Funktionalgleichungen (Teil II)

Aufgabe 01-07 (MO201033). Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Es ist $f(1) = 1$. (1)

Für jedes $x \neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$. (2)

Für alle x_1, x_2 mit $x_1, x_2, x_1 + x_2 \neq 0$ gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. (3)

Man beweise, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$ gilt.

Lösungshinweise: Wenn wir den Funktionswert für $x = \frac{1}{7}$ kennen würden, könnten wir mit Voraussetzung (3) den Beweis vollenden. Mittels der Voraussetzung (2) kann dieser Funktionswert aber berechnet werden, wenn wir den Wert für $f(7)$ kennen. Den wiederum finden wir unter Anwendung von Voraussetzungen (1) und (3):

Aus (3) folgt für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ und natürliche Zahlen $n > 0$

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x). \tag{4}$$

Den Nachweis dafür können wir mit der Methode der vollständigen Induktion führen.

Induktionsanfang: Die Gleichung (4) gilt in trivialer Weise für $n = 1$

$$f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x),$$

aber auch für $n = 2$

$$f(2 \cdot x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Gleichung (4) gilt für $n = k$.
Induktionsbehauptung: Die Gleichung (4) gelte auch für $n = k + 1$.
Induktionsschritt: Es gilt

$$f\big((k+1) \cdot x\big) = f(k \cdot x + x) = f(k \cdot x) + f(x) = k \cdot f(x) + f(x)$$
$$= (k+1) \cdot f(x)$$

Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang, -voraussetzung und -schritt folgt, dass die Gleichung (4) für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt.

Die Gleichung (4) muss natürlich zur Lösung der Aufgabe nicht so allgemein bewiesen werden. Es genügt durch mehrmalige Anwendung der Voraussetzung (3) die Gültigkeit für $n = 7$ nachzuweisen.

Nach dieser Vorbereitung lassen sich folgende Gleichungen bilden:

(1) $f(7) = f(7 \cdot 1) = 7 \cdot f(1) = 7$ wegen (1) und (4)

(2) $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$ wegen (2) und (7)

(3) $f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(5 \cdot \frac{1}{7}\right) = 5 \cdot f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{7}$ wegen (4) und (6).

❑

Der Bewies zur Gültigkeit der Gleichung (4) lässt vermuten, dass die Voraussetzung (3) einen sehr tiefgründigen Zusammenhang beschreibt. Sie ist als **CAUCHYsche Funktionalgleichung** bekannt: Für alle Funktionen, die für alle rationalen Zahlen x und y die Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ erfüllen, gilt für alle rationalen Zahlen r die Gleichung $f(r) = c \cdot r$ mit $c = f(1)$.

Für den Beweis dieser Aussage setzen wir spezielle Argumente ein und finden auf diese Weise Eigenschaften der Funktion f, die schließlich zur Lösung führen.

Setzen wir zunächst in die Funktionalgleichung $x = y = 0$, so folgt daraus, dass $f(0) = 2 \cdot f(0)$ gilt, also finden wir $f(0) = 0$.

Für $y = -x$ ergibt sich $f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, also $f(x) = -f(-x)$ und wir sehen, dass alle Lösungen der Funktionalgleichung ungerade Funktionen sind.

Mit Gleichung (4) gilt für natürliche Zahlen n die Gleichung $f(n \cdot 1) = n \cdot f(1)$. Da wir wissen, dass die gesuchten Funktionen ungerade Funktionen sind, können wir diese Beziehung auch auf alle ganzen Zahlen ausweiten. Damit wissen wir also, dass $f(z) = f(1) \cdot z$ für alle $z \in Z$. Es wäre schön, wenn man diese Beziehung auch auf noch größere Zahlenbereiche ausdehnen kann. Für rationale Zahlen $x = p/q$ mit $p, q \in Z, q \neq 0$ gilt $q \cdot x = p \cdot 1$ und somit $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$ oder nach Umformen

$$q \cdot f(x) = p \cdot f(1), \text{ also } f(x) = f(1) \cdot x.$$

Setzen wir $f(1) = c$, so gilt für alle Lösungen der Funktionalgleichung für alle rationalen Zahlen r:

$$f(r) = c \cdot r$$

Eine Probe bestätigt, dass diese Funktion die geforderte Funktionalgleichung erfüllt :

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) = c \cdot x + c \cdot y = f(x) + f(y).$$

Um die Lösung auf alle reellen Zahlen zu erweitern, bedarf es erstaunlicherweise weitere Voraussetzungen an die Funktionen f. Es erscheint anschaulich verständlich, dass monotone Funktionen f, die der CAUCHYschen

Funktionalgleichung genügen, für alle reellen Zahlen der Form $f(x) = c \cdot x$ genügen.

