Thema 03: Gleichungssysteme

Aufgabe 1a (MO570945). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$(a+2)\cdot x+(a+3)\cdot y=a+3$$
$$(a+7)\cdot x+(11-a)\cdot y=a+13$$

in den reellen Variablen a, x und y.

(a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung (x,y) hat.

(b) Bestimmen Sie die Menge M aller Paare (x,y) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat. Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Aufgabe 2a (MO571045). Wir betrachten das Gleichungssystem

$$a^2\cdot x+y=a$$
$$x+a^2\cdot y=a$$

in den reellen Variablen a, x und y.

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung $(x;y)$ hat.

Aufgabe 3a (MO540931/MO5410431). Ermitteln Sie alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

(1) $\quad y=12\cdot x-\frac{1}{9}$

(2) $\quad y=\frac{1}{12}-9\cdot x$

Aufgabe 4a (MO540931/MO5410431). Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a\cdot b\neq 0$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a und b alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

(1) $\quad y=a\cdot x-\frac{1}{b}$

(2) $\quad y=\frac{1}{a}-b\cdot x$

Aufgabe 5a (MO430923). Herr A geht jeden Morgen zwischen 7:15 Uhr und 7:20 Uhr aus dem Haus. Normalerweise kommt er gegen 17:30 Uhr nach Hause. Eines Tages kommt er kurz nach 15:30 Uhr zurück und er stellt fest, dass die Zeiger seiner Uhr im Flur genauso stehen wie beim Verlassen des Hauses, nur dass der kleine und der große Zeiger vertauscht sind.

Ermitteln Sie die Uhrzeiten, für welche die Beobachtung von Herrn A zutrifft, auf die Sekunde (abgerundet) genau.

Aufgabe 6a (MO330922). Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen. Bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist. Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Aufgabe 7a (MO461032). Gegeben ist die von reellen Parametern a und b abhängige Gleichung

(1) $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0.$

a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b so, dass sich

(2) $x^3 + x + 1 = 0$

als Spezialfall der Gleichung (1) ergibt, d.h. dass man nach dem Einsetzen der Werte für a und b in der linken Seite von (1) und Zusammenfassen die linke Seite von (2) erhält.

b) Bekanntlich hat jede Gleichung dritten Grades wenigstens eine reelle Lösung. Finden Sie eine Formel für eine reelle Lösung x der Gleichung (1) in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe 8a (MO261043). Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 3 \quad ; \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3 \quad ; \quad xyz = 1.$$

Aufgabe 9a. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27.$$

Aufgabe 10a. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 1 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$