gleichungen erhalten wir

(III) $\;(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot y = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2$

Ist der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) von Null verschieden, gibt es eine eindeutige Lösung für y:

(IV) $\quad y = \frac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}$

Setzen wir diese in die Gleichung (I) ein, finden wir für $a_1 \neq 0$ eine eindeutige Lösung für x:

(V) $\quad x = \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$

Ist dagegen der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) gleich Null, kann es keine Lösung für $a_2 \cdot c_1 \neq a_1 \cdot c_2$ geben bzw. sind für $a_2 \cdot c_1 = a_1 \cdot c_2$ alle reellen Zahlen y Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Aufgrund der Vorbemerkung ist der Ausdruck $1 \cdot 9 - a \cdot a = 9 - a^2$ hinsichtlich seiner Nullstellen zu untersuchen. Da genau eine Lösung gesucht wird, muss a verschieden von 3 und -3 sein. Dann können wir die Lösungen gemäß (III) und (IV) unmittelbar angeben:

$$y = \frac{1 \cdot 5 - a \cdot 1}{1 \cdot 9 - a \cdot a} = \frac{5-a}{9-a^2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{5 - 9 \cdot \left(\frac{5-a}{9-a^2}\right)}{a} = \frac{5 \cdot (9-a^2) - 9 \cdot (5-a)}{a \cdot (9-a^2)} = \frac{9 - 5 \cdot a}{9-a^2}\,.$$

[1] Sonderfälle, bei denen Koeffizienten von x oder y gleich Null sind, wollen wir hier nicht diskutieren.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Aus der zweiten gegebenen Gleichung erhalten wir für $y \neq 0$ die Gleichung $a = \frac{1-x}{y}$. Wir erkennen, dass es für $y \neq 0$ nur genau eine Lösung für a gibt. Ist dagegen $y = 0$, erhalten wir aus der zweiten Gleichung $x = 1$ und somit aus der ersten Gleichung den eindeutigen Wert $a = 5$. Also ist die Frage zu verneinen: Es gibt kein Wertepaar $(x; y)$, dass für mehrere Zahlen a Lösung des Gleichungssystems ist.

Lösungsvariante: In den offiziellen Lösungshinweisen zur Aufgabe wird eine allgemeinere Lösungsstrategie vorgeschlagen. Mit der Vermutung, dass die Frage aus Aufgabenteil zu verneinen ist, nehmen wir an, es gäbe mindestens zwei verschiedenen Zahlen a_1 und a_2, für die das Gleichungssystem eine Lösung $(x_0; y)$ hat. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$a_1 \cdot x + 9 \cdot y = 5 = a_2 \cdot x + 9 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot x = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung finden wir

$$x + a_1 \cdot y = 1 = x + a_2 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot y = 0.$$

In beiden Fällen folgt (wegen der Annahme $a_1 \neq a_2$) $x = 0$ bzw. $y = 0$. Wir überzeugen uns jedoch davon, dass das Paar $(0; 0)$ keine Lösung des Gleichungssystem ist. ❑

Wettbewerbsaufgaben mit Gleichungssystemen bieten sich offenbar an, im Schwierigkeitsgrad zwischen den Klassenstufen 9 und 10 zu differenzieren. So lautete die zugehörige

Aufgabe 2 (MO591034). Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot x + (5 \cdot a + 9) \cdot y = 1$$
$$(5 \cdot a + 9) \cdot x + a \cdot y = -1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Bestimmen Sie für jede reelle Zahl a die Anzahl der Lösungen $(x; y)$ des linearen Gleichungssystems. Geben Sie für diejenigen Werte a, für welche das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$ hat,

(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Wir könnten die allgemeine Lösungsstrategie von linearen Gleichungssystemen wie in der Aufgabe MO590934 anwenden. Die aufwändige Rechnung wird in den offiziellen Lösungshinweisen gezeigt. Als Lösungsvariante wird aber auch darauf verwiesen, dass die spezielle Form des Gleichungssystems eine wesentlich einfachere Lösung ermöglicht: Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$(6 \cdot a + 9) \cdot (x + y) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