Es genügt bereits, dass für die Funktionen gefordert wird, dass sie auf jedem Intervall es Definitionsbereiches beschränkt ist. Andererseits gibt es ohne einschränkende Bedingungen reellwertige Funktionen, die der CAUCHYschen Funktionalgleichung genügen, für rationale Argumente der linearen Funktion folgen, aber für irrationale Argumente in jedem Abschnitt des Definitionsbereiches unbeschränkt sind. So eine Funktion wie eine unendlich ausgedehnte Staubwolke ist nur noch schwer vorstellbar – aber es gibt sie tatsächlich.

Aufgabe 01-08 (M271042). Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösungshinweise: Zunächst folgt aus $x_1 = x_2 = 0$ wegen Voraussetzung (1) die Beziehung

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0^3) + f(0^3) = 2 \cdot f(0), \text{ also } f(0) = 0.$$

Weiter folgt aus $x_1 = x_2 = 1$ wegen Voraussetzung (2) die Beziehung

$$f(1) = 1 \cdot f(1^3) + 1 \cdot f(1^3) = 2 \cdot f(1), \text{ also } f(1) = 0.$$

Setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = 0$, so folgt aus Voraussetzung (1) auch

$$f(x + 0) = f(x^3) + f(0^3) = f(x^3) \qquad (3).$$

Damit reduziert sich die Voraussetzung (1) zu $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Es erscheint nun einfach, auf die Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung zu verweisen und wegen $f(1) = 0$ zu schlussfolgern, es gelte $f(x) = 0$ für alle reellen *x*. Jedoch wird in der Aufgabenstellung keine Beschränkung an *f* gestellt. Es ist also nicht gesichert, wie der Funktionswert für das irrationale Argument $2 + \sqrt{5}$ zu berechnen ist. Aber natürlich dürfen wir $f(n) = 0$ für alle natürlichen Zahlen n feststellen.

Setzen wir $x_1 = x_2 = \sqrt{5}$ so erhalten wir wegen (2) und (3)

$$0 = f(5) = f\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right), \text{ also } f\left(\sqrt{5}\right) = 0.$$

Nochmals Voraussetzung (1) anwendend finden wir abschließend

$$f(2+\sqrt{5}) = f(2) + f(\sqrt{5}) = 0.$$ ❑

Während in Aufgabe 01-08 die CAUCHYsche Funktionalgleichung nur als Zwischenergebnis genutzt werden konnte, gibt es zahlreiche Aufgaben, die sich direkt auf diese grundlegende Gleichung beziehen.

Aufgabe 01-09. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für die für alle reellen Zahlen *x* und *y* gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1 \text{ mit } f(0) = 1.$$

Lösungshinweise: Wir definieren eine Funktion g durch $g(x) = f(x) - 1$. Die Monotonie der Funktion f überträgt sich auf g. Außerdem gilt:

$$g(x+y) = f(x+y) - 1 = f(x) + f(y) - 1 - 1 = g(x) + g(y).$$

Damit erfüllt g die CAUCHYsche Funktionalgleichung und es gilt $g(x) = c \cdot x$ für alle reellen Zahlen x. Die daraus resultierende Funktion $f(x) = c \cdot x + 1$ erfüllt tatsächlich die Angaben der Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= c \cdot (x+y) + 1 = c \cdot x + 1 + c \cdot y + 1 - 1 \\ &= f(x) + f(y) - 1 \\ \text{mit } f(0) &= c \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$ ❑

Aufgabe 01-10. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle positiven reellen Zahlen definiert sind und für beliebige positive reelle Zahlen *x* und *y* die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Lösungshinweise: Gäbe es ein Argument $x \neq 0$ mit $f(x) = 0$, so wäre die Funktion *f* konstant 0, denn für jede reelle Zahl *y* gilt in diesem Fall

$$f(y) = f\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Wegen $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 > 0$ können wir für alle positiven reellen Zahlen die Funktion g durch die Beziehung $g(z) = ln(f(e^z))$ definieren. Es gilt:

$$g(x+y) = ln\big(f(e^{x+y})\big) = ln\big(f(e^x \cdot e^y)\big) =$$
$$ln(f(e^x) \cdot f(e^y)) = ln(f(e^x)) + ln(f(e^y)) = g(x) + g(y)$$

Da sich die Monotonie von f auf g überträgt, gilt $g(x) = c \cdot x$ als Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung und somit $lnf(e^z) = c \cdot z$, gleichbedeutend zu $f(e^z) = e^{cz}$ für alle positiven reellen Zahlen z. Setzen wir abschließend $x = e^z$ finden wir als Lösung die Funktion $f(x) = x^c$ mit einer festen Zahl c.

Probe: $f(x \cdot y) = (x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c = f(x) \cdot f(y)$ ❑