- Für $a = -\frac{2}{3}$ gibt es unendlich viele Lösungspaare (x, y).
- Ist $a \neq -\frac{2}{3}$, so folgt $y = -x$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir $x = \frac{-1}{4 \cdot a + 9}$. Für $a = -\frac{9}{4}$ kann es also keine Lösung des Gleichungssystems geben.
- Ist dagegen $a \neq -\frac{9}{4}$ erhalten wir $y = \frac{1}{4 \cdot a + 9}$ und für das Gleichungssystem gibt es genau eine Lösung $\left(-\frac{1}{4 \cdot a + 9}; \frac{1}{4 \cdot a + 9}\right)$.

Damit ist Aufgabenteil vollständig beantwortet. ❑

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Wir lösen die erste Gleichung nach a auf und erhalten für $x + 5 \cdot y \neq 0$ nach äquivalenter Umformung

$$a = \frac{1 - 9 \cdot y}{x + 5 \cdot y}$$

Es kann also in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die zweite Gleichung widersprüchlich wird). Nehmen wir dagegen $x + 5 \cdot y = 0$ an und substituieren wir in der zweiten Gleichung $x = -5 \cdot y$, so erhalten wir

$$a = \frac{1 - 45 \cdot y}{24}$$

Es kann also auch in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die erste Gleichung widersprüchlich wird).

Die Frage des Aufgabeteils (b) ist also zu verneinen. ❑

Diese Aufgaben haben in der Mathematik-Olympiade einen Vorgänger:

Aufgabe 3 (MO571045). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$a^2 \cdot x + y = a$$
$$x + a^2 \cdot y = a$$

in den reellen Variablen a, x und y.

Bestimmen Sie die Menge M aller Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat. Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Aufgaben mit Gleichungssystemen wurden wiederholt in den Mathematik-Olympiaden gestellt. Da die Lösung solcher linearen Systeme eher eine technische Fertigkeit erfordert, werden sie „versteckt“, wie zum Beispiel in

Aufgabe 4 (MO580941). Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$|x+y|+z=4 \quad ; \quad |y+z|+x=5 \quad ; \quad |z+x|+y=6$$

Lösungshinweise: Mit Fallunterscheidung sind die Betragszeichen aufzulösen. In jedem dieser Fälle entstehen einfach zu lösende lineare Gleichungssysteme.

Aufgabe 5 (MO570934). Drei Mähdrescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

(1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
(2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{2}{3}$ des Feldes abgeerntet.
(3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{7}{12}$ des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mähdrescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

Anmerkung: In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mähdrescher stets mit voller Leistung arbeiten.

Lösungshinweise: Es sei a die Stundenleistung des Mähdreschers A. Die Zahl a gibt dabei an, welchen Anteil des betrachteten Feldes A innerhalb einer Stunde bearbeiten kann. Analog seien die Stundenleistungen der anderen beiden Mähdrescher mit b und c bezeichnet. Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$9 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \qquad 4 \cdot a + 3 \cdot c = \frac{2}{3} \qquad 2 \cdot b + 3 \cdot c = \frac{7}{12}$$

Formen wir die erste Gleichung nach b und die zweite Gleichung nach c um und substituieren wir mit den resultierenden Gleichungen in der dritten Gleichung b und c, so erhalten wir eine lineare Gleichung in a. Mit deren Lösung $a = \frac{1}{12}$ finden wir aus der ersten und zweiten Gleichung $b = \frac{1}{8}$ bzw. $c = \frac{1}{9}$.
(*Hinweis:* Die genannten Umformungen müssen natürlich in der Lösungsdarstellung vollständig angegeben sein!)

Somit gilt: Mähdrescher A benötigt 12 Stunden, um das Feld allein abzuernten, Mähdrescher, B benötigt dafür 8 Stunden und Mähdrescher C benötigt dafür 9 Stunden.